الفصل 01 الإحصاء الوصفي ذو بعد واحد

I تعاريف :

1 - **المجتمع** : هو المجموعة التي تُقام عليها الدراسة الإحصائية (مجموعة أشخاص أو أشياء). نرمز له بـ Ω .

2 - **الصفة** : هي الخاصية المطلوب مراقبتها (أو دراستها) في المجتمع ونرمز لها بـ X .

3 - **أوضاع الصفة** : هي مختلف القيم التي تأخذها الصفة ونرمز لها بـ: X_i
حيث $X_i \in \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ أي يوجد k وضع للصفة

4 - **التكرار المطلق** : هو عدد مرات تكرار أوضاع الصفة نرمز له بـ: n_i

ولدينا : $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$

حيث N هو عدد عناصر المجتمع $(card\ \Omega = N)$

5 - **التكرار النسبي** : نرمز له بـ f_i حيث $f_i = \frac{n_i}{N}$

ولدينا أيضا : $\boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i = 1}$

6 - **الجدول الإحصائي** : هو جدول على الشكل :

X_i	n_i	f_i
x_1	n_1	f_1
x_2	n_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k
Σ	N	1

II) أنواع الصفة : الصفة نوعان :

a) **الصفة الكيفية** : هي صفة أوضاعها غير قابلة للقياس .

أمثلة : لون العينين، لون الشعر، الجنسية - - -

b - **الصفة الكمية** : هي صفة أوضاعها قابلة للقياس وتسمى أيضا بالمتغير الإحصائي .

أمثلة : نقاط الرياضيات، عدد الأولاد، الطول، - - - - - - -

ملاحظة: إذا كانت الصفة المدروسة كيفية يمكن أن نرفق لأوضاعها أعداد، أي كل وضع للصفة الكيفية يمكن تعويضه بعدد وتصبح الصفة كمية.

مثال: في شركة متعددة الجنسيات قمنا بدراسة جنسية 10 أشخاص فوجدنا

الجنسية	جزائري	إيطالي	ألماني
عدد الأشخاص n_i	3	5	2

• المجتمع: مجموعة 10 أشخاص

$Card\ \Omega = N = 10$

الصفة: الجنسية

- نوع الصفة كيفية

نرفق لكل جنسية عدد

$$\begin{cases} X_1 = \text{جزائري} \rightarrow 1 \\ X_2 = \text{ايطالي} \rightarrow 2 \\ X_3 \ \text{ألماني} \rightarrow 3 \end{cases} \longrightarrow$$

بهذا تصبح الصفة الكيفية كمية

ملاحظة: سندرس في هذا الفصل الصفة الكمية فقط.

III. دراسة الصفة الكمية:

الصفة الكمية

متقطعة — مستمرة

a- صفة كمية متقطعة: تكون أوضاعها عبارة عن أعداد معزولة.

أمثلة: نقاط الرياضيات، عدد الطلبة، عدد الأولاد، ...

مثال: قمنا بدراسة نقاط الرياضيات لـ 100 طالب فتحصلنا على الجدول التالي:

X_i	n_i	f_i	n_iX_i	$n_iX_i^2$
6,5	20	0,2	130	845
9	50	0,5	450	4050
12	20	0,2	240	2880
13	10	0,1	130	1690
Σ	$N=100$	1	950	9465
Σ/N			$\bar{X}=9,5$	

$$N=\sum_{i=1}^{4} n_i = 100$$

$$f_i=\frac{n_i}{N}$$

$$\sum_{i=1}^{4} f_i = 1$$

$$n_iX_i^2=(n_iX_i)X_i$$

المجتمع : مجموعة 100 طالب

الصفة : نقاط الرياضيات

نوع الصفة : كمية متقطعة

أوضاع الصفة $X_i \in \{6,5 , 9, 12, 13\}$

$$\begin{cases} \sum n_iX_i = 950 \\ \sum n_iX_i^2 = 9465 \end{cases}$$

الخاصيات الإحصائية : هي معايير يستعين بها الإحصائي لتقليص المعلومات و التعبير عنها

1- المعدل الحسابي : نرمز له بـ $\bar{X}$ حيث

$$\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_iX_i \quad \text{أو} \quad \bar{X}=\sum_{i=1}^{k} f_iX_i$$

ملاحظة : المعدل الحسابي يسمح لنا بتلخيص كل القيم (أوضاع الصفة) في عدد واحد.

مثال :

$$\boxed{\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_iX_i = \frac{950}{100} = 9,5}$$

2- التباين : نرمز له بـ $Var(X)$ وهو انحراف القيم عن معدلها الحسابي، يستعمل لقياس التباين حيث :

$$Var(X)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(X_i-\bar{X})^2 \longrightarrow \boxed{Var(X)\geq 0}$$

$$\begin{cases} Var(X)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_iX_i^2-(\bar{X})^2 \longrightarrow (TD) \\ Var(X)=\sum_{i=1}^{k} f_iX_i^2-(\bar{X})^2 \longrightarrow (TD) \end{cases}$$

مثال:

$$Var(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_i X_i^2 - (\overline{X})^2$$

$$= \frac{9465}{100} - (9,5)^2 = 4,4$$

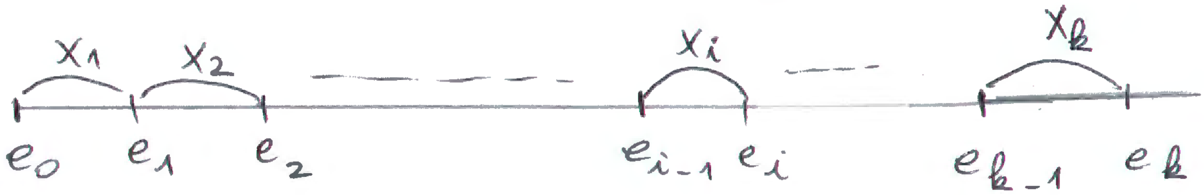
3- الانحراف المعياري: نرمز له بـ σ_X حيث

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

مثال:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4,4} = 2,09$$

ب- الصفة الكمية المستمرة: تأخذ أوضاع الصفة في هذه الحالة قيم داخل مجالات (أي صفوف أو فئات).



المركز: ~~نرمز~~ نرمز له بـ c_i

مركز الصف $[e_{i-1}, e_i[$ هو متوسطه أي $c_i = \frac{e_{i-1}+e_i}{2}$

مثال: تم تصنيف أعضاء نادي رياضي حسب العمر في الجدول التالي:

العمر	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,18[
n_i	6	14	8	12

المجتمع: مجموعة أعضاء النادي

الصفة: العمر

نوع الصفة: كمية مستمرة

$$\boxed{N = \sum_{i=1}^{4} n_i = 40}$$

$$\boxed{[8,10[\rightarrow c_1 = \frac{8+10}{2} = 9} \; ; \; \boxed{f_i = \frac{n_i}{N} \quad \sum_{i=1}^{4} f_i = 1}$$

حدود الصفوف e_i	n_i	f_i	c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
8 — 10	6	0,15	9	54	486
10 — 12	14	0,35	11	154	1694
12 — 14	8	0,2	13	104	1352
14 — 18	12	0,3	16	192	3072
Σ	$N=40$	1		504	6604
Σ/N				$\bar{X}=12,6$	165,1

$n_i c_i^2 = (n_i c_i) c_i$

$\sum n_i c_i = 504$

$\sum n_i c_i^2 = 6604$

$n_i c_i^2 = (n_i c_i)\, c_i$

• الخاصيات الإحصائية:

1 - المعدل الحسابي: $\bar{X}$: نفرض أن التوزيع داخل الصفوف منتظم
نأخذ مركز الصف عوض كل القيم الموجودة داخله
وبالتالي:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i \quad \text{أو} \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i$$

مثال:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1} n_i c_i = \frac{504}{40} = 12,6$$

2 - التباين: $Var(x)$: $\boxed{Var(X) \geq 0}$

$$Var(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - (\bar{x})^2 \quad \text{أو} \quad Var(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i^2 - (\bar{X})^2$$

مثال:

$$Var(x) = \frac{1}{N}\sum n_i c_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{6604}{40} - (12,6)^2 = 165,1 - 158,76$$

$$\boxed{Var(x) = 6,34}$$

3 - الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{var(x)}$$

مثال:

$$\sigma_x = \sqrt{6,34} = 2,51$$

σ

حساب الإحتمال باستعمال التحليل التوفيقي :

نرمز للاحتمال بـ P حيث أنه اذا كان هناك احتمال متساوي لوقوع نتائج مختلفة فمن ثم يمكننا حساب احتمال وقوع حدث معين A بشكل عام كما يلي :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات المناسبة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \quad , \quad 1 \geq P(A) \geq 0$$

مثال: كيس به 3 كرات حمراء وكرية خضراء و4 كريات سوداء ، نسحب 3 كريات في آن واحد

1) ما هو عدد الطرق الممكنة (عدد الحالات الممكنة) لسحب 3 كريات

2) ما هو احتمال الحصول على 2 كريات حمراء و 1 سوداء

الحل:

8 كريات:
- 3 حمراء
- 1 خضراء
- 4 سوداء.

السحب في آن واحد ⟸ التكرار غير ممكن والترتيب غير مهم ⟸ توفيقة.

1) عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كريات هو: C_8^3

2) A : الحصول على 2 كريات حمراء و 1 سوداء.

عدد الحالات المناسبة لـ A هو: $C_3^2 \cdot C_4^1$

ومنه :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات المناسبة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_8^3}$$

II الاحتمالات :

تعاريف :

① التجربة العشوائية : expérience aléatoire

التجربة التي لا يمكن توقع نتائجها مسبقا ونتأكد تمام تسمى بالتجربة العشوائية ونرمز لها بـ ξ.

أمثلة : ξ_1 : رمي نرد غير مزور مرة واحدة.

ξ_2 : رمي قطعة نقدية مرة واحدة.

② المجموعة الأساسية (الأصلية) ensemble fondamental

تسمى مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية بالمجموعة الأساسية نرمز لها بـ Ω.

أمثلة : ξ_1 : رمي نرد غير مزور مرة واحدة

المجموعة الأساسية ← $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ξ_2 : رمي قطعة نقدية مرة واحدة

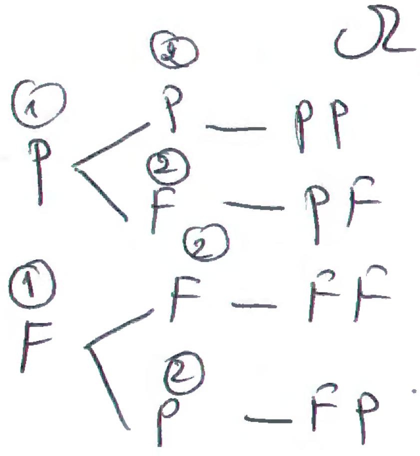
المجموعة الأساسية ← $\Omega_2 = \{P, F\}$

P : pile

F : Face

ξ_3 : رمي قطعة نقدية مرتين

$\Omega_3 = \{PP, FP, FF, PF\}$ ← المجموعة الأساسية



③ الحدث : évènement : لدينا ε تجربة عشوائية و Ω

المجموعة الأساسية . نسمي حدث E كل مجموعة جزئية من Ω أي $E \subset \Omega$

أمثلة : ε : رمي نرد غير مزور مرة واحدة .

A : نحصل على الرقم 4

المجموعة الأساسية $\leftarrow \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

حدث $\leftarrow A = \{4\}$

A يسمى حدث عنصري (عنصر واحد)

B : نحصل على عدد زوجي :

حدث $\leftarrow B = \{2,4,6\}$

يسمى B حدث مركب (أكثر من عنصر واحد)

$\overline{B}$: لا نحصل على عدد زوجي (نحصل على عدد فردي).

Ω في B متممة $C_{\Omega}^{B} = \overline{B} = \{3,1,5\}$

يسمى $\overline{B}$ الحدث المضاد أو الحدث العكسي.

C : نحصل على رقم أقل من أو يساوي 6

حدث أكيد $\leftarrow C = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

D : نحصل على رقم أكبر تماما من 6

حدث مستحيل $\leftarrow D = \phi$

عمليات على الأحداث :

لدينا ε تجربة عشوائية و Ω المجموعة الأساسية

وليكن A و B حدثان من Ω:

1- الحدثان A و B يتحققان في نفس الوقت (في آن واحد، معا) $\Leftarrow$ الحدث $A \cap B$

2- الحدث A أو الحدث B يتحقق $\Leftarrow$ الحدث $A \cup B$.

3- من بين A و B يتحقق على الأقل حدث $\Leftarrow$ الحدث $A \cup B$

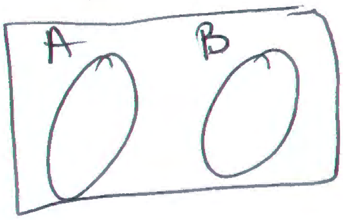
4- الحدث A فقط يتحقق (A وحده يتحقق) $\Leftarrow$ الحدث $A \cap \bar{B}$

5- الحدث B فقط يتحقق (B وحده يتحقق) $\Leftarrow$ الحدث $B \cap \bar{A}$

6- يتحقق حدث واحد فقط من بين A و B $\Leftarrow$ الحدث $(B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B})$

التنافي:

Ω



A و B حدثان متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$

مثال: $A \cap \bar{A} = \emptyset$ إذن A و $\bar{A}$ متنافيان.

قوانين مورغان:

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$$

تمرين: (يساعد على ترجمة الجمل إلى أحداث)

تقوم آلة إلكترونية بالعمل إذا اشتغل المركبان A و B

ولتكن الأحداث:

A: المركب A يشتغل (يعمل)

B: المركب B يشتغل (يعمل)

عبر باستعمال A و B و التقاطع والاتحاد والمتممة عن الأحداث التالية

1- المركب A معطل

2- المركب B معطل

3- المركب A فقط يشتغل

4- المركب B فقط يشتغل

5- الآلة تشتغل.

6- من بين المركبان A و B يشتغل على الأقل مركب
7- يشتغل المركبا A و المركبا B معا.
8- يشتغل المركبا A أو B.

الحل: ① الحدث $\overline{A}$
② الحدث $\overline{B}$
③ الحدث $A \cap \overline{B}$
④ الحدث $B \cap \overline{A}$
⑤ الحدث $A \cap B$
⑥ الحدث $A \cup B$
⑦ الحدث $A \cap B$
⑧ الحدث $A \cup B$

تعريف الاحتمال: لتكن لم تجربة عشوائية و Ω المجموعة الأساسية ولتكن $\mathcal{A}$ مجموعة كل الأحداث نطلق اسم احتمال على كل تطبيق P.

$$P : \mathcal{A} \to [0,1]$$
$$A \to P(A)$$

يحقق الشروط:

a) $P(\Omega) = 1$ (Ω الحدث الأكيد)

b)

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: المجموعة الأصلية المرتبطة بتجربة عشوائية هي: $\Omega = \{a, b, c, d\}$، نعرف التطبيقات التالية: أيها يشكل فعلا احتمال؟

① $P\{a\} = \frac{1}{2}$, $P\{b\} = \frac{1}{4}$, $P\{c\} = \frac{1}{8}$, $P\{d\} = \frac{1}{8}$

② $P\{a\} = \frac{1}{2}$, $P\{b\} = -\frac{1}{4}$, $P\{c\} = \frac{1}{4}$, $P\{d\} = \frac{1}{8}$

الحل: ①

$$1 \geq P\{a\} \geq 0$$
$$1 \geq P\{b\} \geq 0$$
$$1 \geq P\{c\} \geq 0$$
$$1 \geq P\{d\} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} P(A_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

إذن التطبيق ① احتمال

② نلاحظ أن: $P\{b\} = -\frac{1}{4}$ (سالب $0 >$)

ومنه مباشرة التطبيق ② ليس احتمال

خواص الاحتمال:

① $P(\phi) = 0$

② $\forall A \subset \Omega : \quad 1 \geq P(A) \geq 0$

③ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

④ من أجل كل حدثين كيفيين A و B فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

⑤
$$\begin{cases} P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) \\ P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) \end{cases}$$

⑥ من أجل الأحداث الكيفية A، B، C فإن

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$p(\bar{A}\cap\bar{B}) = p(\overline{A\cup B}) = 1 - p(A\cup B) \qquad (7)$$

$$p(\bar{A}\cup\bar{B}) = p(\overline{A\cap B}) = 1 - p(A\cap B) \qquad (8)$$

حساب الاحتمال (حالة تساوي الاحتمال)

1 احتمال حدث عنصري : لتكن $\Omega = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$

$$\text{card}\,\Omega = n[\Omega]$$

$$\forall\ 1\leq i\leq n :\ p(A_i) = \frac{1}{\text{card}\,\Omega} = \frac{\text{card}\,A_i}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1}{n}$$

مثال : نرمي قطعة نرد مرة واحدة ، ماهو احتمال ظهور رقم 3.

الحل :

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Leftrightarrow \text{card}\,\Omega = 6$$

A : ظهور رقم 3

$$A = \{3\} \Leftrightarrow \text{card}\,A = 1$$

$$p(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega} = \frac{1}{6}$$

احتمال الأحداث المركبة : A حدث مركب

$$p(A) = \frac{\text{عدد الحالات المناسبة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}$$

مثال : إذا كانت كلمة سر معينة تتكون من 3 حروف ثنائية مختلفة متبوعة برقمين مختلفين.

ما هو الإحتمال أن تبدأ كلمة السر بحرف صوتي (voyelle) وتنتهي برقم زوجي.

الحل: لدينا 26 حرف لاتيني و 10 أرقام من 0 إلى 9.

و 6 حروف صوتية ⇐ a, e, i, o, u, y.

$abc52 \neq acb52$ — — —

$eay36 \neq eya36$ — — —

بدون تكرار لأن الحروف مختلفة والأرقام مختلفة.

والترتيب مهم ⇐ ترتيبة.

A: كلمة السر تبدأ بحرف صوتي وتنتهي برقم زوجي

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{\text{عدد الحالات المناسبة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

عدد الحالات الممكنة: $A_{26}^{3} \cdot A_{10}^{2}$

عدد الحالات المناسبة: $A_{6}^{1} \cdot A_{25}^{2} \cdot A_{5}^{1} \cdot A_{9}^{1}$

$$p(A) = \frac{A_{6}^{1} \cdot A_{25}^{2} \cdot A_{5}^{1} \cdot A_{9}^{1}}{A_{26}^{3} \cdot A_{10}^{2}}$$

الاحتمالات الشرطية : لتكن A و B حدثان

* الاحتمال الشرطي للحدث A علما أن الحدث B قد تحقق هو: $p(A/B)$
بحيث :
$$p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} \quad , \quad p(B) \neq 0$$

* الاحتمال الشرطي للحدث B علما أن الحدث A قد تحقق هو $p(B/A)$
بحيث
$$p(B/A) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)} \quad , \quad p(A) \neq 0.$$

مثال: تزود قاعة العمليات بالكهرباء لما يشتغل أحد المولدان A أو B ، احتمال اشتغال A هو $0{,}7$ واحتمال تعطل B هو $0{,}2$ ،
و الاحتمال أن تكون قاعة العمليات مزودة بالكهرباء هو $0{,}9$
1 - ما هو احتمال إشتغال المولدان في نفس الوقت؟
2 - ما هو احتمال أن المولد A يشتغل علما أن المولد B يشتغل ؟
3 - لو نعلم أن المولد B يشتغل ، ما هو احتمال تعطل A ؟

الحل: A : اشتغال المولد A ← $p(A)=0{,}7$
B : اشتغال المولد B ← $p(B)=1-p(\bar{B}) = 1-0{,}2 = 0{,}8$
$\bar{B}$: تعطل المولد B ← $p(\bar{B})=0{,}2$
$A\cup B$: قاعة العمليات مزودة بالكهرباء ← $p(A\cup B)=0{,}9$

1 - $A\cap B$: اشتغال المولدان في نفس الوقت.
حساب $p(A\cap B)$: لدينا

$$p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow \quad p(A\cap B) = p(A)+p(B)-p(A\cup B)$$
$$= 0{,}7+0{,}8-0{,}9 = 0{,}6$$

2 - حساب $p(A/B)$:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}6}{0{,}8}$$

3- حساب $P(\bar{A}/B)$:

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$= 1 - P(A/B) = 1 - \frac{0{,}6}{0{,}8}.$$

خواص:

① $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \iff P(A\cap B) = P(A/B)\cdot P(B)$

② $P(B/A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \iff P(A\cap B) = P(B/A)\cdot P(A)$

③ $P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$

④ $P(A\cup B/C) = P(A/C) + P(B/C) - P(A\cap B/C)$

الحوادث المستقلة: ليكن A و B حدثان

* نعرف أن A و B مستقلان إذا وفقط إذا كان

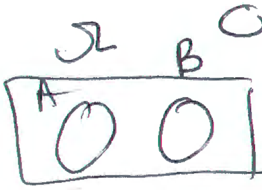
$$\begin{cases} P(A/B) = P(A) \\ \text{أو} \\ P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \end{cases}$$

ملاحظات:

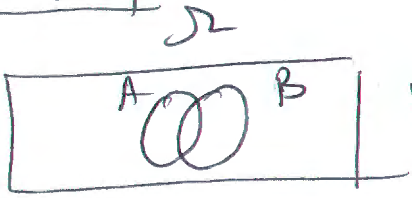
① A و B مستقلان $\iff P(B/A) = P(B)$

• $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B)$

② هناك فرق بين حدثان متنافيان وحدثان مستقلان



ⓐ A و B متنافيان معناه $A\cap B = \emptyset \Rightarrow P(A\cap B) = 0$



ⓑ A و B مستقلان فإن $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

تمرين: سميرة وطارق شكلا فريقا معا بقصد المشاركة في لعبة، الاحتمال أن تربح سميرة هو 0,7 والاحتمال أن يربح طارق هو 0,6 والاحتمال أن يربح الفريق هو 0,88

هل هذان الشخصان يلعبان بصفة مستقلة.

الحل: S: سميرة تربح $p(S)=0,7$

T: طارق يربح $p(T)=0,6$

C: الفريق يربح $p(C)=0,88$

يربح الفريق اذا ربحت سميرة أو ربح طارق اذا

$C=S\cup T$ ومنه $p(C)=p(S\cup T)=0,88$

لدينا: $p(S\cup T)=p(S)+p(T)-p(S\cap T)$

ومنه $p(S\cap T)=p(S)+p(T)-\underbrace{p(S\cup T)}_{=0,42}$

من جهة أخرى:

$p(T)\cdot p(S)=0,42$

$\Leftrightarrow p(S\cap T)=p(T)\cdot p(S)=0,42$

اذن S و T مستقلان وهذا معناه سميرة وطارق يلعبان بصفة مستقلة.

ملاحظة: اذا كان A و B مستقلان فإن:

- $\bar{A}$ و $\bar{B}$ مستقلان
- A و $\bar{B}$ مستقلان
- B و $\bar{A}$ مستقلان