

الاهتزازات

الباب الأول: الاهتزازات الحرة ذات درجة واحدة من الحرية

1.1 مقدمة

عدد درجات الحرية لأنظام معين هو عدد المتغيرات المستقلة اللازمة لوصف الحركة لكل جسيم من هذا النظام. الجسيم الواحد الحر الذي يتحرك في الفضاء له 3 درجات من الحرية، و الاختيار المناسب للإحداثيات المعممة يتكون من الإحداثيات الكارتيزية (x,y,z) للجسيم بالنسبة لمعلم ثابت. عندما يتحرك الجسيم في الفضاء، وضعيته تكون بدلالة الزمن. كل جسم الصلب غير مقيد يملك ست درجات من الحرية، ثلاث إحداثيات لمركز الكتلة ودورانه الزاوي حول ثلاث محاور للإحداثيات.

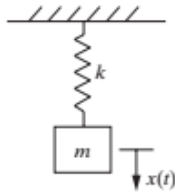
كل مجموعة من N إحداثيات مستقلة حركيا وضرورية لوصف حركة النظام تسمى مجموعة الإحداثيات المعممة. عدد درجات الحرية المستعملة في تحليل نظام وحيدة، لكن اختيار الإحداثيات المستعملة لوصف نظام ليست وحيدة. الإحداثيات المعممة هي المتغيرات غير المتعلقة بمسألة اهتزازية هي دوال للمتغير المستقل، الزمن.

أمثلة:

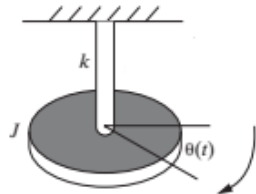
أنظمة لدرجة واحدة من الحرية (الشكل 1.1)

الإحداثيات المعممة:

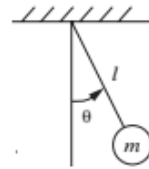
- أ- x (نظام كتلة- نابض)
- ب- θ (كتلة - نابض الفتل)
- ج- θ (نواس بسيط)
- د- q (دائرة LC) الشكل 1.3 أنظمة ذات ثلاث (أ) وأربعة (ب) درجات من الحرية



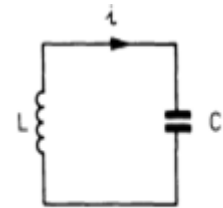
(أ)



(ب)



(ج)



(د)

الشكل 1.1

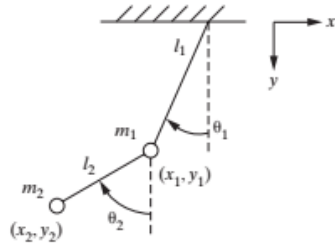
أنظمة ذات درجتين من الحرية (الشكل 2.1)

الإحداثيات المعممة:

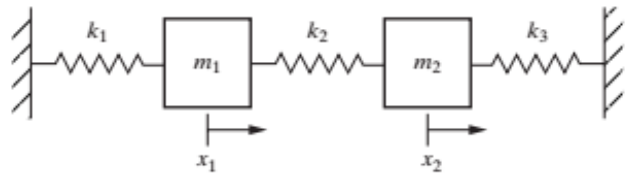
أ- x_1 و x_2

ب و ج- θ_1 و θ_2

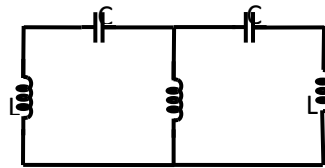
د- q_1 , q_2



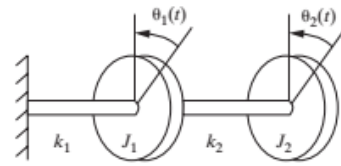
(ب)



(أ)



(د)



(ج)

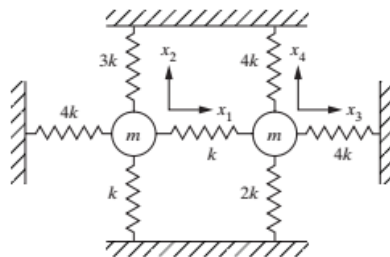
الشكل 2.1

أنظمة مهتزة ذات: (أ) ثلاث درجات من الحرية، (ب) أربع درجات من الحرية (الشكل 3.1)

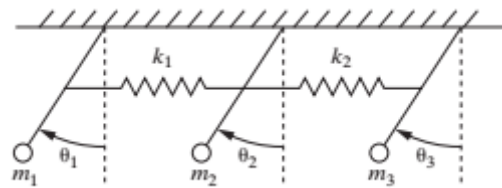
الإحداثيات المعممة:

أ- $\theta_1, \theta_2, \theta_3$

ب- x_1, x_2, x_3, x_4



(ب)



(أ)

الشكل 3.1

كما سيتضح لاحقاً، وجود أي اهتزاز يعني وجود قوة مرنة وقوة عطالة.

كل عنصر من المادة له كتلة وقابل للضغط لعدة درجات، إذا كل عنصر من المادة هو نموذج لهزاز لأن له كتلة ومرونة. تحت تأثير قوة F يخضع قضيب معدني طوله l ومساحة مقطعه S لاستطالة Δl ، إذا كانت الاستطالة صغيرة بالنسبة لطول القضيب dl ، فالعلاقة استطالة- قوة هي علاقة خطية، وتعطى بقانون هوك الذي يكون بالشكل التالي:

$$1.1 \quad \sigma = E \varepsilon$$

حيث σ هي الضغط (القوة على وحدة المساحة) :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

ε هو التشوه (الاستطالة النسبية):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

E عامل يونغ (عامل المرونة)

وحدة الضغط وعامل يونغ هو الباسكال ، أما التشوه فليس له وحدة ويحسب بالنسبة المئوية %

عامل يونغ يتعلق بمادة الجسم المدروس، ويعبر عن مقاومته للتشوه

المادة	عامل يونغ (جيغا نيوتن / م ²)
ألومنيوم	62
فولاذ	210
الإسمنت	20
البلاستيك	2
المطاط	2,2 إلى 2,7
الخشب	11 إلى 13
أنبوب الكربون النانوي	1000
فضة	78
رخام	61 إلى 90

الجدول 1.1

قوى وعزوم النوابض والقضبان

النابض الخطي: قوة النابض الخطي هي قوة إرجاع ، سعتها في حالة التشوهات الصغيرة متناسبة مع الاستطالة

$$2.1 \quad F = -kx$$

حيث k و x هما على التوالي صلابة و استطالة النابض.



شكل 4.1 : نابض

نابض الفتل: الزوج M الناتج عن نابض الفتل هو مزدوجة إرجاع متناسبة مع الانحراف الزاوي θ :

$$M = -C\theta$$

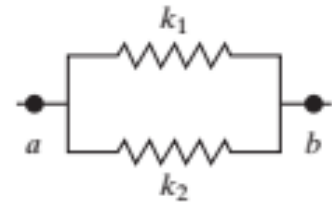
حيث: C هو ثابت الفتل



الشكل 5.1: نابض فتل

تركيب النوابض

نوابض على التوازي: يتصرف نظام نوابض متوازية مثل نابض وحيد صلابته تساوي مجموع صلابات النوابض التي يتكون منها النظام.



الشكل 6.1 : نابضين على التوازي

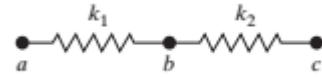
4.1

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_N$$

نوابض على التسلسل: يتصرف نظام نوابض على التسلسل مثل نابض وحيد مرونته (عكس صلابته) تساوي مجموع مرونة النوابض التي تكون النظام:

5.1

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_N}$$



شكل 7.1 نابضين على التسلسل

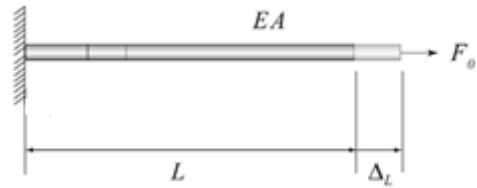
قضبان مرنة

لنعتبر قضيبا مرنا منتظم الشكل طولهُ L ومقطعه A ، وكتلته مهملة بالنسبة للكتل المرتبطة بها. القضيب المعدني يمكن تعديله مثل نابض مرن مكافئ صلابته مرتبطة بطبيعة الضغط الذي تخضع له.

إذا كان لدينا نمدد و انقباض مثل الذي في الشكل 8.1 ، فالصلابة المكافئة تعطى بالعلاقة:

6.1

$$k = \frac{EA}{L}$$

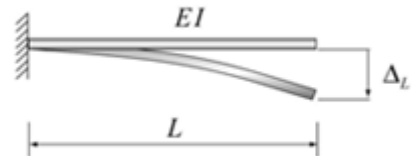


الشكل 8.1 قضيب خاضع لسحب محوري

إذا كان القضيب ذو عزم العطالة I خاضعا لانحناء (الشكل 9.1) ، فالصلابته المكافئة تعطى بالعلاقة التالية:

7.1

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

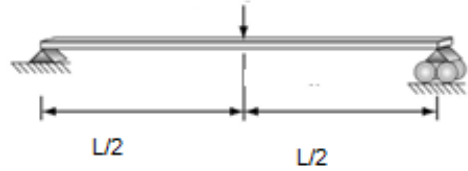


الشكل 9.1 : (a) قضيب خاضع لانحناء

بالنسبة لقضيب (عارضة) مدعمة ببساطة خاضعة لثقل نقطي عرضي في منتصفه (الشكل 1.10)، الصلابة المكافئة لهذه البنية هي:

$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

1.8



الشكل 1.10: عارضة مدعمة بسيطة لثقل نقطي عرضي

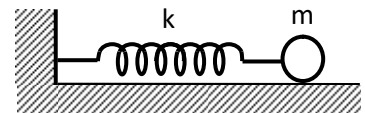
1.2 الاهتزازات الحرة غير المتخامدة:

عمليا كل الأنظمة لها القدرة على الاهتزاز ، فالذرات في الجزيئات و الأجسام الصلبة تهتز بشكل دائم. والأنظمة العيانية الصلبة أو السائلة أو الغازية لها كتلتها الخاصة وصلابتها ويمكن نمذجتها كنظام كتلة – نابض حيث m تمثل عطالة النظام و النابض قوة إرجاع مرنة.

النظام كتلة – نابض:

ليكن النظام الميكانيكي للشكل 1.11 حيث m كتلة نقطية والنابض ذو الصلابة k وذو كتلة مهملة

فليكن النظام الميكانيكي في الشكل (1.11) حيث m كتلة نقطية ، والنابض صلابته k وكتلته مهملة.



الشكل 1.11 النظام كتلة – نابض

بتطبيق علاقة نيوتن، نحصل على:

9.1

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = m \vec{\gamma}$$

حيث P ، F و R هم على التوالي الوزن وقوة إرجاع النابض و رد فعل الأرض، وعند إسقاط المعادلة على المحور Ox ، نحصل على: $-kx = m\ddot{x}$

وتكتب المعادلة التفاضلية حينئذ على الشكل:

10.1

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

وهي معادلة من الشكل

11.1

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

حيث:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

و

12.1

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

معادلة الحركة:

حركة نابض حر غير متخامد تحكمه المعادلة التفاضلية التالية:

13.1

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$$

حيث S تمثل الإحداثية المعممة، وتقبل الحل التالي:

14.1

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

خواص الحركة:

a: هي السعة وتمثل الاستطالة القصوى للجسم أثناء الحركة

T₀: هو دور الحركة ويمثل مدة اهتزاز واحد

15.1

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ω₀ هو نبض الحركة أو السرعة الزاويةو $\omega_0 t + \phi$: هو طور الحركة

16.1

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

17.1

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

f₀ هو تواتر الاهتزازات، وهو عدد الاهتزازات في الثانية.

ϕ : هو الطور الابتدائي للحركة

قيم السعة والطور الابتدائي يتم تحديدها من الشروط الابتدائية للحركة.

إذا مثلنا الموقع والسرعة الابتدائية على التوالي بالقيم:

$$v(0)=v_0 \text{ و } s(0)=s_0$$

وعوضناها في المعادلة 10.1، نحصل على :

18.1

$$a \cos(\phi) = s_0$$

و

19.1

$$a \sin(\phi) = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

عندما نحسب $(1.14)^2 + (1.15)^2$ و $(1.14)/(1.15)$ ، نستنتج السعة والطور الابتدائي:

20.1

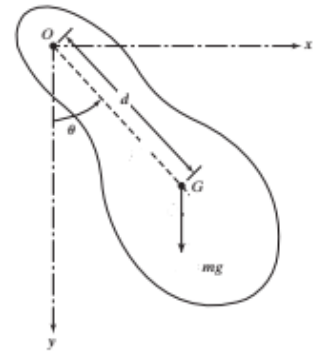
$$a = \sqrt{s_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\phi = -\arctg\left(\frac{v_0}{s_0\omega_0}\right)$$

3.1 نماذج بسيطة للهزازات

(أ) النواس ذو الطول L و عزم العطالة J :

ليكن النواس في الشكل (1.12)



الشكل 12.1 : نواس

بما أن مجموع عزوم القوى الخارجية تساوي جداء عزم العطالة في التسارع الزاوي

21.1

$$-mgd \sin(\theta) = J_o \ddot{\theta}$$

22.1

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_o} \sin(\theta) = 0$$

في حالة اهتزازات صغيرة $\sin(\theta) \approx \theta$ ، نحصل على معادلة تفاضلية من نوع المعادلة (1.9):

23.1

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_o} \theta = 0$$

الحركة توافقية دورها T_0 :

24.1

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

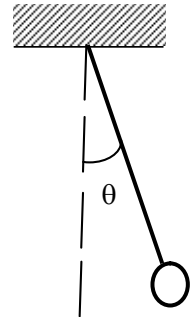
25.1

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}$$

في حالة نواس بسيط: $J = md^2$ ، يساوي الدور حينئذ:

26.1

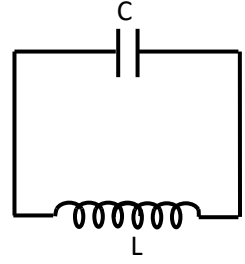
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}$$



الشكل 13.1 نواس بسيط

(ب) الدارة LC:

لتكن الدارة الكهربائية المكونة من وشيعة ذات تحريض ذاتي L ومقاومة مهملة ومكثفة ذات سعة C تحمل شحنة ابتدائية q_0 . نريد حساب تغير التوتر بين قطبي المكثفة.



الشكل 14.1: دائرة LC

بتطبيق قانون كيرشوف:

$$1.27 \quad v_L + v_C = 0$$

التوتر بين قطبي الوشيجة هو:

$$1.28 \quad v_L = L \frac{di}{dt}$$

والتوتر بين قطبي المكثفة:

$$1.29 \quad v_C = \frac{q}{C}$$

المعادلة (1.27) تصبح:

$$1.30 \quad L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

علما بأن:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = Cv_c \text{ و}$$

إذا:

$$1.31 \quad \ddot{v}_c + \frac{1}{LC} v_c = 0$$

هذه المعادلة تقبل الحل التالي:

$$1.32 \quad v_c = V_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

1.33 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ والنابض يساوي:

والدور يساوي: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

(ج) النظام كتلة- نابض ذات كتلة خطية μ :

لنأخذ نظام الشكل (11.1)، حيث يكون النابض متجانسا وكتلته m وطوله l . كتلته الخطية تساوي:

$$\mu = \frac{m}{l}$$

العنصر ds من الإحداثية s كتلته $dm = \mu ds$

$$\frac{s}{l}x \text{ واستطالته}$$

وطاقته الحركية إذا هي:

34.1

$$dE_{cm} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} \mu ds \left(\frac{s}{l} \dot{x} \right)^2$$

$$dE_{cm} = \frac{1}{2} \frac{m}{l^3} \dot{x}^2 s^2 ds$$

الطاقة الحركية الكلية هي:

35.1

$$E_{cm} = \frac{1}{2} \frac{m}{l^3} \dot{x}^2 \int_0^l s^2 ds = \frac{1}{6} m \dot{x}^2$$

الطاقة الكلية هي مجموع الطاقة الحركية للنابض والطاقة الكامنة له والطاقة الحركية للكتلة:

$$E = E_{cm} + E_p + E_{cM}$$

لدينا إذا:

36.1

$$E = \frac{1}{6} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

37.1

$$E = \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{3} m \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

بما أن الطاقة هي ثابتة للحركة: $\frac{dE}{dt} = 0$

فإن:

$$38.1 \quad \left(M + \frac{1}{3}m \right) \ddot{x} + kx = 0$$

نحصل على المعادلة التفاضلية للحركة:

$$39.1 \quad \ddot{x} + \frac{k}{\left(M + \frac{1}{3}m \right)} x = 0$$

وحينذلك، النبض يساوي:

$$40.1 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\left(M + \frac{1}{3}m \right)}}$$

لأخذ كتلة النابض بالاعتبار نأخذ نظاما حيث نعوض الكتلة M بالكتلة $M' : M' = M + \frac{1}{3}m$

حيث m هي كتلة النابض.

1.4 ميزان الطاقة:

الطاقة الكلية E لهزاز حر غير متخامد هي ثابتة للحركة، وهي مجموع طاقته الحركية E_c وطاقته الكامنة E_p . وحسب نموذج الهزاز: نابض- كتلة، لدينا صيغة الطاقة الحركية:

$$41.1 \quad E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

وصيغة الطاقة الكامنة:

$$42.1 \quad E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

علما بأن: $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$ و $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

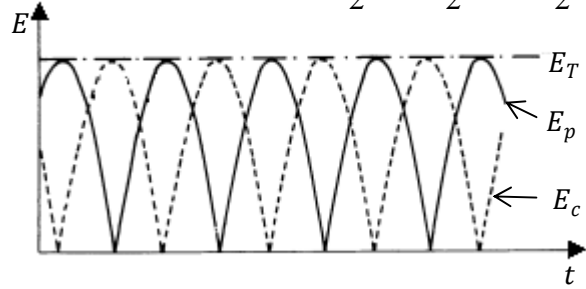
وبالتعويض في المعادلات السابقة، نحصل على العبارات الزمنية للطاقة الحركية والطاقة الكامنة:

$$43.1 \quad E_c = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$44.1 \quad E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$

الطاقة الكلية E:

$$45.1 \quad E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} ka^2$$



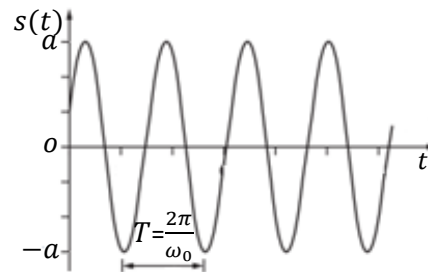
الشكل 15.1: الطاقة الحركية E_c ممثلة بالخط المنقطع والطاقة الكامنة E_p ممثلة بالخط المتصل

منحنيات E_c و E_p هي في حالة تربيع، على سبيل المثال، إذا كان في الشروط الابتدائية $\phi = 0$ (حيث السرعة الابتدائية منعدمة والاستطالة قصوى)، حينئذ تكون الطاقة الكامنة قصوى والطاقة الحركية منعدمة، الانتقال يتم إذا من الطاقة الكامنة إلى الطاقة الحركية بحيث عند نقطة التوازن تصبح الطاقة الكامنة منعدمة والطاقة الحركية قصوى، وانطلاقاً من هذه النقطة، تنقص الطاقة الحركية وتزيد الطاقة الكامنة.

1.5 تمثيل الحركة التوافقية البسيطة:

1.1.5 التمثيل البياني

يتم تمثيل المعادلة الزمنية $s(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$ بيانياً في نظام محاور (Ot, Ox)



الشكل 16.1 : التمثيل البياني للمتغير s

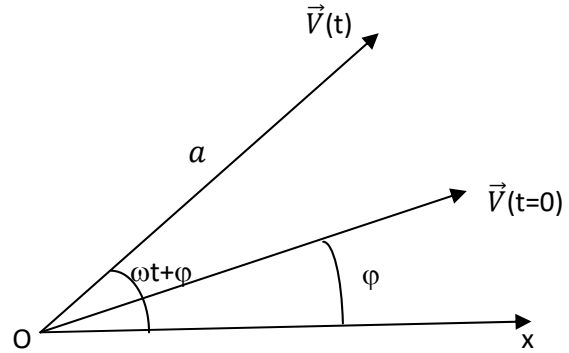
2.1.5 التمثيل الشعاعي:

الاهتزاز التوافقي يتم تمثيله بشعاع \vec{V} طويلته تساوي سعة الاهتزاز و جهته بالنسبة لمحور مرجعي: طور الاهتزاز

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \vec{V} : \|\vec{V}\| = a, \langle \vec{V}, Ox \rangle = \omega_0 t + \varphi$$

تمثيل فرينيل حالة خاصة للتمثيل الشعاعي حيث الزاوية بالنسبة لمحور مرجعي يساوي الطور الابتدائي للاهتزاز:

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \vec{V} : \|\vec{V}\| = a, \langle \vec{V}, Ox \rangle = \varphi$$



الشكل 17.1: التمثيل الشعاعي للمتغير وتمثيل فرينيل ($\vec{V}(t = 0)$)

3.1.5 التمثيل بالأعداد المركبة:

هذا التمثيل هو الأكثر استعمالاً، وذلك لسهولة استعمال الأعداد المركبة بالنسبة للدوال المثلثية. في هذه الحالة، الدالة:

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ يتم تمثيلها بعدد مركب طويلته } p \text{ تساوي السعة } a \text{ وعمدته } \theta \text{ تساوي طور } s.$$

46.1

$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \bar{s}(t) = a e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

التمثيل السابق يأخذ الشكل التالي:

$$\bar{s}(t) = \bar{a} e^{i\omega t}$$

47.1

$$\bar{a} = a e^{i\varphi} \text{ حيث}$$

و \bar{a} هي السعة المركبة.

4.1.5 مخطط الطور:

مستوى الطور هو المستوى (O, s, \bar{s}) حيث الفاصلة هي الإحداثية المعممة s والترتيب هو السرعة المعممة \bar{s}

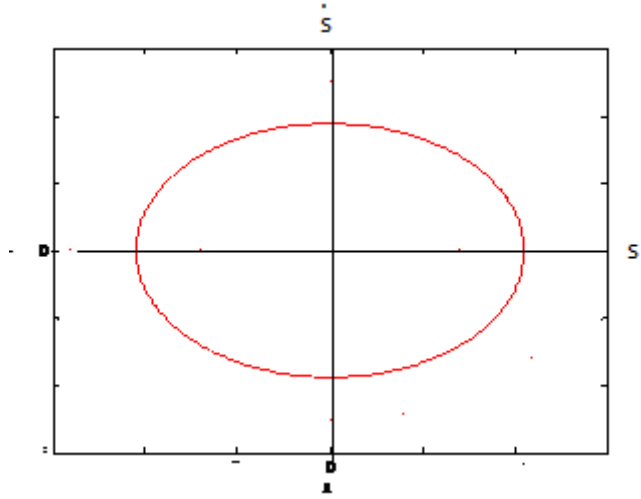
$$s(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{s} = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \phi)$$

48.1

$$\left(\frac{s}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{s}}{\omega_0 a}\right)^2 = 1$$

في مستوى الطور، الدالة التوافقية البسيطة s يتم تمثيلها بقطع ناقص محاوره الرئيسية OX و OY أطوالها على التوالي a و $\omega_0 a$.



الشكل 18.1 : مخطط الطور

6.1 تطابق الحركات التوافقية:

1.6.1 الحركات التي لها نفس الاتجاه ونفس النبض:

لتكن حركتان لهما نفس الاتجاه OX ونفس النبض

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{و} \quad x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

نبحث عن الحاصلة $x(t)$ لتطابق هذين الاهتزازين :

$$x = x_1 + x_2$$

وبعد النشر نحصل على:

$$x_1 = A_1 \cos \varphi_1 \cos \omega t - A_1 \sin \varphi_1 \sin \omega t$$

1.49

$$x_2 = A_2 \cos \varphi_2 \cos \omega t - A_2 \sin \varphi_2 \sin \omega t$$

1.50

ومننه:

$$1.51 \quad x_1 + x_2 = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos \omega t - (A_1 \sin \varphi_1 + A_1 \sin \varphi_2) \sin \omega t$$

علما بأن :

$$1.52 \quad A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t$$

و بالمقارنة مع (1.51)، نحصل على:

$$53.1 \quad A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2$$

$$54.1 \quad A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2$$

وتربيع العبارتين السابقتين، وأخذ مجموعهما $(1.53)^2 + (1.54)^2$ ، نحصل على:

$$55.1 \quad A^2 = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2$$

سعة وطور الاهتزاز الحاصل هي :

$$56.1 \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$57.1 \quad \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad \varphi = \arctg \left(\frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \right)$$

نستنتج أن تراكب اهتزازين لهما نفس الاتجاه ولهما نبضين متساويين يعطي اهتزازا جيبيًا: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$

حيث سعته A وطوره ϕ تعطى بالعلاقتين 56.1 و 57.1

2.6.1 الحركات التي لها نفس الاتجاه ولها نبض متقارب:

لتكن حركتين توافقيتين لهما نفس الاتجاه ولها نبض متقارب:

$$\omega_2 \approx \omega_1$$

$$x_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad \text{و} \quad x_1 = A \cos \omega_1 t$$

تتطابق الاهتزازين $x = x_1 + x_2$ ، علما بأن:

$$58.1 \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

يعطي:

59.1

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

نعرف على التوالي الفرق بين النبضين والنبض المتوسط بالعبارتين:

60.1

$$\omega_m = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \quad \text{و} \quad \omega_2 - \omega_1 = \delta\omega$$

معادلة حاصل الحركتين هي إذا:

61.1

$$x = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega_m t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

بما أن النبضين متقاربين، وأن: $\omega_m \gg \delta\omega$ ، فالحركة الحاصلة هي حركة جيبية ذات سعة تتغير جيبيًا.

62.1

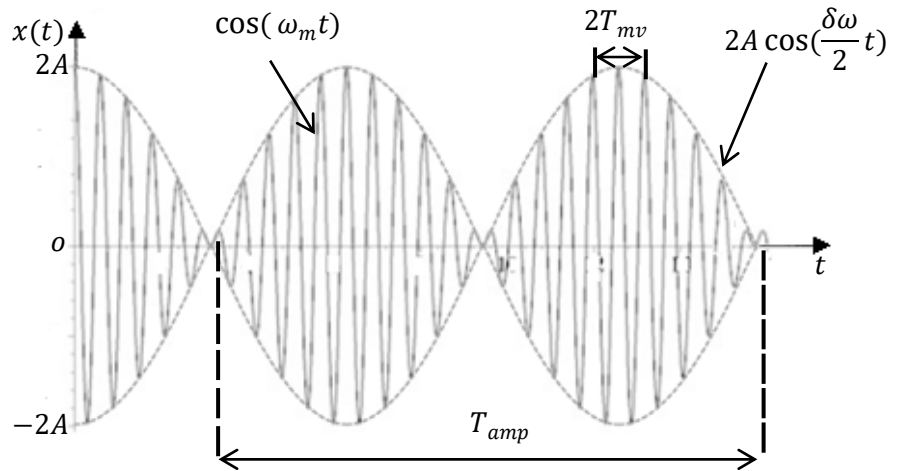
$$x = C(t) \cos\left(\omega_m t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

حيث:

63.1

$$C(t) = 2A \cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

الحركة الحاصلة تم تمثيلها في الشكل 1.19



الشكل 19.1 أ: تطابق حركتين توافقيتين لهما نفس السعة ولهما نبضين متقاربين

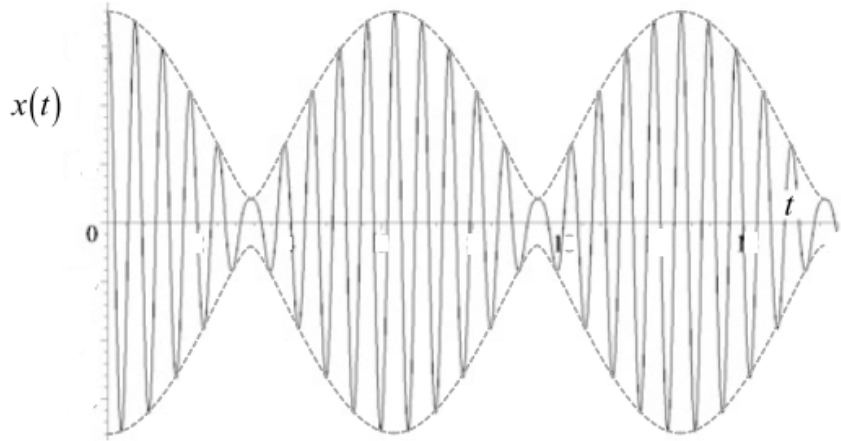
نحصل على ما يسمى حركة ذات خفقات. دور الحركة هو: $T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}$

ودور الخفقات T_b هو نصف الدور T_{amp} للسعة $C(t)$:

$$T_{amp} = \frac{2\pi}{\delta\omega/2} = \frac{4\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}, \quad \omega_{amp} = \frac{2\pi}{T_{amp}} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}$$

$$T_b = \frac{T_{amp}}{2} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}, \quad \omega_b = \frac{2\pi}{T_b} = |\omega_2 - \omega_1|$$

وفي حالة ما إذا كانت سعتي الحركتين الأصليتين مختلفتين، نحصل على تغير $x(t)$ الممثلة في الشكل 1.14 ب:



الشكل 19.1 ب: تتطابق حركتين توفقيتين ذات نبضين متقاربين وسعتين مختلفتين

3.6.1 الحركات التوافقية ذات الاتجاهات المتعامدة:

نحاول إيجاد المحصلة لحركتين توافقيتين ذوات اتجاهين متعامدين : $x(t)$ و $y(t)$

$$x = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad \text{و}$$

الحركات التي لها نفس النبض : $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}$$

$$\cos^2 \omega t = \left(\frac{x}{A_1} \right)^2$$

و بما أن: $\cos^2 \omega t = 1 - \sin^2 \omega t$ ، فإن:

$$\sin^2 \omega t = 1 - \left(\frac{x}{A_1} \right)^2$$

وينشر y ، نحصل على:

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\varphi) \cos(\omega t) - \sin(\varphi) \sin(\omega t)$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \cos(\varphi) \frac{x}{A_1} \right)^2 = \sin^2(\varphi) \sin^2(\omega t)$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \cos(\varphi) \frac{x}{A_1} \right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{A_1} \right)^2 \sin^2(\varphi)$$

$$\left(\frac{x}{A_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{A_2} \right)^2 - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos \varphi = \sin^2(\varphi)$$

64.1

المعادلة (64.1) هي معادلة قطع ناقص، ذات محاور رئيسيه مائلة على المعلم Oxy

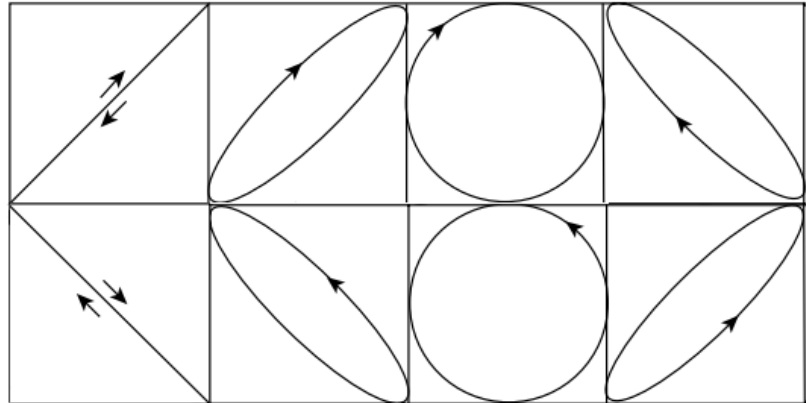
φ

0

$\pi/4$

$\pi/2$

$3\pi/4$



φ :

π

$5\pi/4$

$3\pi/2$

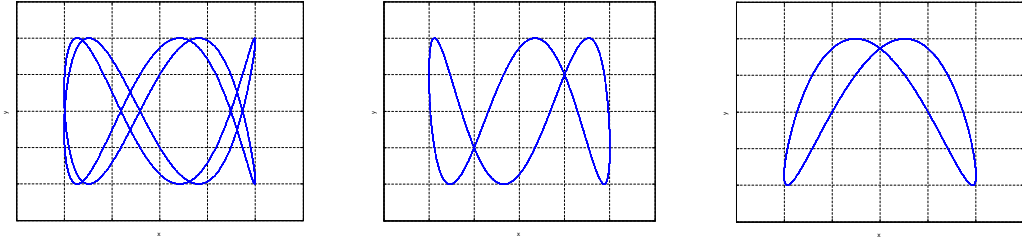
$7\pi/4$

الشكل 20.1

الحركات المختلفة النبض:

نلاحظ حالتين: إذا كانت النبضات قابلة للقياس، أي أن نسبتها تساوي نسبة عددين كاملين $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}$ حيث $n, m \in \mathcal{N}$

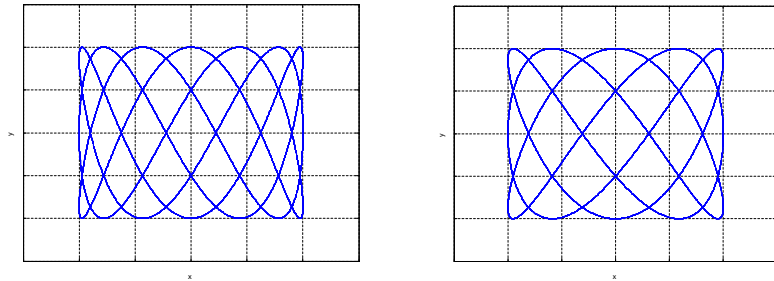
المسار مغلق والمنحنيات الناتجة تسمى أشكال ليساجو ، الرسومات الظاهرة في الشكل 20.1، كل واحدة بنسبة معينة $\frac{n}{m}$



5/2

3

2



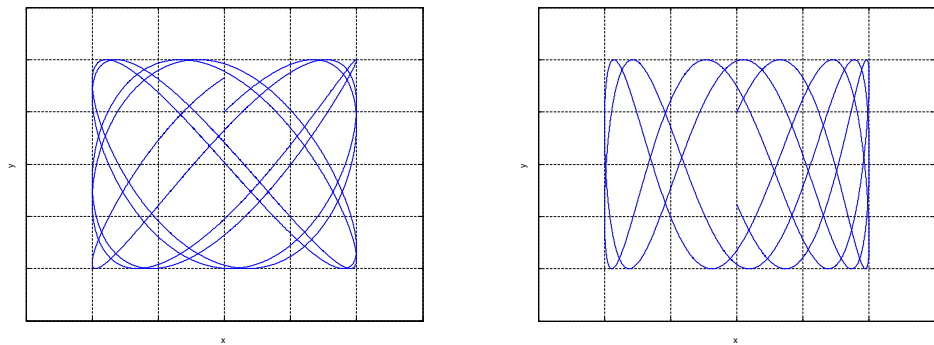
7/3

5/3

الشكل 21.1: أشكال ليساجو بنسب معينة مختلفة n/m و $\varphi = \frac{\pi}{3}$

أمثلة لأشكال ليساجو ناتجة عن نسب النبضات. 2, 3, 5/2, 5/3 et 7/3.

الحالة الثانية: عندما تكون النبضات غير قابلة للقياس، فالمسار يكون مفتوحا.



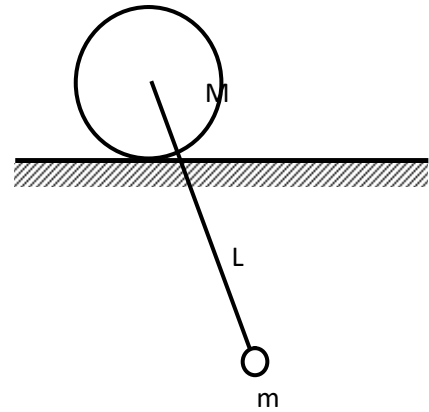
$\sqrt{2}$ π

الشكل 22.1: أشكال ليساجو لنبضات بنسب π ، $\sqrt{2}$

1.7 تمارين محلولة:

التمرين الأول:

نربط قضيبا صلبا كتلته مهملة وطوله L بإحكام في أسطوانة كتلتها M ونصف قطرها R ، ونعلق في طرفه السفلي كتلة نقطية m ، ونحاول دراسة الحركة ضعيفة السعة لهذا النظام.



الشكل 1

الحل:

المحور اللحظي للدوران هو النقطة C ، نقطة تماس الاسطوانة مع الأرض، حيث السرعة اللحظية منعدمة، لدينا إذا:

$$\sum M_C = J_C \ddot{\theta} \quad \text{حيث} \quad M_C = -mgl \sin \theta$$

J_C هو عزم عطالة الأسطوانة والكتلة m بالنسبة للنقطة C ، وهو - حسب نظرية هوغنز - عزم القرص بالنسبة للنقطة

$$O: \frac{1}{2} MR^2$$

زائد كتلة القرص جداء مربع المسافة بين C و O إضافة إلى عزم عطالة الكتلة m بالنسبة للنقطة C :

$$mCA^2$$

$$J_C = \left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2 \right) + mCA^2$$

$$\vec{CA} = \vec{CO} + \vec{OA} \quad \text{لدينا:}$$

$$CA^2 = R^2 + l^2 + 2Rl \cos \theta \quad \text{إذا}$$

عزم القوى الخارجية يختزل في عزم إرجاع الثقل P : $M_C = -mgl \sin \theta$

وبما أن الاهتزازات صغيرة: $\sin \theta \approx \theta$ و $\cos \theta \approx 1$

$$CA^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \quad \text{ومنه}$$

$$M_C = -mgl \theta \quad \text{و} \quad CA^2 = (l - R)^2 \quad \text{إذا}$$

$$-mgl \theta = \left(\frac{3}{2} MR^2 + m(l - R)^2 \right) \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{\left(\frac{3}{2} MR^2 + m(l - R)^2 \right)} \theta = 0$$

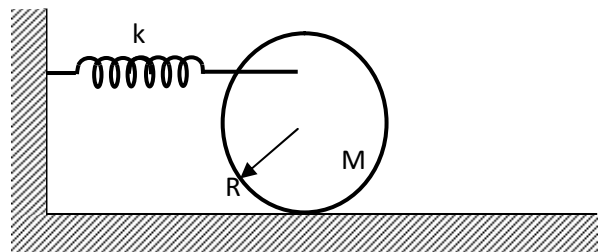
المعادلة التفاضلية هي: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

إذا لدينا حركة توافقية دورها:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2} MR^2 + m(l - R)^2 \right)}{mgl}}$$

التمرين 2:

ليكن النظام الميكانيكي للشكل 2 ، حيث الاسطوانة ذات الكتلة M المرتبطة بنابض صلابته K وكتلته مهملة، تمشي بدون انزلاق ، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة الأسطوانة، واستنتاج الحل.



الشكل: 2

الحل:

عبارة الطاقة الحركية مكونة من طرفين: الطرف الأول يمثل انتقال مركز الكتلة ، والطرف الثاني يمثل الدوران حول مركز الكتلة.

$$E_c = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} J_o \dot{\theta}^2$$

وبما أن الحركة تتم دون انزلاق، إذا: $x = R\theta$ ، ومنه: $v = R\dot{\theta}$

$$J_o = \frac{1}{2} MR^2 \text{ : عزم عطالة الاسطوانة المتجانسة هو :}$$

مما يعني أن:

$$E_c = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k (R+a)^2 \theta^2 \text{ : و بالنسبة للاهتزازات صغيرة:}$$

$$L = E_c - E_p \text{ : اللاغرانجي هو :}$$

$$L = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k (R+a)^2 \theta^2 \text{ : إذا:}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \text{ : وبتطبيق معادلة لاغرانج:}$$

نستنتج معادلة الحركة:

$$\frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + k (R+a)^2 \theta = 0$$

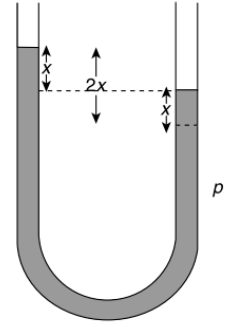
$$\ddot{\theta} + \frac{2k (R+a)^2}{3MR^2} \theta = 0 \text{ : ومنه:}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2k (R+a)^2}} \text{ : ولدينا اهتزازات توافقية دورها:}$$

التمرين 3:

ليكن مقياس ضغط السوائل الممثل في الشكل (25.1)، عمود السائل طوله L وكثافته ρ يهتز في أنبوب على شكل

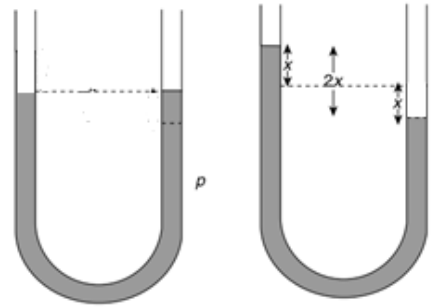
U ومقطعه S . المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الصغيرة للعمود.



الشكل 3

الحل:

إذا تمت إزاحة السائل عن موضع التوازن، يخضع العمود لقوة إرجاع بسبب الكتلة الزائدة الناتجة عن فرق مستوى السائل بين فرعي الأنبوب.



وبتطبيق قانون نيوتن: $\sum \vec{F} = m \vec{\gamma}$

حيث F هي قوة إرجاع الوزن الناتج عن الكتلة m' ،

$$F_x = -m'g$$

حيث قوة الإرجاع و كتلة العمود هما على التوالي:

$$m = lA \rho \quad \text{و} \quad F = -2Axg \rho$$

وعند تطبيق قانون نيوتن، نحصل على :

$$-2Axg \rho = lA \rho \ddot{x}$$

وبما أن : $m' = 2xS \rho$ ، فالكتلة الكلية للعمود هي : $m = lS \rho$

وبالتعويض في قانون نيوتن: $-2xS \rho g = lS \rho \ddot{x}$

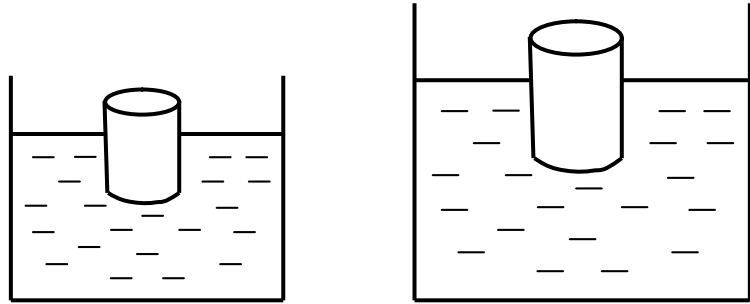
ومعادلة الحركة هي: $-2xS \rho g = lS \rho \ddot{x}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}} \text{ : ونبضها يساوي}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \text{ : ودور الاهتزازات هو}$$

التمرين 4

أنبوب من الخشب الثقيل مقطعه A و كتلته الحجمية ρ ، مغمور نصفيا في حمام مائي كتلته الحجمية ρ_0 ، مثل ما هو ممثل في الشكل 4، يتم دفع الأنبوب نحو الأسفل ثم إطلاقه، المطلوب إيجاد التواتر الطبيعي للإهتزاز.



الشكل 4

عند التوازن، لدينا: $P - F_a = 0$

حيث F_a هي قوة أخميدس: $F_a = Ax_0\rho g$

$$mg - Ax_0\rho_0g = 0$$

$$m = Ah\rho$$

$$Ah\rho g - Ax_0\rho_0g = 0$$

$$x_0 = \frac{\rho}{\rho_0}h$$

وبتطبيق قانون نيوتن، نحصل على المعادلة:

$$mg - A(x_0 + x)\rho_0g = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{A\rho_0g}{m}x = 0$$

وبالتعويض m بقيمتها، نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{\rho_0g}{\rho h}x = 0$$

والنبض يساوي:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_0 g}{\rho h}}$$

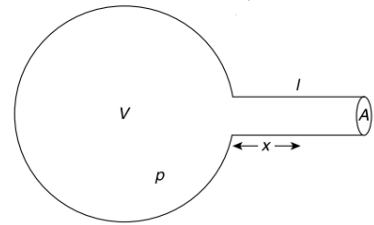
التمرين 5

لتكن قارورة كروية حجمها V ، والجزء الأنبوبي مقطعا A وطولها L القارورة تحتوي على غاز كثافته ρ و عامل القابلية للانضغاط لديه κ ، و p الفارق في الضغط بين داخل وخارج القارورة.

الحل:

نفترض أن حجم الأنبوب أقل بكثير من حجم القارورة ، أي أن: $lA \ll V$

المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الناتجة عن تغير الضغط p



الشكل 5

الحل:

كتلة الغاز $m = lA\rho$ التي يحتويها الأنبوب تخضع لضغط P ولقوة إرجاع طوليتها pA ، وبتطبيق قانون نيوتن، نحصل على:

$$lA\rho\ddot{x} = -Ap$$

يعرف عامل القابلية للانضغاط على أنه النقصان النسبي للحجم على وحدة الضغط:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P}$$

$$\kappa = -\frac{\Delta V}{V} \frac{1}{p}$$

الانتقال x للمكبس في الأنبوب تولد تغير في الحجم : $\Delta V = Ax$ ، إذا:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{Ax}{V}$$

$$\kappa = \frac{1}{p} \frac{Ax}{v}$$

$$lA\rho\ddot{x} = -A \frac{1}{\kappa} \frac{Ax}{v}$$

$$\ddot{x} + \frac{A}{l\rho\kappa v} x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{A}{l\rho\kappa v}}$$

8.1 الاهتزازات الحرة المتخامدة:

أساساً، تتناقص الاهتزازات مع الزمن. هذا التخامد سببه أن الهزاز العياني مرتبط دائماً بمحيطه ولو يسيراً، مما يجعل الطاقة الابتدائية للاهتزازات تتلاشى تدريجياً.

في كل نظام ، يوجد تبديد للطاقة بسبب الاحتكاكات أو بسبب مفعول جول (المقاومة تحول الطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية)، أو أي آلية لتبادل الطاقة.

في الأنظمة الميكانيكية، ضياع الطاقة يكون غالباً بسبب قوى الاحتكاك، هناك نوعان من الاحتكاك:

الاحتكاك الصلب حيث تكون القوة ثابتة ومعاكسة لجهة الحركة :

$$65.1 \quad \vec{F}_\alpha = -k\vec{u}_v$$

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \text{ حيث } \vec{u}_v \text{ هو شعاع الوحدة لشعاع السرعة}$$

الاحتكاك اللزج سببه مقاومة السائل لحركة الجسم، إذا كان هذا الأخير يتحرك ببطء كاف لمنع تدفق الهواء المحيط به بأخذ شكل تدومي

قوة الاحتكاك تكتب بالشكل التالي:

$$66.1 \quad F_\alpha = -\alpha_1 v - \alpha_2 v^2$$

حيث α_1 و α_2 ثابتين، والإشارة ، والإشارة ناقص تدل على أن القوة عكس اتجاه السرعة

إذا كان v صغير جداً بالنسبة للكسر α_1/α_2

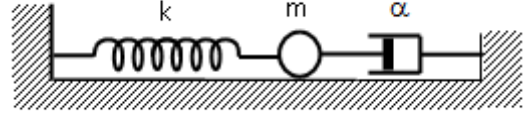
$$67.1 \quad F_\alpha = -\alpha_1 v$$

في الأنظمة الميكانيكية، يتم تمثيل القوة F_α بجهاز تخامد عامل تخامده α



مثال نظام كتلة - نابض متخامد:

نأخذ نظام كتلة - نابض وندخل فيه إحتكاك على شكل جهاز تخامد ثابتته α (الشكل 1.23)، نبحث عن معادلات الحركة.



الشكل 23.1

معادلة لاغرانج لنظام ذو درجة واحدة من الحرية (ملحق 2) هي:

$$68.1 \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

حيث L هو لاغرانجي النظام المعرف بالعلاقة:

$$69.1 \quad L = E_c - E_p$$

حيث E_c هي الطاقة الحركية للنظام و E_p طاقته الكامنة.

D هي دالة التبديد:

$$70.1 \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

حيث اللاغرانجي ودالة التبديد، لهما على التوالي العبارتين:

$$71.1 \quad L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \quad \text{و}$$

المعادلة 1.71 نكتب إذا:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

وبالتقسيم على m ، يصبح لدينا:

$$72.1 \quad \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

نحصل حينها على المعادلة بالشكل التالي:

$$73.1 \quad \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} \text{ حيث:}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ و}$$

1.8.1 معادلة الحركة:

حركة الهزاز الحر المتخامد تحكمه المعادلة التالية:

$$74.1 \quad \ddot{s} + 2\lambda\dot{s} + \omega_0^2s = 0$$

عندما نبحث على حل من الشكل: e^{pt}

$$75.1 \quad p^2 + 2\lambda p + \omega_0^2 = 0$$

نحصل على المعادلة الكيفية التالية:

الحلول تتوقف على القيم النسبية لكل من λ و ω_0

عندنا ثلاث حالات:

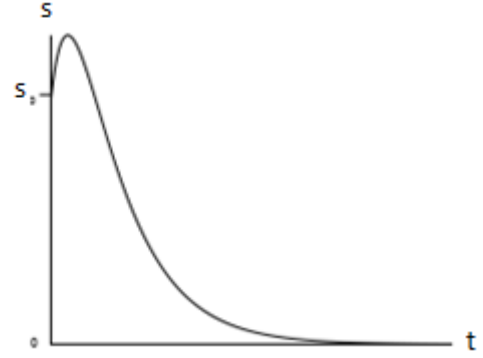
الحالة الأولى: $\lambda > \omega_0$

وهي حالة توافق احتكاكا كبيرا:

$$76.1 \quad p_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

$$77.1 \quad s(t) = A_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

التخامد قوي، مما يعني أن النظام يتجه نحو وضعية توازن بدون اهتزازات، في هذه الحالة الحركة لا دورية



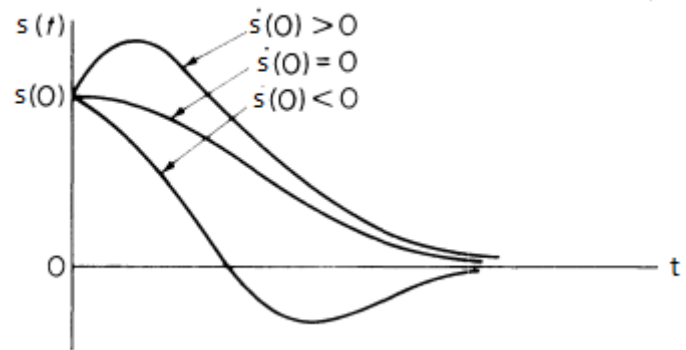
الشكل 24.1: نظام لا دوري

الحالة الثانية: $\lambda = \omega_0$

$$s(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\lambda t}$$

78.1

الجملة هنا في نظام حرج. والحركة تتناقص أسياً والعودة إلى حالة التوازن تحدث بسرعة بالمقارنة مع الحركة اللادورية.



الشكل 25.1: نظام حرج لقيم مختلفة من السرعة الابتدائية

الحالة الثالثة: $\lambda < \omega_0$

هذه الحالة توافق تخامدا ضعيفا. الحل هنا جيبي مع تناقص أسياً للسعة.

79.1

$$s(t) = C e^{-\lambda t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \phi)$$

80.1

$$s(t) = C e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$$

حيث يسمى ω نبض وهمي

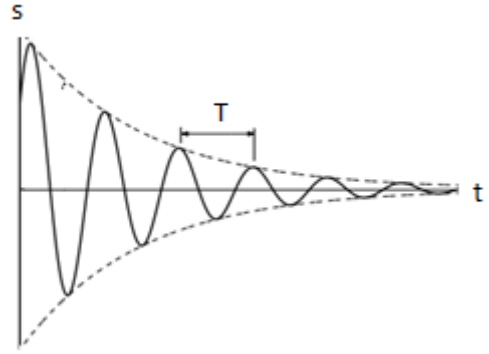
81.1

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

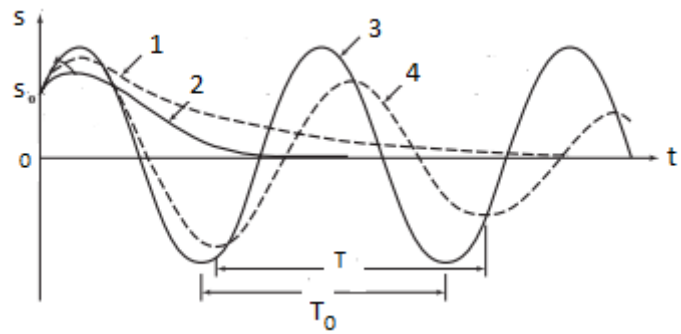
الحركة ليست دورية رياضياً، بل دورية وهما ، وخلافا للحالات السابقة، نحصل على اهتزازات ذات دور وهمي:

82.1

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

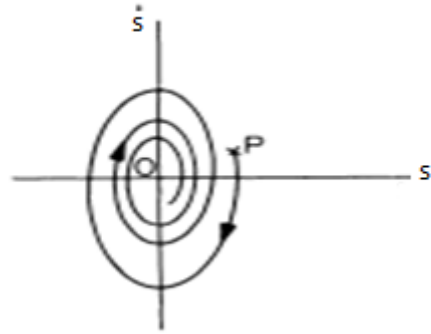


الشكل 26.1: نظام دوري وهما



الشكل 27.1: الحالات الثلاث والحالة غير المتخامدة (3)

في رسم مستوى الطور، المكان الذي يصف التصرف الاهتزازي لهذا النظام هو عبارة عن دوامة ممثلة في الشكل 28.1، حيث في الرسم البياني هي الحالة الابتدائية للنظام والدوامة مرسومة بخط قطري تدور في اتجاه عقارب الساعة.



الشكل 28.1

2.8.1 مقادير تميز الحركة المتخامدة:

(أ) عامل النوعية Q:

في أغلب الحالات ، درجة التخماد ، عوض أن يكون معرفا بالرمز α ، يتم تعريفه عموما بالرمز Q، الذي عبارته:

83.1

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

نظام شبه دوري: $Q > 1/2$

نظام حرج: $Q = 1/2$

نظام غير دوري: $Q < 1/2$

Q ليس له بعد، إذ هو النسبة بين معدل الاهتزازات ومعدل فقدان الطاقة لكل دورة. الجملة ذات التخماد الضعيف، لديه قيمة λ ، وبذلك Q يكون مرتفعا.

بالنسبة لتطبيقات عديدة، يفضل أن يكون Q مرتفعا، لأننا نتمنى أن تدوم الاهتزازات وقتنا أطول. كذلك ، Q مرتفع يعني أن تناقص الاهتزازات يتم ببطء، بحيث يكون شكل الموجة الحقيقية قريبا من منحنى جيبى مثالي. في حالة اهتزازات بلورة كوارتز التي تحدد وقت الساعة ، Q يساوي تقريبا 100 . لكن في تطبيقات أخرى ، يفضل أن يكون Q ضعيفا ، مثلا عندما يكون تعليق السيارة في حالة اهتزاز، يفضل الركاب أن تتوقف عن الاهتزاز. تعليق السيارة يملك Q يساوي حوالي 1. عند تعديل دارات الراديو، القيمة Q هي قياس للانتقائية، إذ كلما كان Q مرتفعا، كلما كانت الإشارة واضحة. في دارات الراديو الكلاسيكية، قيم Q تساوي حوالي بضعة مئات.

(ب) النقصان اللوغاريتمي δ :

النقصان اللوغاريتمي يمثل القياس على السلم اللوغاريتمي لتناقص السعة خلال دور واحد، ويعرف على أنه النسبة بين سعتين متتاليتين:

$$\delta = \ln\left(\frac{Amp(t)}{Amp(t+T)}\right)$$

84.1

بتعويض السعة بقيمتها عند اللحظة t و $t+T$ ، نحصل على:

$$\delta = \ln\left(\frac{Ce^{-\lambda t}}{Ce^{-\lambda(t+T)}}\right) = \lambda T$$

85.1

القياس التجريبي للنقصان اللوغاريتمي وللنبض الوهمي يسمح بتعيين معامل تخامد النظام. القياس، لمزيد من الدقة، هو

$$\lambda = \frac{\delta}{nT} \quad \text{ونستنتج أن: } \delta = n\lambda T$$

(ج) ثابت الزمن τ

يعرف ثابت الزمن على أنه الزمن اللازم للحصول على تناقص للسعة قدره $1/e$

$$\frac{Ce^{-\lambda(t+\tau)}}{Ce^{-\lambda t}} = \frac{1}{e}$$

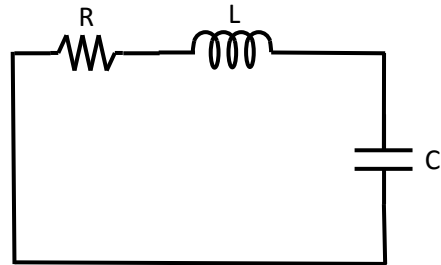
86.1

وبالتبسيط ، نحصل على عبارة ثابت الزمن:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

87.1

الدارة RLC



لتكن الدارة RLC مع سعة لها شحنة ابتدائية q_0 ، المطلوب إيجاد تغير الشحنة في قطبي السعة بدلالة الزمن

لدينا:

مجموع التوترات في الخلية يساوي صفر :

88.1

$$v_R + v_L + v_C = 0$$

89.1

$$Ri + L \frac{di}{dt} + v_C = 0$$

$$q = Cv_c, i = Cv_c$$

90.1

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

91.1

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{و} \quad \lambda = \frac{R}{2L} \quad \text{حيث}$$

تمثيلات ميكانيكية - كهربائية

المعادلة 90.1 تشبه في شكلها معادلة النظام نابض - كتلة ، فقط لدينا الشحنة q بدل الانتقال x ، والوشيعية بدل كتلة، والمقاومة جهاز التخامد، والسعة بدل الصلابة. ويمكننا عمل مماثلة بين النظم المهتزة الكهربائية والميكانيكية وتوسيع هذه المماثلة ، زيادة على المركبات، إلى الطاقات وكذلك القوانين الفيزيائية التي تحكم تغيراتها. الجدول 2.1 يلخص جزءا من هذه المماثلات.

نظام ميكانيكي	نظام كهربائي
كتلة m	وشيعية L
نابض k	مكثفة $(1/C)$
جهاز إخماد α	مقاومة R
موضع x	شحنة q
سرعة v	شدة i
نيوتن: $\sum (F - m\gamma) = 0$	كيرشوف: $\sum u_i = 0$
(عزم J) قوة F	توتر V
طاقة حركية $E_c = (1/2) mv^2$	طاقة مغناطيسية $E_L = (1/2) Li^2$
طاقة كامنة $E_p = (1/2) kx^2$	طاقة كهربائية $E_c = (1/2) q^2/C$

أمثلة:

(1) المطلوب إيجاد تغير التوتر بين قطبي السعة بدلالة الزمن للدائرة RLC المتسلسلة، نعطي :

$$C=0.5\mu F, L=5mH, R=50\Omega$$

بالنسبة للحالة التي يكون فيها: $C=0.5 \cdot 10^{-6} \text{F}$ ، $L=5 \cdot 10^{-3} \text{H}$ ، $R=50\Omega$

لدينا: $\omega_0=2 \cdot 10^4 \text{rd/s}$ ، $\lambda=5 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}$

نستنتج عامل النوعية: $Q=2$

بما أن: $\omega_0 > \lambda$ ($Q > 0.5$)، إذا الحل هو شبه دوري:

$$v_c = V_m e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

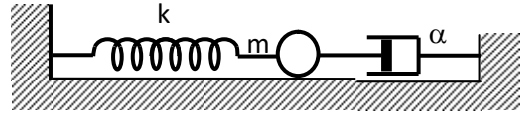
مع نبض شبه دوري: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 19365 \text{rd/s}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.32 \text{ms}$$

وشبه دور:

(2) النظام كتلة- نابض متخامد:

ليكن النظام المكون من جهاز إخماد ذو ثابت α ، وكتلة نقطية m ، ونابض ذو صلابة k ، بتطبيق معادلة لاغرانج، المطلوب إيجاد معادلة الحركة، لدينا: $\alpha=15 \text{Ns/m}$ ، $m=250\text{g}$ ، $k=100\text{N/m}$



معادلة لاغرانج لنظام ذات درجة واحدة، مع إحداثية معممة x ، يأخذ الشكل التالي:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

مع اللاغرانجي ودالة التبديد على الشكل التالي:

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \quad \text{و} \quad L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \quad \text{و}$$

لدينا إذا المعادلة: $m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$ ، وبالتقسيم على m نحصل على:

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{100}{0.25}} = 20 \text{rd / s} \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} = 30 \text{s}^{-1}$$

بما أن $\lambda > \omega_0$ ، فالحركة

$$x(t) = a_1 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + a_2 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}$$

3.8.1 دراسة طاوقية:

في حالة اهتزازات متخامدة لنظام كتلة نابض، لدينا

92.1

$$x = C e^{-\lambda t} \cos(\omega t)$$

عبارة السرعة إذا كان $\lambda \ll \omega$:

93.1

$$\dot{x} = -(\lambda \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) C e^{-\lambda t} \approx -\omega \sin(\omega t) C e^{-\lambda t}$$

وفي هذه الحالة، الطاقة الكلية لهذا النظام هي:

94.1

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} kC^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} m\omega^2 C^2 e^{-2\lambda t} \sin^2(\omega t)$$

لدينا: $m\omega^2 = k$

95.1

$$E = \frac{1}{2} kC^2 e^{-2\lambda t}$$

عند اللحظة t :

96.1

$$E(t=0) = E_0 = \frac{1}{2} kC^2$$

97.1

$$E = E_0 e^{-2\lambda t} \quad \text{الطاقة هي إذا:}$$

بالنسبة للحظة: $t = 1/2\lambda$ لدينا:

$$\frac{E}{E_0} = e^{-1}$$

وعند اللحظة: $t = \tau$ ، لدينا تناقص للطاقة بالنسبة للطاقة الابتدائية هي:

98.1

$$\frac{E}{E_0} = e^{-2}$$

7.8.1 دراسة الاحتكاك الصلب:

ليكن النظام الآتي حيث تخضع الكتلة m ، حركتها في المستوى، إلى قوة احتكاك صلب f_α . نفترض أن الكتلة، عند اللحظة $t=0$ ، تبتعد عن وضعية توازنها بالمسافة X_m ، وأنها تترك بدون سرعة ابتدائية.

قوة الاحتكاك الصلب f_α لها طولية ثابتة واتجاه معاكس لاتجاه الحركة. معادلة الحركة تكتب إذا كالاتي:

99.1

$$m\ddot{x} = -kx \pm f_\alpha$$

بالنسبة لنصف الدور الأول، المعادلة هي:

100.1

$$m\ddot{x} = -kx + f_\alpha$$

101.1

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \left(x - \frac{f_\alpha}{k} \right) = 0$$

102.1

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{f_\alpha}{k}$$

103.1

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{f_\alpha}{k}$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار الظروف الابتدائية $x(0) = X_m$ و $v(0) = 0$ ، لدينا إذا:

104.1

$$a \cos \varphi + \frac{f_\alpha}{k} = X_m$$

105.1

$$-\omega_0 a \sin \varphi = 0 \quad \text{و}$$

106.1

$$x = \left(X_m - \frac{f_\alpha}{k} \right) \cos \omega_0 t + \frac{f_\alpha}{k} \quad \text{إذا:}$$

في نهاية نصف الدور الأول، الفاصلة X سالبة:

107.1

$$x\left(\frac{T}{2}\right) = -\left(X_m - 2\frac{f_\alpha}{k} \right)$$

السعة نقصت بالمقدار $2f$

$$108.1 \quad x\left(\frac{T}{2}\right) = 2f - X_m$$

بالنسبة لنصف الدور الثاني، المعادلة هي:

$$109.1 \quad m\ddot{x} = -kx - f_\alpha$$

$$106.1 \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{f_\alpha}{k}$$

$$107.1 \quad x = a' \cos(\omega_0 t + \varphi') - \frac{f_\alpha}{k}$$

علما بأن الحركة في هذه الحالة بدأت في اللحظة $t=T/2$ ، حيث الوضعية الابتدائية:

$$108.1 \quad -(X_m - 2f)$$

والسرعة الابتدائية : $v=0$

ومنه نستنتج قيم الثابتين a' و φ' :

$$109.1 \quad a' = -(X_m - 3f)$$

110.1

$$\varphi' = 0 \quad \text{و} \quad a' = (X_m - 3f)$$

ومنه:

$$111.1 \quad x = (X_m - 3f) \cos \omega t - f$$

ومنه قيمة الاستطالة عند $x=T$: $(X_m - 4f)$

وبهذا نقصت السعة خلال نصف الدور الثاني بمقدار $2f$

لدينا تناقص ثابت خلال كل نصف دور، وبهذا النقصان الدوري يكون بمقدار $4f$

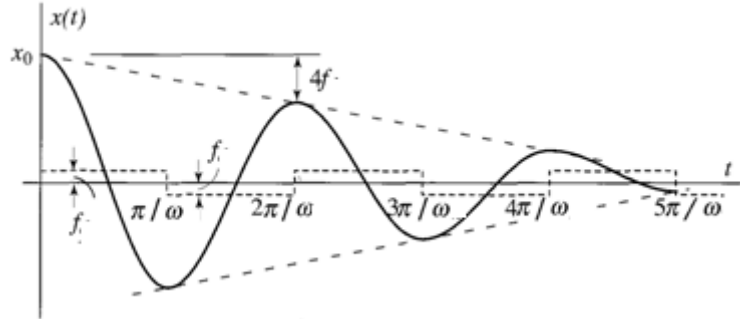
عكس الاحتكاك اللزج، منحنى تناقص السعة ليس أسيا بل خطي، وكذلك فإن توقف الحركة يمكن أن يحدث خارج موضع التوازن الابتدائي بالنسبة لوضعية قصوى حيث قوة الاحتكاك أكبر من قوة الإرجاع النابض.

$$1.105 \quad f_\alpha \geq k(X_m - 2nf)$$

حيث n هو عدد نصف الأدوار

1.106

$$n \geq \frac{1}{2} \left(\frac{X_m}{f} - 1 \right)$$



الشكل 29.1

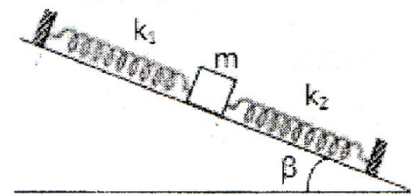
تمارين إضافية:

التمرين الأول:

ليكن النظام الميكانيكي المكون من كتلة ونابضين على سطح مائل.

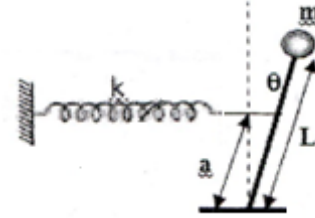
- (1) المطلوب إيجاد تشوه النابضين عند التوازن
- (2) نحرك الكتلة عن موضع توازنها، أوجد معادلة حركة الكتلة.

في الشكل التالي لدينا قضيب كتلته مهملة وفي طرفه كتلة نقطية m ، هذا القضيب مرتبط من طرفه الثابت بنابض صلابته k ، عند التوازن القضيب عمودي والنابض حر، المطلوب إيجاد معادلة حركة هذا النظام وشروط الاهتزاز.



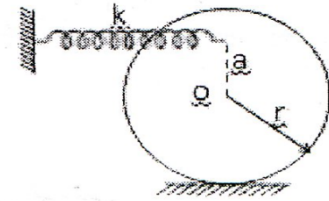
التمرين الثاني:

في الشكل التالي لدينا قضيب كتلته مهملة، في طرفه كتلة نقطية m ، هذا النظام مرتبط بطرف ثابت بواسطة نابض صلابته k ، عند التوازن القضيب عمودي و النابض حر، المطلوب إيجاد معادلة حركة هذا النظام وشروط الاهتزاز.



التمرين 3:

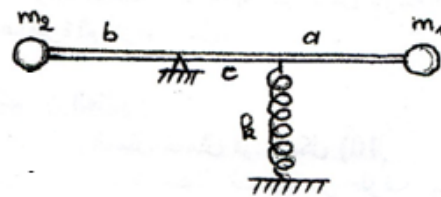
أسطوانة كتلتها M ونصف قطرها r مرتبطة بطرف ثابت بواسطة نابض صلابته k . الأسطوانة تتدحرج بدون الانزلاق على مستوى أفقي. المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الصغيرة للأسطوانة.



التمرين 4:

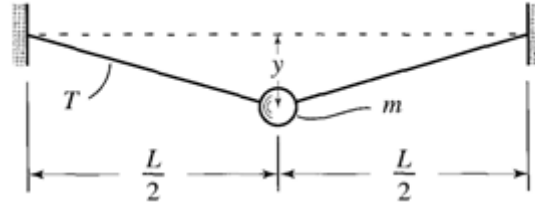
لدينا قضيبا ذا كتلة مهملة ، في طرفيه الكتلتين m_1 و m_2 . المطلوب:

- (1) إيجاد تمدد النابض عند التوازن، علما بأن القضيب أفقي.
- (2) إيجاد معادلة الحركة، واستنتاج دور الاهتزازات الصغيرة.



التمرين 5:

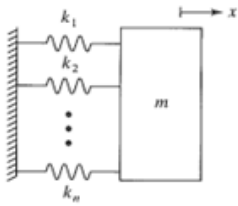
يتم تعليق كتلة m بواسطة خيط غير قابل للتمدد، خاضع لتوتر من المفروض أن يكون ثابتا بالنسبة للاهتزازات الصغيرة. المطلوب إيجاد دور الاهتزازات الصغيرة للكتلة.



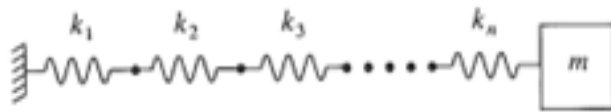
المطلوب إيجاد صلابة النابض المكافئ بالنسبة لكل تركيب للنوابض في الشكل التالي:

التمرين 6

أوجد بالنسبة للأنظمة في الشكلين صلابة النابض المكافئ



(ب) النوابض مركبة على التوازي



(أ) النوابض مركبة على التسلسل

التمرين 7:

ليكن النظام الميكانيكي المبين في الشكل التالي، المطلوب إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحكم تغير الزاوية θ ، واستنتاج الشرط الضروري لوجود اهتزازات للنظام الشبه دوري.

