جامعة الاخوة منتوري قسنطينة
UNIVERSITÉ DES FRÈRES MENTOURI CONSTANTINE

مقياس الفيزياء 1

من اعداد : الاستاذة سعيدي

الفهرس

الفصل الاول

الحساب الشعاعي وجملة الاحداثيات

I)الحساب الشعاعي : (Calcul vectoriel)

I-1)تعريف الشعاع وتمثيله:

لتكن النقطتين $A\ (x_A, y_A, z_A)$ و $B\ (x_B, y_B, z_B)$ ينتميان الى المحور (Δ) و في اتجاه معين يشكلان الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

الثنـــــائيـــــة (A, B)تعين لنا شعــــــــاعا

نرمز له بـ : $\overrightarrow{AB}$ أو نرمز له برمز آخر وليكن $\vec{V}$حيث $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$

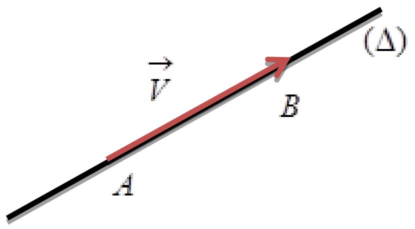
ومن مميزاته :

–المنحنى:هو المستقيم(Δ) الذي يحمل الشعاع $\overrightarrow{AB}$

–طويلته: هي المسافة الرابطة بين النقطتين A.Bو تعرف$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\|$

-المبدأ : يكون الشعاع معرف بالمبدأ و هي النقطةA

الاتجاه: وهو الخط الرابط بين المبدأA و نهايته B



الكتابة التحليلية للشعاع$\overrightarrow{AB}$ ذو *النقطتين* $A\ (x_A, y_A, z_A)$ و $B\ (x_B, y_B, z_B)$

$$\boldsymbol{\vec{V} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}}$$

$$\boldsymbol{\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_Y\vec{\jmath} + V_Z\vec{k}}$$

بحيث$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$تمثل أشعة الوحدة في الإحداثيات الديكارتية.

و طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تكتب ب:

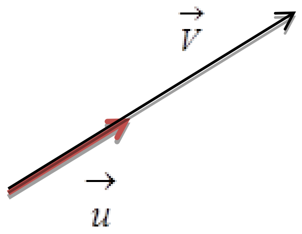
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2\ + V_y^2 + V_z^2}$$

I–2)انواع الاشعة:

هناك عدة أنواع من الأشعة أهمها :

ا)شعاع الوحدة : Vecteur unitaire

نقول ان $\vec{u}$ شعاع وحدة اذا كانت طويلته تساوي الوحدة$\|\vec{u}\| = 1$



كل شعاع$\vec{V}$لديه شعاع وحدة $\vec{u}$ نستخرجه وفق العلاقة التالية :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$$

مثال 1:

هل الشعاع $\vec{u}$ هو شعاع وحدة؟

$$\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$$

الحل: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

مثال 2:

احسب شعاع الوحدة للشعاع $\vec{V_1} = 2\sqrt{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$

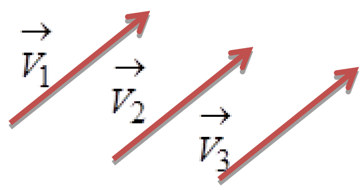
الحل

$$\vec{u} = \frac{\vec{V_1}}{\|\vec{V_1}\|} = \frac{2\sqrt{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

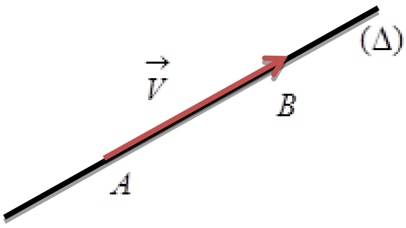
ب) الشعاع الحر أو المطلق: (Vecteur libre)

هو شعاع الذي يكون منحناه و طويلته ثوابت لكن مبدئه يكون في اي نقطة من الفضاء



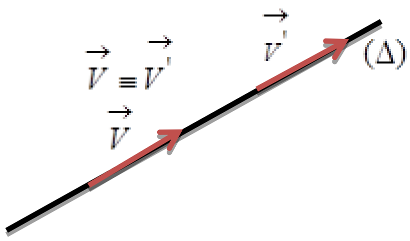
ج) الشعاع المقيد: (Vecteur lié)

هو شعاع كل من الاتجاه و الطويلة و المبداء عبارة عن ثوابت



د.)الشعاع المنزلق: (Vecteur glissant)

هو شعاع الذي يكون منحناه و اتجاهه ثوابت ولكن المبدأ متغير على المحور

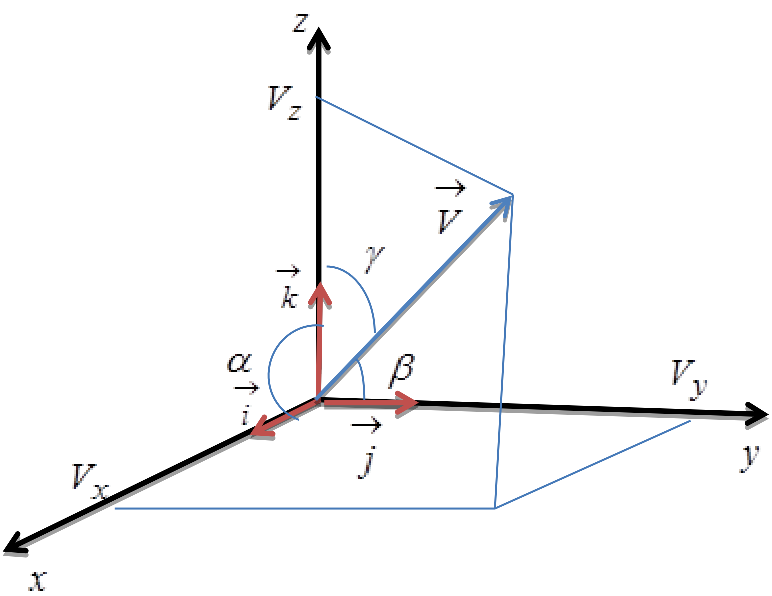


I-3) تمثيل شعاع في الإحداثيات الديكارتية:

في المعلم الديكارتي (الكارتيزي)، $(oxyz)$ و مرفوقة بقاعدة متعامدة و متجانسة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ بحيث يكتب الشعاع $\vec{V}$ كما يلي:

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}$$

طويلته تكتب بالعلاقة : $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$



$$\begin{cases} V_x = V\cos\alpha \\ V_y = V\cos\beta \\ V_z = V\cos\gamma \end{cases} \text{ و } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

α β γ هم الزوايا التي يصنعها الشعاع مع المحاور الثلاثة Oz, Oy, Ox

حيث V_x, V_y, V_z تسمى مركبات الشعاع $\vec{V}$ في $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ و هي الإسقاطات العمودية على ox, oy, oz على التوالي.و بالتالي اي شعاع يكتب كالتالي :

$$\vec{V} = V\,(\cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k})\ \vec{V} = V.\vec{u}$$

$\vec{u}$ شعاع الوحدة $= \cos\alpha\vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k}\vec{u}$

I-4)العمليات على الأشعة:

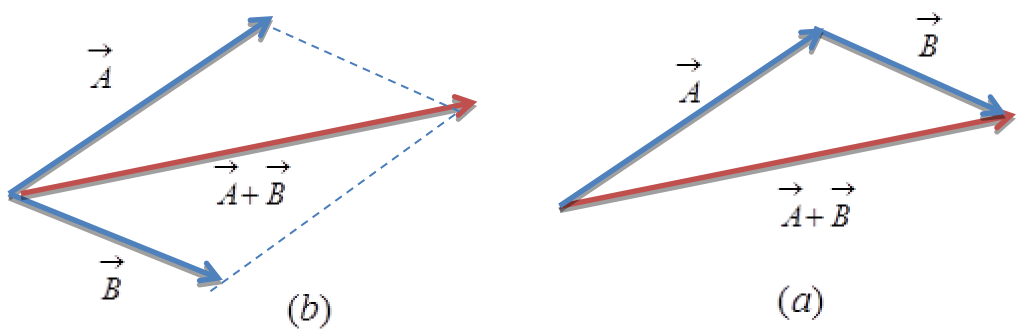
ا)جمع شعاعين:ليكن الشعاعان $\vec{A}(x_A, y_A, z_A)$ و $\vec{B}(x_B, y_B, z_B)$

محصلة جمع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ عبارة عن شعاع $\vec{C}$ المعرف ب :

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} = (x_A + x_B)\vec{\imath} + (y_A + y_B)\vec{\jmath} + (z_A + z_B)\vec{k}$$

هندسيا يمكن تمثيل المحصلة بطريقتين إما:

- تمثيل الأشعة بحيث نهاية الشعاع الأول هي بداية الشعاع الثاني و المحصلة هي بداية الأول مع نهاية الثاني(a)
- تمثيل الأشعة بطريقة متوازي الأضلاع كما هو موضح في الشكل (b)



من خصائصه:

-تبديلي(Commutatif): $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

-تجميعي(Associatif): $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

ملاحظة:

$$\|\vec{A}+\vec{B}\| \neq \|\vec{A}\|+\|\vec{B}\|$$

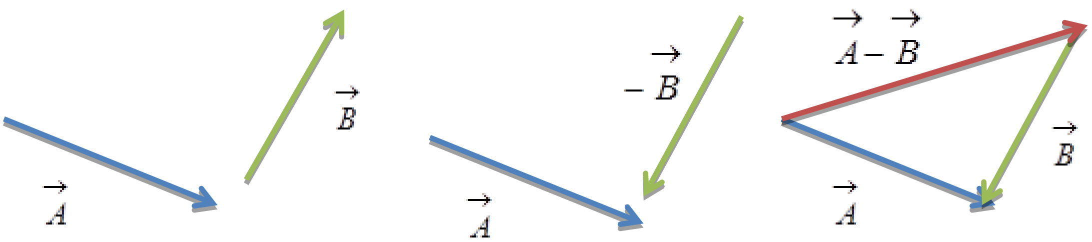
ب)طرح الاشعة

يمكن طرح شعاع من اخر, الفرق الشعاعي $\vec{A}-\vec{B}$ هو محصلة جمع الشعاع مع عكسه

$\vec{A}$ و $-\vec{B}$

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

هندسيا يمكن تمثيل المحصلة كما يلي



تحليليا تعطى احدثيات مركبة الشعاعين $\vec{A}$ - $\vec{B}$ بما يلي:

$\vec{B}=x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath}$ و $\vec{A}=x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}$

$$\vec{A}-\vec{B}=(x_A-x_B)\vec{\imath}+(y_A-y_B)\vec{\jmath}$$

$$\vec{A}-\vec{B}\neq\vec{B}-\vec{A}$$

ج) الضرب في عدد حقيقي:

جداء شعاع $\vec{A}$ في عدد حقيقي λ هوالشعاع $\vec{B}$ بحيث: $\vec{B}=\lambda\vec{A}$

- إذا كان $\lambda>0$: فإن $\vec{A}$: و $\vec{B}$ لهما نفس الإتجاه
- إذاكان $\lambda<0$: فإن $\vec{A}$: و $\vec{B}$ متعاكسان في
- خصائصه:

$$\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$$

$$(\lambda+\beta)\vec{A}=\lambda\vec{A}+\beta\vec{A}$$

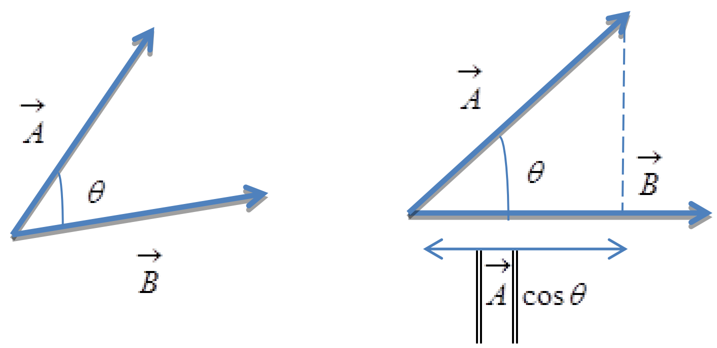
II -1) الجداء السلمي:(Produit scalaire)

II -1-1) تعريف:

نرمز للجداء السلمي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ب $\vec{A}.\vec{B}$ وهو المقدار السلمي المساوى لجداء طويلتي الشعاعين وتجب الزاوية المحصورةبين $(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$ المعطات بالعلاقة :

$$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\theta$$

θ هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{B}$و$\vec{A}$حيث$\|\vec{B}\|$و$\|\vec{A}\|$ هما طويلتهما على التوالى.



II -1-2) الكتابة التحليلة للجداء السلمي:

الجداء السلمي لشعاعين يساوي مجموع جداء مركبيتهما على المحورx وy وz

$$\vec{A}.\vec{B}=(x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}+z_A\vec{k}).(x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath}+z_B\vec{k})$$

$$=x_Ax_B\vec{\imath}.\vec{\imath}+x_Ay_B\vec{\imath}.\vec{\jmath}+x_Az_B\vec{\imath}.\vec{k}+y_Ax_B\vec{\jmath}.\vec{\imath}+y_Ay_B\vec{\jmath}.\vec{\jmath}+y_Az_B\vec{\jmath}.\vec{k}+z_Ax_B\vec{k}.\vec{\imath}+z_Ay_B\vec{k}.\vec{\jmath}+z_Az_B\vec{k}.\vec{k}$$

لدينا الاشعة $\vec{\imath},\vec{\jmath}$و$\vec{k}$متعامدة مثنى مثنى اذن$\vec{\imath}.\vec{\jmath}=\vec{\imath}.\vec{k}=\vec{\jmath}.\vec{k}=0$

وكذالك$\vec{\imath}.\vec{\imath}=\vec{\jmath}.\vec{\jmath}=\vec{k}.\vec{k}=\|\vec{\imath}\|.\|\vec{\imath}\|.\cos(\vec{\imath},\vec{\imath})=1.$

ومنه $\vec{A}.\vec{B}=x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B$

II -1-3)خصائص الجداء السلمي:

–الجداء السلمي تبادلي الخاصية $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$(Commutatif) :

-الجداء السلمي يمتلك الخاصية التوزيعية للجمع $(\vec{A}+\vec{B}).\vec{C}=\vec{A}.\vec{C}+\vec{B}.\vec{C}$(Distributif) :

-الجداء السلمي غير تجميعي: $(\vec{A}.\vec{B}).\vec{C}\neq\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C}$(Non associatif)

- الجداء السلمي لشعاعين متعامدين يساوي الصفر $\vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}=0$

$$\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B}.\cos\frac{\pi}{2}=0$$

II -1-4) حساب الزاوية بين شعاعين

لحساب الزاوية المحصورة بين شعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

لدينا(1) $\quad \vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\theta$

$\vec{A}.\vec{B}=x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B \qquad (2)$

من(1)و(2) نجد

$$\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|\cos\theta=x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{x_Ax_B+y_Ay_B+z_Az_B}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}$$

مثال:

أوجد الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{B}$ و $\vec{A}$ حيث $\vec{A}=5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{B}=1\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$

$$\vec{A}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}\ \vec{B}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|.\cos\theta$$

$\|\vec{B}\|=\sqrt{14}$ و $\|\vec{A}\|=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

من جهة اخرى لدينا $\quad \vec{A}.\vec{B}=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2=6$

ومنه $\quad \cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B}=\frac{6}{\sqrt{27}.\sqrt{14}}=0{,}308$

$$\theta=\arccos 0{,}308=72{,}02^{\circ}$$

II -2- الجداء الشعاعي:(Produit Vectoriel)

II -2-1) تعريف:

الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو شعاع $\vec{C}$ العمودي على المستوى المكون لهما أي

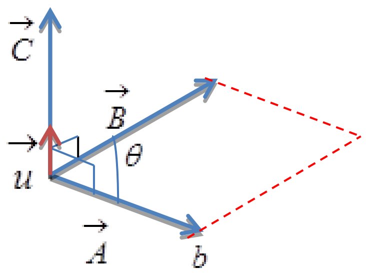
$\vec{C} \perp (\vec{A},\vec{B})$ و يكتب بالعلاقة

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| sin\theta.\vec{u}_C$$

بحيث: $\vec{C} \perp \vec{A}$ و $\vec{C} \perp \vec{B}$ $\quad \vec{u}_C$ هو شعاع الوحدة لـ $\vec{C}$ أي: $\vec{u}_C = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$

حالات خاصة

- لما $\theta = 0$ $\vec{A}\wedge\vec{B} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| sin0\, \vec{u}_C = \vec{0}$ $\quad\Leftarrow\quad$ $\vec{A}\,\vec{B} = \vec{0}$
- لما: $\vec{A} \perp \vec{B}$ أي: $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن: $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\| = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\| sin\frac{\pi}{2} = A.B$



الخصائص:

- الجداء الشعاعي غير تبادلي(Anticommutatif): $\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{A}\wedge\vec{B}$
- الجداء الشعاعي غير تجميعي: $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) \neq (\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$ (Non associatif)
- الجداء الشعاعي يمتلك الخاصية التوزيعية للجمع (Distributif):

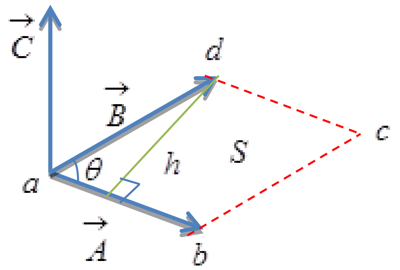
$$\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\vec{C}$$

II -3-2) الشكل الهندسي للجداء الشعاعي:

طويلة الجداء الشعاعي لـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هندسيا تمثل مساحة متوزاي الأضلاع المكون بـ $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$S=\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|=\|\vec{C}\|=\|\vec{A}\|\underbrace{\|\vec{B}\|\sin\theta}$$
$$\|\vec{A}\|.h$$

=مساحة متوازي الأضلاع المتكون من $\vec{A}$ و $\vec{B}$



(3-3- II الكتابة التحليلية للجداء الشعاعي: (Expression analytique du produit vectoriel)

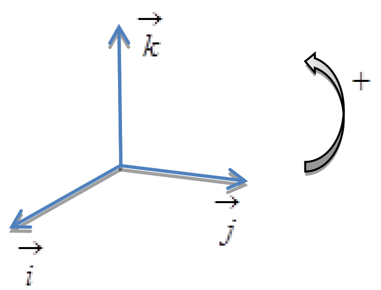
ليكن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ شعاعين و المعرفين كما يلي :

$$\begin{cases}\vec{A}=x_A\vec{\imath}+y_A\vec{\jmath}+z_A\vec{k}\\ \vec{B}=x_B\vec{\imath}+y_B\vec{\jmath}+z_B\vec{k}\end{cases}$$

تعطى العبارة التحليلية للجداء ألشعاعي في جملة الإحداثيات الديكارتية بالعلاقة التالية

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{K}\\ x_A&y_A&z_A\\ x_B&y_B&z_B\end{vmatrix}\vec{k}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}\\ x_A&y_A\\ x_B&y_B\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{K}\\ x_A&z_A\\ x_B&z_B\end{vmatrix}-\vec{i}\begin{vmatrix}\vec{j}&\vec{K}\\ y_A&z_A\\ y_B&z_B\end{vmatrix}=$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=(y_Az_B-y_Bz_A)\,\vec{i}-(x_Az_B-x_Bz_A)\,\vec{j}+(x_Ay_B-x_By_A)\,\vec{k}$$



:

$\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{K}$,

(4- II الجداء المختلط:(Produit mixte)

(1-4- II تعريف

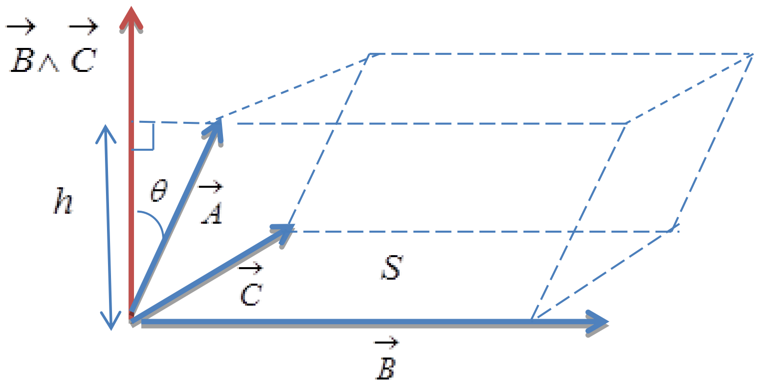
الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ هو الجداء السلمي بين $\vec{A}$ و $\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ المعرف بـ:

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{A}.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix})\ \vec{k}\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} x_B & z_B \\ x_C & z_C \end{vmatrix} - \vec{i}\ \vec{A}.(\begin{vmatrix} y_B & z_B \\ y_C & z_C \end{vmatrix} =$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = x_A(y_B z_C - y_C z_B) - y_A(x_B z_C - x_C z_B) + z_A(x_B y_C - x_C y_B)$$

II -2-4) الشكل الهندسي للجداء المختلط

الجداء المختلط يساوي هندسيا حجم متوازيا لسطوح المشكل من الأشعة الثلاثة $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$



$$\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{A}.\vec{D} = \|\vec{A}\|.\|\vec{B}\wedge\vec{C}\|cos\theta$$

مساحة القاعدة: $S = \|\vec{B}\wedge\vec{C}\|$

الارتفاع: $h = \|\vec{A}\|cos\theta$

حجم متوازي الاضلاع : $V = S.h = \|\vec{A}.\vec{B}\wedge\vec{C}\|$

و من خصائص الجداء المختلط :

-التبديل الدائري: $\vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\wedge\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B})$:

-يكون الجداء *المختلط معدوم اذا كان احد الاشعة معدوم*.

II -5) الجداء الشعاعي المضاعف:

نعرف الجداء الشعاعي المضاعف للأشعة $\vec{C}$ و$\vec{B},\vec{A}$ كما يلي:

$$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A}.\vec{B})$$

ومن خصائصه انه ليس تجميعي $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) \neq (\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$

تطبيقات الجداء الشعاعي في الهندسة

يستعمل الجداء الشعاعي في:

- حساب مساحة متوازي الأضلاع ABDC من خلال حساب $|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}|$

- حساب مساحة المثلث ABD من خلال حساب $1/2.|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}|$

- إيجاد معادلة مستقيم (Δ) يمر بنقطتين A و B لمستوي Oxy اذا كانت النقطة $M \in (\Delta)$

اذن : $\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

مثال1 :

$\vec{B} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{A} = 1\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

أ- ما هي العلاقة بين y, x و z حتى يكون $\vec{A}\perp\vec{B}$ و $\vec{A}/\!/\vec{B}$ ؟

ب- ما هي قيم y, x و z حتى يكون $\vec{B}$ شعاع وحدة للشعاع $\vec{A}$ ؟

الحل

أ- $\vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow x + 2y - z = 0$

$$\vec{A}/\!/\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow (2z+y)\vec{i} + (-x-z)\vec{j} + (y-2x)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2z+y = 0 \\ -x - z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = y/2 = -x$$

ب- $\vec{B}$ شعاع وحدة للشعاع $\vec{A}$

$$\vec{B} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{4}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{4}}\vec{k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1 \ , \quad y = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \quad , z = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

مثال2

لتكن الأشعة التالية في القاعدة $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{B} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{A} = x\vec{i} + 2x\vec{j}$

1)احسب الجداء السلمي $\vec{A}.\vec{B}$ و الشعاعي $\vec{A}\wedge\vec{B}$

2) جد قيم x حتى يكون $\vec{A}$ يعامد $\vec{B}$ و $\vec{A}$ توازي $\vec{B}$

الحل

$\vec{A} = x\,\vec{i} + 2x\,\vec{j}$ $\quad \vec{A}\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{B} = 4\,\vec{i} - 2\,\vec{j}$ $\quad \vec{B}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1)حساب الجداء السلمي

$\vec{A}.\vec{B}$ الجداء السلمي معرف ب

$$\vec{A}.\vec{B} = (x_A.x_B) + (y_A.y_B) + (z_A.z_B)$$

بتطبيق العلاقة نجد $\vec{A}.\vec{B} = 4x - 4x$

* حساب الجداء الشعاعي $\vec{A}\wedge\vec{B}$

الجداء الشعاعي معرف ب

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} (y_A z_B - y_B z_A)\,\vec{i} - (x_A z_B - x_B z_A)\,\vec{j} + (x_A y_B - x_B y_A)\,\vec{k} =$$

بتطبيق العلاقة نجد

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ x & 2x & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} ((2x).0 - (-2).0)\,\vec{i} - (x.0 - 4.0)\,\vec{j} + (x.(-2) - 4.(2x))\,\vec{k} =$$

$$-10x\,\vec{k} \qquad =$$

2) حساب قيم x حتى يكون $\vec{A} /\!/ \vec{B}$

معدوم $\vec{A}\wedge\vec{B}$ لا بد ان يكون الجداء الشعاعي $\vec{A} /\!/ \vec{B}$ حتى يكون

$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A} /\!/ \vec{B}$$

من السؤال السابق لدينا $\vec{A}\wedge\vec{B} = -10x\,\vec{k}$

و هى محققة لما تكون قيم $\vec{A}\wedge\vec{B} = -10x\,\vec{k} = \vec{0}$ x=0

حساب قيمx حتى يكون $\vec{A} \perp \vec{B}$

معدوم $\vec{A}.\vec{B}$ لا بد ان يكون الجداء السلمي $\vec{A} \perp \vec{B}$ حتى يكون

$\vec{A}.\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

$\vec{A}.\vec{B} = 4x - 4x$ من السؤال السابق لدينا

و هي محققة مهما تكون قيم x $\vec{A}.\vec{B} = 4x - 4x = 0$ $(\forall x)$.

6−II)إشتقاق شعاع:(Dérivé d'un vecteur)

ليكن $\vec{A}(t)$ و $\overrightarrow{B}(t)$ شعاعان يتغير بدلالة الزمن و لتكن λ(t) دالة سلمية تتغير أيضا بدلالة الزمن. يعرف مشتق الشعاع $\vec{A}$ بالنسبة للزمن t بـ:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dx_A}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy_A}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz_A}{dt}\vec{k}$$

من خصائص الإشتقاق لدينا :

* $\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt}$ * $\frac{d(\lambda\vec{A})}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{A} + \lambda\frac{d\vec{A}}{dt}$

* $\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt} = \vec{B}\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt}$ * $\frac{d(\vec{A}\wedge\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{dt}$

مثال1:

لتكن الأشعة التالية

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{2t}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{t}+\boldsymbol{1})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{4t}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{k}}$$

1) احسب المشتقات $\frac{d\vec{A}}{dt}$ و $\frac{d\vec{B}}{dt}$ و $\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt}$ و $\frac{d(\vec{A}\wedge\vec{B})}{dt}$

الحل:

$\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{2t}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{t}+\boldsymbol{1})\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{t})\vec{\boldsymbol{k}} \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{\boldsymbol{k}}$-

$\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{4t}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} - \boldsymbol{3}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{2}\vec{\boldsymbol{k}} \Rightarrow \frac{d\vec{B}}{dt} = 4\vec{\boldsymbol{\imath}}$

2) $\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt}$

$$\vec{A}.\vec{B} = 8t^2 - 3(t+1) + 2(1-t) = 8t^2 - 5t - 1 \Rightarrow \frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt} = 16t - 5$$

3-$\vec{A}\Lambda\overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{k} \\ 2t & t+1 & 1-t \\ 4t & -3 & 2 \end{vmatrix} =$

$= \left((t+1).2 + 3(1-t)\right)\vec{\boldsymbol{i}} - (4t - 4t(1-t))\vec{j} + (-6t - 4t(t+1))\vec{\mathrm{k}}$

$=(-t+5)\vec{\boldsymbol{i}} - (4t^2)\vec{j} + (-4t^2 - 10t)\vec{\mathrm{k}}$

$$\frac{d(\vec{A}\,\Lambda\vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt}\Lambda\overrightarrow{B} + \vec{A}\,\Lambda\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Lambda\overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{J} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4t & -3 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{\boldsymbol{i}} - (4+4t)\vec{j} + (-6-4t)\vec{\mathrm{k}}$$

$$\vec{A}\,\Lambda\frac{d\vec{B}}{dt} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{J} & \vec{k} \\ 2t & (t+1) & 1-t \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(1-t)\vec{j} - 4(t+1)\vec{\mathrm{k}}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\Lambda\overrightarrow{B} + \vec{A}\,\Lambda\frac{d\vec{B}}{dt} = -\vec{\boldsymbol{i}} - 8t\vec{j} + (-8t-10)\vec{\mathrm{k}}$$

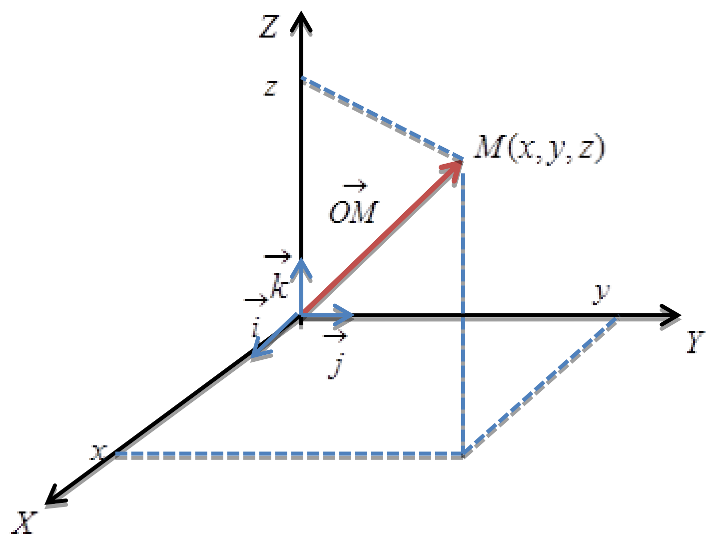
$$\frac{d(\vec{A}\,\Lambda\vec{B}\,)}{dt} = -\vec{\boldsymbol{i}} - 8t\vec{j} + (-8t-10)\vec{\mathrm{k}}$$

III-جملة الاحداثيات

III-1) الاحداثيات الديكارتية : (Coordonnées cartésienne)

لتكن النقطة M في معلم كارتيزي $(\vec{\boldsymbol{i}},\vec{\boldsymbol{j}},\vec{\boldsymbol{k}})$ وهو معلم متعامد متجانس وثابت يكتب الشعاع $\overrightarrow{OM}$ على الشكل التالي :

$$M(x,y,z) \text{ او } M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ أو } \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$



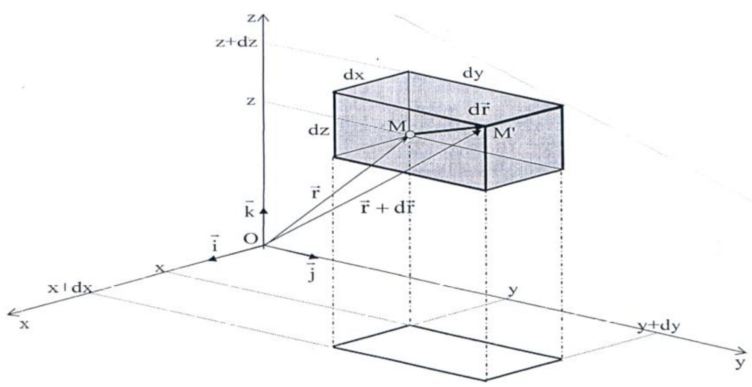
طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}$:

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

والشعاع العنصري لشعاع $\overrightarrow{OM}$ هو

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

الإنتقال يكون على المحاور الثلاثة .



المساحة العنصرية

$$dS_{yz} = dy.dz,\ \ dS_{xz} = dx.dz,\ \ dS_{xy} = dx.dy$$

الحجم العنصري :

$$dv = dx.dy.dz$$

III-2)الإحداثيات القطبية: (Coordonnées polaires)

أ) جمل الإحداثيات$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta) \rightarrow (\rho, \theta)$

- في الإحداثيات القطبية ، وضعية النقطة M معرفة بالشعاع $\overrightarrow{OM}$ ذات الطويلة $\rho(t)$وبواسطة الزاوية القطبية $\theta(t)$ التي تتغير بواسطة الزمن إذن النقطة Mمعرفة بـــ:

$\boldsymbol{M(\rho, \theta)}$ في القاعدة القطبية $(\overrightarrow{\boldsymbol{U}_\rho}, \overrightarrow{\boldsymbol{U}_\theta})$حيث :

$\overrightarrow{U_\rho}$شعاع الوحدة للشعاع $\overrightarrow{OM}$ويساوي$\overrightarrow{U_\rho} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$

$\overrightarrow{\boldsymbol{U}_\theta}$ شعاع الوحدة العمودي على $\overrightarrow{U_\rho}$

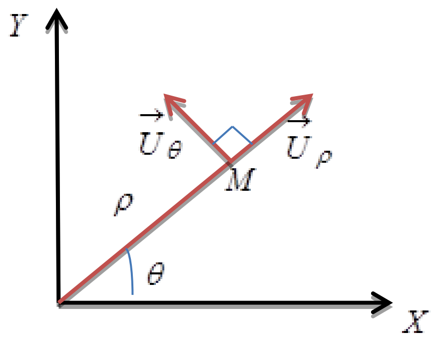
إذا حدثت حركة النقطة M في مستوى ما ، فيمكننا تحديد موضع النقطة M بواسطة الإحداثيات القطبية (ρ، θ) ، يتم تحديد هذه الإحداثيات فيما يتعلق بمحور ثابت (ox) لإحداثيρ هو نصف القطر القطبي ، وهو المسافة الشعاعية بين O والنقطة M (المقياس).

الإحداثيات θ هي الزاوية القطبية ، وهي الزاوية المحصورة بين (ox) و $\overrightarrow{OM}$.

تكتب وضعية النقطة $\boldsymbol{M(\rho, \theta)}$في القاعدة القطبية المتغيرة بدلالة الزمن كلما تغيرت وضعية M(انظر لشكل)

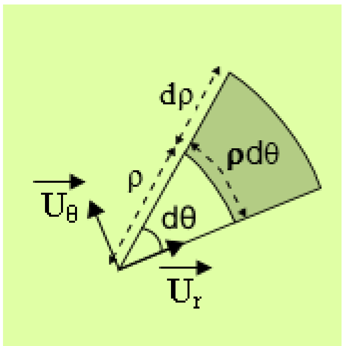
نعرف القاعدة الجديدة القطبية بانها قاعدة متعامدة متجانسة متغيرة بدلالة الزمن حيث

$\|\overrightarrow{U_\rho}\| = \|\overrightarrow{U_\theta}\| = 1$.



والشعاع العنصري لشعاع $\overrightarrow{OM}$ $\quad$ $d\vec{r} = \overrightarrow{dOM} = d\rho\,\vec{U}_\rho + \rho d\theta \vec{U}_\theta$

<u>المساحة العنصرية: $ds = \rho d\rho d\theta$</u>

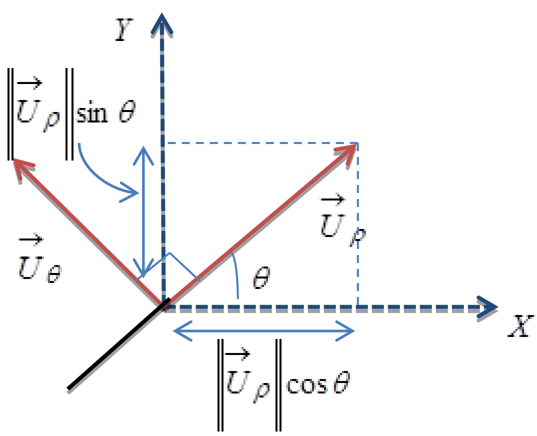


ب) عبارة $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta)$ *في المعلم* $(\vec{i}, \vec{j})$:

شعاع الموضع يكتب $\overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{U_\rho}$ و $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$

فما سلف عرفنا بان أي شعاع $\vec{V}$ يمكن اسقاطه في القاعدة الديكارتية كالتالي :

$$\vec{V} = \|\vec{V}\| \cos\theta\, \vec{\imath} + \|\vec{V}\| \sin\theta\, \vec{\jmath}$$



بنفس المنهجية يمكن اسقاط الشعاع $\overrightarrow{U_\rho}$

$\overrightarrow{U_\rho} = \|\overrightarrow{U_\rho}\| \cos\theta\, \vec{\imath} + \|\overrightarrow{U_\rho}\| \sin\theta\, \vec{\jmath}$ $\quad$ $\|\overrightarrow{U_\rho}\| = \|\overrightarrow{U_\theta}\| = 1$ لانها اشعة وحدة

للتحصل على $\overrightarrow{U_\theta}$ نظيف $\pi/2$ لزاوية لـθ

وبالتالي إحداثيات المعلم القطبي هي :

$\overrightarrow{U_\rho} = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath} \quad \overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}$

$$\vec{U}_\theta = \frac{d\vec{U}_\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta \vec{\imath} + \sin\theta\, \vec{\jmath}) \Rightarrow \overrightarrow{U_\theta} = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath}$$

ج)اشتقاق أشعة الوحدة للمعلم القطبي

$$\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} \vec{\imath} + \frac{d\sin\theta}{dt} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} \vec{\jmath} = \frac{d\cos\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{\imath} + \frac{d\sin\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = -\dot{\theta} \sin\theta\, \vec{\imath} + \dot{\theta} \cos\theta\, \vec{\jmath} = \dot{\theta}(-\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta\, \vec{\jmath})$$

حيث $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

ومنه $\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} = \dot{\theta} . \overrightarrow{U_\theta}$

بنفس الطريقة نتحصل على $\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\dot{\theta} . \overrightarrow{U_\rho}$

د)العلاقة التي تربط بين الاحداثيات الدكارتية والقطبية:

يمكن تحديد مركبات $M(\rho, \theta)$ في القاعدة الكارتزية حيث :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \rho\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \theta = Arc\cos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y = \rho\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{y}{\rho} \Rightarrow \theta = Arc\sin\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\text{tg}\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = Arc\,\text{tg}\frac{y}{x}$

* للإنتقال من الإحداثيات القطبية إلى الديكارتية : $\big((\rho,\theta) \to (x,y)\big)$ لدينا:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

* للإنتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى القطبية أي:$(x,y) \to (\rho,\theta)$ لدينا:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = artg\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

مثال:

احسب الإحداثيات القطبية لنقطة التالية $M_1\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$:

للانتقال من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية أي:$(\rho,\theta) \leftarrow (x,y)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ y = \rho\sin\theta = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

ومنه$\left(2,\frac{\pi}{4}\right) M_1 \leftarrow M_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$

*3-III)*الاحداثيات الاسطوانية : (Coordonnées cylindriques)

أ)جملة الإحداثيات:$(\rho,\theta,z) \to (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$

يمكن كتابة النقطة M في الفضاء إذا أضفنا الإحداثية Z إلى الإحداثيتين القطبيتين $(,\theta)$فنتحصل على الإحداثيات الأسطوانية (ρ,θ,z) و القاعدة الأسطوانية المتعامدة و المتجانسة هي $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$ بحيثتصبح النقطة في الفضاء:

نصف القطر القطبي : $\rho = \|\overrightarrow{Om}\|$

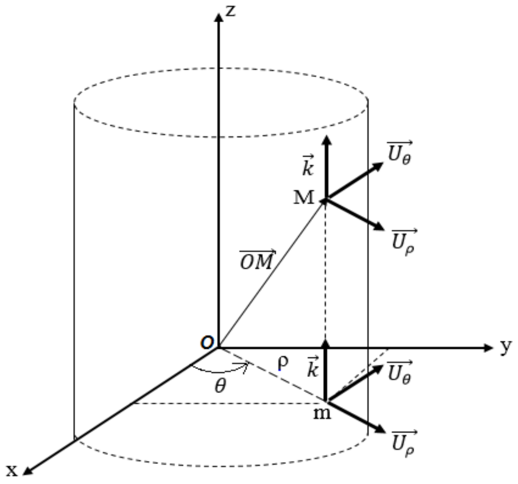
الزاوية القطبية$\theta = (\overrightarrow{0m}, \overrightarrow{0x})$

الارتفاع:=$\|\overrightarrow{mM}\|$Z

و يكتب شعاع الموضع بـــ: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0m} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{u}_\rho + Z\vec{k}$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

و يمكن تمثيله كما يلي:



$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{U_\rho} + z\vec{k}$$

$$: \begin{cases} 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

ب)علاقات التحويل بين الإحداثيات الأسطوانية (ρ, θ, z) و الديكارتية (x, y, z)

* للانتقال من الإحداثيات الأسطوانية إلى الديكارتية :$\left((\rho, \theta, z) \to (x, y, z)\right)$: لدينا:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = Z \end{cases}$$

* للإنتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الأسطوانية:$(x, y, z) \to (\rho, \theta, z)$ لدينا:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = artg\dfrac{y}{x} \\ Z = z \end{cases}$$

مثال

أوجدالإحداثيات الأسطوانية للنقطة : $M\ (2,3,4)$-

للانتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات الأسطوانية أي:← (ρ, θ, z) (x, y, z)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\theta = arctg\ \frac{y}{x} = arctg\frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 56.30°$$

$$z = 4$$

$$M\left(\sqrt{13}, 56.30°, 4\right) \leftarrow M(2,3,4)$$

-أوجدالإحداثيات ديكارتية للنقطة $M'\left(3, \frac{\pi}{3}, 6\right)$

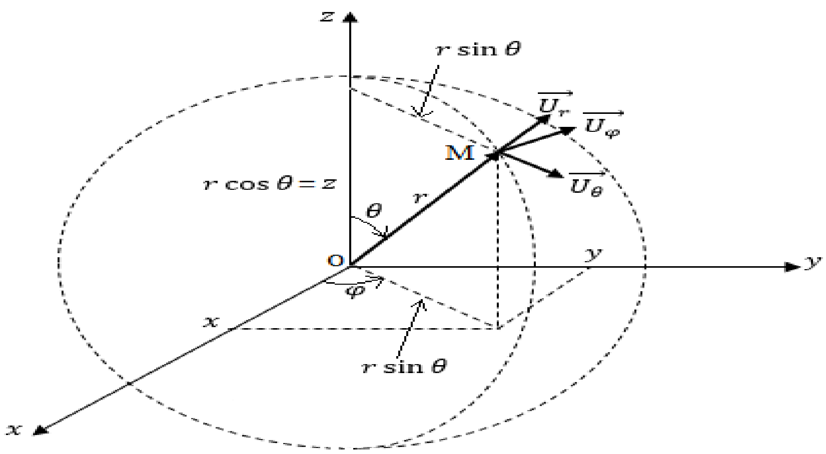
$$\begin{cases} x = \rho\, cos\, \theta = 3\, cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2} \\ y = \rho\, sin\, \theta = 3\, sin \frac{\pi}{3} = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = z = 6 \end{cases} M'\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 6\right)$$

4-III) الاحداثيات الكروية: (coordonnées Sphériques)

أ) جملة الإحداثيات: $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) \to (\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}})$

تعرف النقطة M في القاعدة الكروية المتعامدة و لمتجانسة $(\overrightarrow{\boldsymbol{U_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{U_\theta}}, \overrightarrow{\boldsymbol{U_\varphi}})$.بالإحداثيات الكروية **(r,θ,φ)**, يكتب شعاع الموضع لنقطة M كالتالي $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{U_r}$

حيث $\|\overrightarrow{OM}\| = r$



$$\begin{cases} 0 \le r \le +\infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

ب)العلاقة التي تربط
بين الاحداثيات الديكارتية $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ و الكروية $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$:

* للإنتقال من الإحداثيات الديكارتية إلى الأسطوانية: $(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$ لدينا:

$$\begin{cases} r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

* للإنتقال من الإحداثيات الكروية إلى الديكارتية: $\left((r, \theta, \varphi) \to (x, y, z)\right)$ لدينا:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

علما ان $\rho = r \sin\theta$

مثال:

اوجد الإحداثيات الكروية لنقطة التالية: $M\ (4,2,3)$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{4^2+2^2+3^2} = \sqrt{29} \\ \theta = arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = arctan\frac{\sqrt{4^2+2^2}}{3} = 56.15° \\ \varphi = arctan\frac{y}{x} = arctan\frac{2}{4} = 26.37° \end{cases}$$

$M(\sqrt{29}, 56.15°, 26.37°\ )$

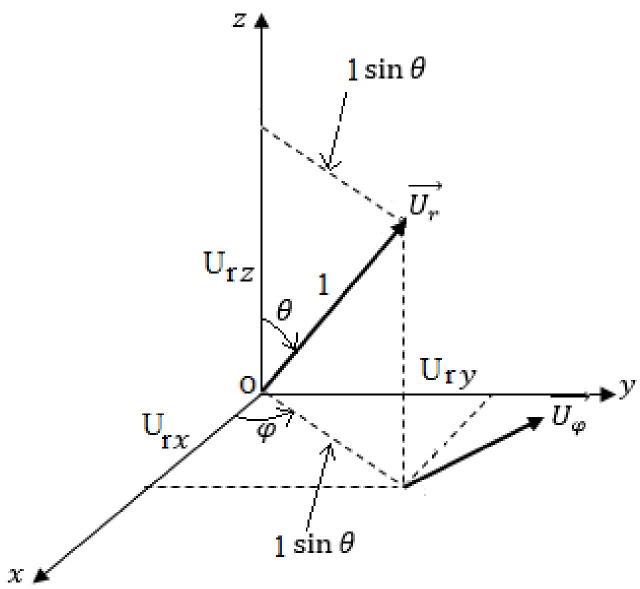
$$=> M(\sqrt{29}, 56.15°, 26.37°\ ) M\ (4,2,3)$$

و النقطة M’ ذات الإحداثيات الكروية $M'(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ و احداثياتهاالديكارتية هي:

$$\begin{cases} x' = r \sin\theta \cos\varphi = 3. sin\frac{\pi}{6}. cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ y' = r \sin\theta \sin\varphi = 3. sin\frac{\pi}{6}. sin\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ z' = r \cos\theta = 3. cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

اذن $.M'(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ <= $M'(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$

ج)كتابة القاعدة الكروية $(\overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\varphi})$ بدلالة القاعدة الديكارتية $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:



من الشكل لدينا $\overrightarrow{U_r} = U_{rx}\vec{i} + U_{ry}\vec{j} + U_{rz}\vec{k}$:

حيث

$$\begin{cases} U_{rx} = 1.\sin\theta\,.\cos\varphi \\ U_{ry} = 1.\sin\theta\,.\sin\varphi \\ U_{rz} = 1.\cos\theta \end{cases}$$

اذن $\overrightarrow{U_r} = si\,n\,\theta\,.co\,s\,\varphi\,.\vec{\imath} + si\,n\,\theta\,.si\,n\,\varphi\,.\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k}$

يمكن التحصل على شعاع الوحدة $\overrightarrow{U_\theta}$ العمودي على $\overrightarrow{U_r}$ وذلك باضافة الزاوية π/2 لθ في معادلة شعاع الوحدة $\overrightarrow{U_r}$ فنتحصل :

$$\overrightarrow{U_\theta} = si\,n(\theta + \frac{\pi}{2}).co\,s\,\varphi\,.\vec{\imath} + si\,n(\theta + \frac{\pi}{2}).si\,n\,\varphi\,.\vec{\jmath} + \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{U_\theta} = \cos\theta\,.co\,s\,\varphi\,.\vec{\imath} + \cos\theta\,.si\,n\,\varphi\,.\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k}$$

$\overrightarrow{U_\varphi}$ هو شعاع الوحدة المعرف سابقا في المعلم القطبي

$$\overrightarrow{U_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$$

اذن
$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = si\,n\,\theta\,.co\,s\,\varphi\,.\vec{\imath} + si\,n\,\theta\,.si\,n\,\varphi\,.\vec{\jmath} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \cos\theta\,.co\,s\,\varphi\,.\vec{\imath} + \cos\theta\,.si\,n\,\varphi\,.\vec{\jmath} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \overrightarrow{U_\varphi} = -si\,n\,\varphi\,\vec{\imath} + co\,s\,\varphi\,\vec{\jmath} \end{cases}$$

د) اشتقاق أشعة الوحدة ($\overrightarrow{U_r}\,,\overrightarrow{U_\theta}\,,\overrightarrow{U_\varphi}$)

- $\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\varphi}.\sin\theta\,\overrightarrow{U_\varphi}$
- $\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{U_r} + \dot{\varphi}.\cos\theta\,\overrightarrow{U_\varphi}$
- $\frac{d\overrightarrow{U_\varphi}}{dt} = -\,\dot{\varphi}(\sin\theta\,\overrightarrow{U_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{U_\theta}$

الفصل الثاني

الحركيات

I) حركة النقطة المادية(Cinématique du point matériel)

1-I) تعاريف:

أ) الحركية:(Cinématique)

يعتمد علم الحركيات على دراسة حركة الأجسام ذات سرعة صغيرة جدا بالنسبة لسرعة الضوء و دون التطرق لمسببتها سندرس حركة لنقطة المادية وهي عنصر مادي ليس له أبعاد

ب) المعادلات الزمنية :

خلال دراسة حركة النقطة المادية،فإن إحداثيات هذه الأخيرة تكون تابعة للزمن و الذي يرمز له بـ (t)، حيث تسمى $x(t)$،$y(t)$و$z(t)$ بالمعادلات الزمنية للحركة.

ج) المسار:(Trajectoire)

مسار نقطة مادية هو مجموع النقاطج الهندسية المتتالية التي تشغلهاالنقطة حركتها خلال أزمنة متعاقبة.نتحصل على معادلة المسار بالغاء الوسيط t من بين المعادلات الزمنية $x(t)$،$y(t)$ و $z(t)$ و ايجاد علاقة بين الإحداثيات و y=f(x).في المعلم الديكا رتي بينما في المعلم القطبي فيكفي ايجاد العلاقة بين ρ و θ أي $\rho = f(\theta)$

مثال 01 :

أوجد معادلة مسار لنقطةM معرفة بالمعادلات الزمنية: $x(t) = 4t + 3$، $y(t) = 5t$

الحل:

$$y(t) = 5t \Rightarrow t = \frac{y}{5} \qquad\qquad x(t) = \frac{4}{5}y + 3$$

معادلة مستقيم.

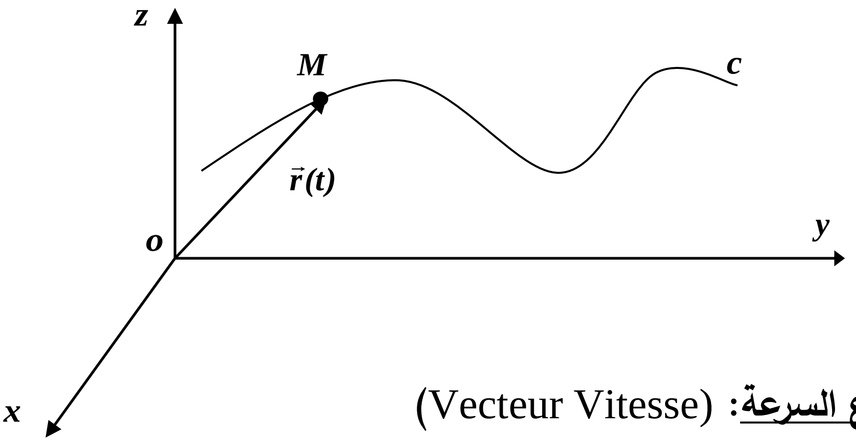
I-2) مميزات الحركة:

تتميز حركة النقطة المادية بثلاث مقادير شعاعية و هي :

- شعاع الموضع – شعاع السرعة – شعاع التسارع

1) شعاع الموضع: (Vecteur position)

يعين وضعية النقطة Mفي اللحظة t بالنسبةللمبدأ "0"في المعلم الفضائي الديكارتي $(oxyz)$، و يعرف بالشعاع $\overrightarrow{OM}$حيث: $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$

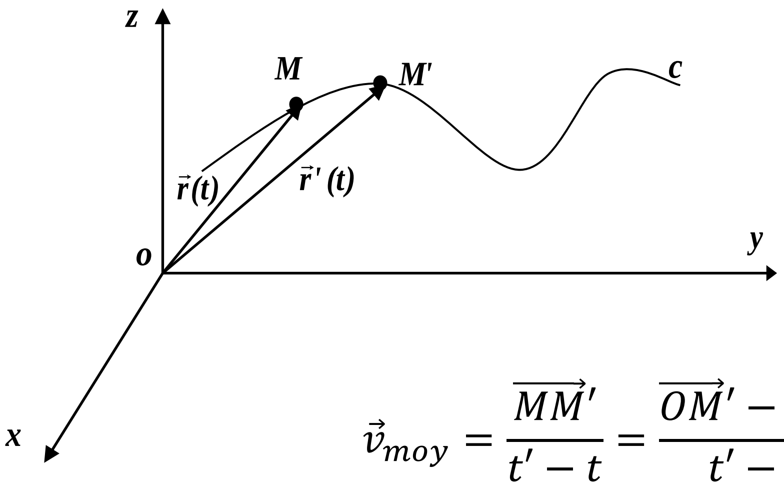


2) شعاع السرعة: (Vecteur Vitesse)

السرعة عبارة عن المسافة المقطوعة خلال وحدة الزمن. وحدة السرعة في الجملة الدولية MKS هي المتر على الثانية$[m.s^{-1}]$ = $[m/s]$:، وهناك نوعان من السرعة :

أ) شعاع السرعة المتوسطة:(Vecteur vitesse moyenne)

المعرف بالشعاع $\vec{v}_{moy}$ و يمثل تغير شعاع الموضع $\Delta\overrightarrow{OM}$بالنسبة للزمن و يكتب :



$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{t'-t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

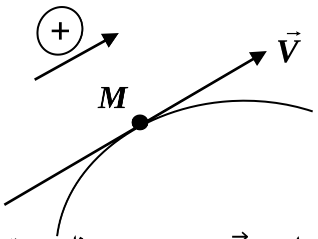
ب) شعاع السرعة اللحظية:(Vecteur vitesse instantanée)

يعرف شعاع السرعة اللحظية لنقطة مادية أي شعاع السرعة في اللحظة t، أنه مشتقة شعاع الموضع بالنسبة للزمن وحدته هي: $[m.s^{-1}]$.

$$\vec{v}(t) = \lim_{t \to \acute{t}} \frac{\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM}}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{\text{moy}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

–ويكون إتجاه شعاع السرعة اللحظية دائما **مماسيا** لمسار النقطة المادية و في **إتجاه** الحركة.

– إذا كانت طويلة السرعة **ثابتة** (لا تتعلق بالزمن) نقول أن الحركة منتظمة.



3) شعاع التسارع: (Vecteur accélération)

يعرف شعاع التسارع لنقطة مادية M عند اللحظة tبالشعاع $\vec{\gamma}$ و هو يمثل مقدار تغير السرعة خلال وحدة الزمن. رياضياشعاع التسارع هو المشتق الأول بالنسبة للزمن للسرعة اللحظية أو هو المشتق الثاني بالنسبة للزمن لشعاع الموضع. وحدته هي : = $[m/s^2]$. $[m.s^{-2}]$

$$\vec{\gamma}_{(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

ملاحظات:

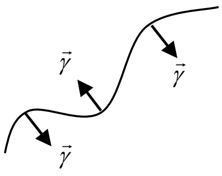
– إذا كان $\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftarrow$ الحركة منتظمة أو في حالة سكون.

– إذا كان $\vec{\gamma} = cte \Leftarrow$ الحركة متغيرة بانتظام.

– إذا كان $\vec{\gamma}$ في الحركةإتجاه $\Leftarrow$الحركة متسارعةأي: $\vec{\gamma}.\vec{v} > \vec{0}$

– إذا كان $\vec{\gamma}$ في للحركةمعاكسالإتجاه $\Leftarrow$الحركةمتباطئة أي: $\vec{\gamma}.\vec{v} < \vec{0}$

– إتجاه شعاع التسارع يكون نحو تقعر المسار.



II) مميزات الحركة في مختلف الإحداثيات:

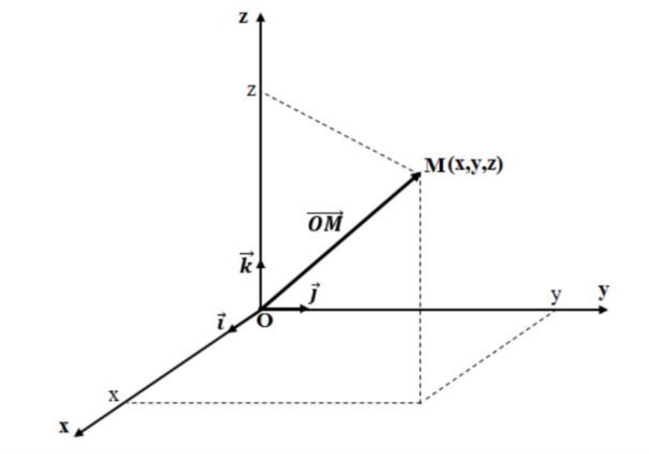
II-1)جملة الإحداثيات الديكارتية:

أ) شعاع الموضع:

في القاعدة الديكارتية المتعامدة و المتجانسة $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ يمكن كتابة شعاع الموضع الموضع بـ:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = \vec{r}(t)$$

$x(t)$،$y(t)$ و$z(t)$ هي مركبات شعاع الموضع في القاعدة $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ (و تسمى أيضا بالمعادلات الزمنية للحركة.



طويلة شعاع الموضع تعطى بـ:

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

ب)شعاع السرعة $\vec{V}(t)$:

هوتغير شعاع الموضع بالنسبة لزمن t يمثل المشتق الأول لشعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\overrightarrow{k}$$

أي:

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

طويلته تعطى بـ:

$$\|\vec{V}(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

ملاحظة : يمكن الحصول على شعاع السرعة مباشرة من قسمة شعاع الإنتقال العنصري

$d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ على dt

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

جـ) شعاع التسارع $\vec{\gamma}(t)$:

هو يمثل المشتق الأول للسرعة $\vec{v}$أو المشتق الثاني لشعاع الموضع $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

بحيث

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{dVx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ \gamma_y = \frac{dVy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ \gamma_z = \frac{dVz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

طويلته هي: $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) + \ddot{z}^2(t)}$

ملاحظة لمعرفة نوعية الحركة لابد من دراسة جداء $\vec{\gamma}(t).\vec{v}$

د) أمثلة:

مثال1 تنتقل النقطة في مستوى ابتداء من اللحظة t=1 .معادلتاه الزمنيتان هما:

$$x = \ln t \; ; \; y = t + \frac{1}{t}$$

- جد معادلة المسارفي المعلم Oxy

الحل :

لابد من الغاء الزمن من بين المعادلات

$$\boldsymbol{x = lnt} => t = \boldsymbol{e^x} => \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e^x} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^x}} => y = \boldsymbol{e^x} + \boldsymbol{e^{-x}}$$

مثال2: في معلم متعامد ومتجانس (o,i,j,k) , تحدد الحركة المتحرك M بالمعادلات التالية:

$$x(t) = t + 1 \, , \, y(t) = t^2 + 1$$

ا/ معادلة المسارفي المعلم Oxy و نوعه

ب /احسب في اللحظة t إحداثيات شعاع السرعة V ,وشعاع التسارع ,للمتحرك M

الحل:

من عبارة xنستخرج t ثم نعوضها في عبارة y فنجد:

$$t = x - 1 \Longrightarrow y = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

المسار عبارة عن قطع مكافئ

–عبارة السرعة و التسارع

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = 2t \end{cases} \Longrightarrow \vec{\gamma} = \begin{cases} \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = 2 \end{cases}$$

مثال 3:تعطى إحداثيات نقطة مادية بالمعادلات التالية، أوجد شعاعي السرعة و التسارع مع طبيعة المسار؟

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{V}\begin{cases} V_x = 2t \\ V_y = 0 \\ V_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{\gamma}\begin{cases} \gamma_x = 2 \\ \gamma_y = 0 \\ \gamma_z = 0 \end{cases}$$

معادلة المسارهي: $x = y^2$عبارة عن قطع مكافئ.

مثال 4:

الحركة المستقيمة لنقطة مادية محددة بمعادلة الزمنية: $S=2t^3-9t^2+12t+1$

أ/ احسب السرعة والتسارع في اللحظة t

ب/ ادرس حركة النقطة لما يزداد الزمن t من 0 الى $+\infty$.(وضح في اي اتجاه تنتقل النقطة و هل الحركة متسارعة او متباطئة)

الحل:

$$1) v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$$

$$2)\ \gamma(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

لدراسة طبيعة الحركة لابد من دراسة اشارة الجداء $v\gamma$.

t	0 1	1.5	2	
v	+	-	-	+
γ	-	-	+	+
γ.v	-	+	-	+
نوع الحركة	متسارعة+	متناقصة-	متناقصة-	متسارعة+

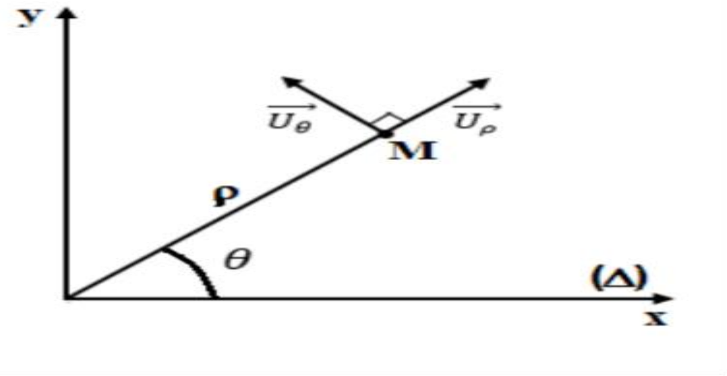
2-II)جملة الإحداثيات القطبية:

تعرف جملة الإحداثيات القطبيةبـ $(\rho\ ,\theta)$ في القاعدة المتعامدة و المتجانسة والمتغيرة بدلالة الزمن $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

أ)شعاع الموضع:

يعطى شعاع الموضع في المعلم القطبي$(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta)$ بالشكل التالي :

$$\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{OM}\|\vec{u}_\rho=\rho(t)\vec{u}_\rho$$



حيث: $\|\overrightarrow{OM}\|=\rho(t)$

ب) **شعاع السرعة:**

من جهة يمكن حسابها من إشتقاق شعاع الموضع:

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\left(\rho\overrightarrow{U_\rho}\right)}{dt}=\rho.\frac{d\overrightarrow{U_\sigma}}{dt}+\frac{d\rho}{dt}.\overrightarrow{U_\rho}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}=\dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho}+\rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}=-\dot{\theta}.\overrightarrow{U_\rho}\ \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}=\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}=v_\rho\overrightarrow{U_\rho}+v_\theta\overrightarrow{U_\theta}$$

طويلة شعاع السرعة هي $\|\vec{v}\|=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2}$;

حيث: $V_\rho=\dot{\rho}$ تسمىبالمركبة القطرية(composante radiale)

$V_\theta=\rho\dot{\theta}$تسمىبالمركبة العرضية(composante ortho radiale ou transversale)

تسمى : $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$ السرعة الزاوية (vitesse angulaire)

أو المشتق الثاني لشعاع الموضع $\vec{v}$يمكن إيجاده كما ذكرنا سابقامن المشتق الأول للسرعة

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}\right)$$

$$= \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho}.\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \dot{\rho}\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{U_\theta} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\theta}}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \ddot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{U_\rho}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)}_{\gamma_\rho}\vec{u}_\rho + \underbrace{\left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)}_{\gamma_\theta}\vec{u}_\theta$$

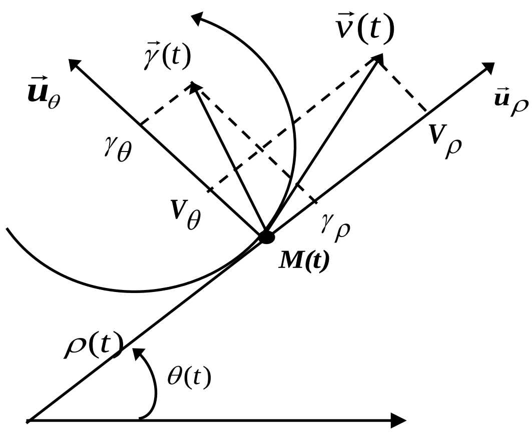
$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\text{المركبة القطرية} \\ \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\text{المركبة العموديةالقطرية} \end{cases}$$

$\ddot{\theta}$ يمثل التسارع الزاو يحيث : $\gamma = R\ddot{\theta}$

طويلة شعاع التسارع تعطى بـ:

$$\|\vec{\gamma}\ (t)\| = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})^2}$$

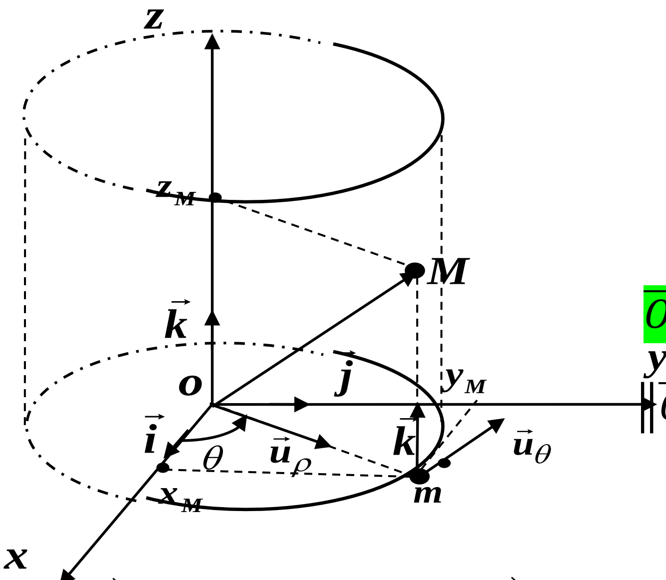
الشكل التالي يمثل فيه جميع أشعة لمعلم القطبي



معادلة المسار في الإحداثيات القطبية هي العلاقة بين ρ و θ أي $\rho = f(\theta)$.

II-3)جملة الإحداثيات الأسطوانية:

تعرف جملة الإحداثيات الأسطوانيةبـ (ρ,θ,z) في القاعدة المتعامدة و المتجانسة $(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})$.



أ) شعاع الموضع:

يكتب: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM}$

$$\overrightarrow{OM}(t)=\ \rho(t)\vec{u}_\rho+z(t)\vec{k}$$

طويلته: $\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{\rho(t)^2+z(t)^2}$

ب) شعاع السرعة:

يعطى شعاع السرعة من نسبة شعاعالإنتقال العنصري $d\overrightarrow{OM}=d\rho\vec{u}_\rho+\rho d\theta\vec{u}\rho+\ dz\vec{k}$ على dt بـ:

$$\vec{V}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho+\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

و منه :

$$\vec{V}(t)=\dot{\rho}\vec{u}_\rho+\rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta+\dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{V}(t)=V_\rho\vec{u}_\rho+V_\theta\vec{u}_\theta+V_z\vec{k}$$

طويلته: $\|\vec{V}(t)\|=\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2}$

جـ) شعاع التسارع:

باشتقاق شعاع السرعةنجد شعاع التسارع :

$$\vec{\gamma}(t)=\underbrace{(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)}_{\gamma_\rho}\vec{u}_\rho+\underbrace{(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta})}_{\gamma_\theta}\overrightarrow{u_\theta}+\underbrace{\ddot{z}}_{\gamma_z}\vec{k}$$

طويلته: $\|\vec{\gamma}(t)\|=\sqrt{\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2\right)^2+\left(\rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)^2+\ddot{z}^2}$

4-IIالإحداثيات الذاتية

عندما نعرف مسار الحركة فمن الحسن استعمال الإحداثيات الذاتية المعرفة بالخصائص التالية

$\vec{u}_T$: شعاع الوحدة المماسي للمساروبكون دائما متجه في اتجاه الحركة.

$\vec{u}_N$: هو شعاع الوحدة عمودي للمسار و ل$\vec{u}_T$:ويكون متجها نحو مركز الحركة داخل تقعر المسار   انظر لشكل

$ds-$ هو عنصر الفاصلة المنحنية بحيث ان S هي طول المساروتساوي$ds = Vdt$

أ) <u>**شعاع السرعة في الإحداثيات الذاتية**</u> :

بما أن شعاع السرعة مماسي للحركة و في اتجاه الحركة و بما أن $\vec{u}_T$ مماسي للمسار و في اتجاه الحركة فإ ن$\vec{u}_T$:   شعاع وحدة لشعا ع $\vec{v}$،إذن

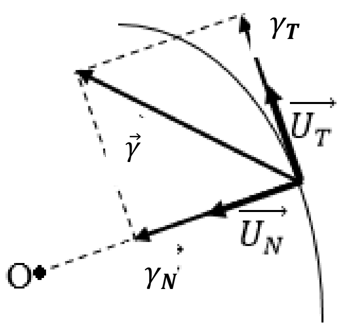
تساوي:$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}_T = V\vec{u}_T$ أي:$\|\vec{v}\| = V = \frac{ds}{dt}$

$$\vec{v} = v(t)\overrightarrow{U_T} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{U_T} = \dot{s}\overrightarrow{U_T}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} : \frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{dt}.\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{U_N}$$

$$\frac{d\overrightarrow{U_T}}{d\theta} = \overrightarrow{U_N}$$

العلاقةالتي ترط السرعة اخطية باسرعةادائرية $\boxed{v = R\omega = R\dot{\theta}}$: $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$



ج) <u>**شعاع التسارع في الإحداثيات الذاتية**</u> :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(V\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + V\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_T} + v\dot{\theta}\overrightarrow{U_N} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_T} + v.\frac{v}{R}\overrightarrow{U_N}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(t) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{U_N}} \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma}(t) = \gamma_T\overrightarrow{U_T} + \gamma_N\overrightarrow{U_N}}$$

حيث θ: زاوية الدوران اللحظي لشعاع الوحدة المماسي $\vec{u}_T$

إذن يكتب شعاع التسارع في الإحداثيات الذاتية كما يلي :

حيث: $\gamma_T = \frac{dV}{dt}$ يمثل التسارع المماسي

$\gamma_N = \frac{V^2}{\mathcal{R}}$ يمثل التسارع الناظمي

طويلة شعاع التسارع هي: $\gamma = \sqrt{{\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2}$ حيث $\mathcal{R}$ هو نصف قطر الانحناء ويساوي

$$\mathcal{R} \cdots = \frac{V^2}{\gamma_N} \quad = \frac{V^2}{\sqrt{\gamma^2 - {\gamma_N}^2}}$$

يمكن الحصول على الفاصلة المنحنية من خلال عملية التكامل، يكون لدينا:

$$\frac{ds}{dt} = V \Rightarrow ds = Vdt \Rightarrow \int_{S_0}^{S} ds = \int_0^t Vdt \Rightarrow\Rightarrow S = \int_0^t Vdt + S_0$$

مثال

تتحرك M وفق المعادلة $\rho = be^{\theta}$ مع $\theta = \omega t$; b,ω ثابتان موجبان

1- أحسب $\vec{v}$, $\vec{\gamma}$ وطويلتهما

2- جد المركبتين المماسية γ_T والناظمية γ_N لشعاع التسارع $\vec{\gamma}$ و نصف قطر الإنحناء $\mathcal{R}$

3 - أحسب طول المسار $S(\theta)$

الحل:

$$\begin{Bmatrix} \rho = be^{\theta} \\ \theta = \omega t \end{Bmatrix} => \begin{Bmatrix} \dot{\rho} = b\omega e^{\omega t} \\ \dot{\theta} = \omega \end{Bmatrix} => \begin{Bmatrix} \ddot{\rho} = b\omega e^{\omega t} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{Bmatrix}$$

1) شعاع الموضع في الاحداثيات القطبية

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{\mu\rho} = be^{\theta}\overrightarrow{\mu\rho}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\overrightarrow{\mu\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{\mu\theta}$$

$$=\omega be^{\omega t}\left(\overrightarrow{\mu\rho} + \overrightarrow{\mu\theta}\right)$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}\ \omega^2 be^{\omega t}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt} = 2\omega be^{\omega t}\ \overrightarrow{\mu\theta}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = 2\omega^2 be^{\omega t}\overrightarrow{\mu\theta}$$

التسارع المماسي $\gamma_T = \frac{dV}{dt} = \sqrt{2}\ \omega^2 be^{wt}$

التسارع الناظمي $\gamma_N = \frac{V^2}{\mathcal{R}} = \sqrt{\gamma^2 - {\gamma_N}^2} = \sqrt{2}\ \omega^2 be^{\omega t}$

نصف قطر الانحناء $R = \frac{v^2}{a_n} = \sqrt{2}\ be^{wt}$

الفاصلة المنحنية

$$S=\int vdt = \int_0^t \sqrt{2}\omega be^{wt}\ dt$$

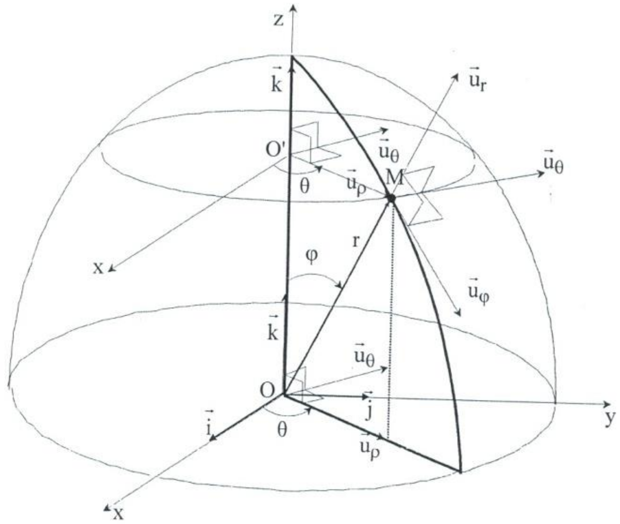
$$S= \sqrt{2}\ b(e^{\omega t} - 1)$$

5-II)جملة الإحداثيات الكروية :

الأشعة تعطى بدلالة الإحداثيات الكروية(r, φ, θ)في القاعدةالمتعامدة و المتجانسة$(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$.

أ) **شعاع الموضع**:

يعطى شعاع الموضع في الإحداثيات الكروية بـ: $\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r \Longrightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = r(t)$



ب)<u>شعاع السرعة</u>:

يمكن ايجادها انطلاقا من عنصر الإنتقال $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + rd\varphi\vec{u}_\varphi + r\sin\varphi d\theta\,\vec{u}_\theta$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi + r\sin\varphi\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{V}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r\dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta$$

$$\vec{V}(t) = \underbrace{\dot{r}}_{V_r}\vec{u}_r + \underbrace{r\dot{\varphi}}_{V_\varphi}\vec{u}_\varphi + \underbrace{\dot{\theta}r\sin\varphi}_{V_\theta}\,\vec{u}_\theta$$

طويلة شعاع السرعة هي: $\|\vec{V}(t)\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 r^2\sin^2\varphi}$

جـ) <u>شعاع التسارع</u>:هو مشتق السرعة $\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}r\sin\varphi\,\vec{u}_\theta)$$

تعطى عبارات المشتقات كالتالي: $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ ، $\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt}$ و $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$ في القاعدة: $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_\theta)$.

حيث: $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \varphi\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{u}_\theta = \frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{\partial\vec{u}_\varphi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\vec{u}_\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t} = \dot{\varphi}\frac{\partial\vec{u}_\varphi}{\partial\varphi} + \dot{\theta}\frac{\partial\vec{u}_\varphi}{\partial\theta}$$

$$= \frac{d}{dt}[\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} - \sin\varphi\,\vec{k}]$$

$$= -\dot{\varphi}\vec{u}_r + \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho = -\dot{\theta}(\sin\varphi\,\vec{u}_r + \cos\varphi\,\vec{u}_\theta)$$

و بعد التعويض نجد:

$$\vec{\gamma}(\mathrm{t}) = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\theta^2\sin^2\varphi)}_{\gamma_r}\vec{u}_r$$

$$+\underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} - r\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)}_{\gamma_\varphi}\vec{u}_\varphi$$

$$+\underbrace{\left(2\dot{r}\dot{\theta}\sin\varphi + r\ddot{o}\sin\varphi + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)}_{\gamma_\theta}\vec{u}_\theta$$

III-دراسة الحركات المختلفة :

III-1) الحركة المستقيمة المنتظمة : (Mouvement rectiligne uniforme)

نقول عن الحركة أنها مستقيمة منتظمة، إذا كان المسار مستقيم و سرعتها ثابت $\vec{V} = \overrightarrow{Cte}$ و تسارعها معدوم.

الشروط الإبتدائية وفق المحور ox هي: $t = 0; x = x_0, v = v_0$

$$v = v_0 = \frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow dx = v_0 dt$$

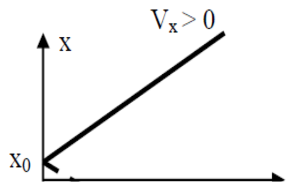
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 dt \quad \Rightarrow \quad x|_{x_0}^{x} = x - x_0 = v_0 t|_0^t = v_0(t-0)$$

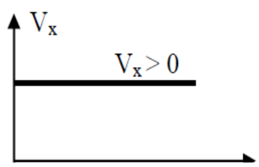
$$\boxed{x(t) = v_0 t + x_0}$$

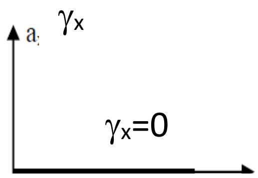
$$\gamma = \frac{dv}{dt} = 0$$

تسمى $x = v_0 t + x_0$: بالمعادلة الزمنية للحركة

<u>مخططات الحركة</u> :







2- الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام (Mouvement uniformément varie): تكون حركة نقطة مادية مستقيمة متغيرة بانتظام إذا كان المسار مستقيما و شعاع التسارع ثابتا أي $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_0 = \overrightarrow{cte}$.

باعتبار الشروط الإبتدائية :، $t = 0\, s\, ;\, x = x_0 ;\, v = v_0$.

$$\gamma = \gamma_0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = \gamma_0 dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t \gamma_0\, dt \Rightarrow v|_{v_0}^{v} = \gamma_0 t|_0^t$$

$$v - v_0 = \gamma_0(t-0) = at \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v(t) = \gamma_0 t + v_0}}$$

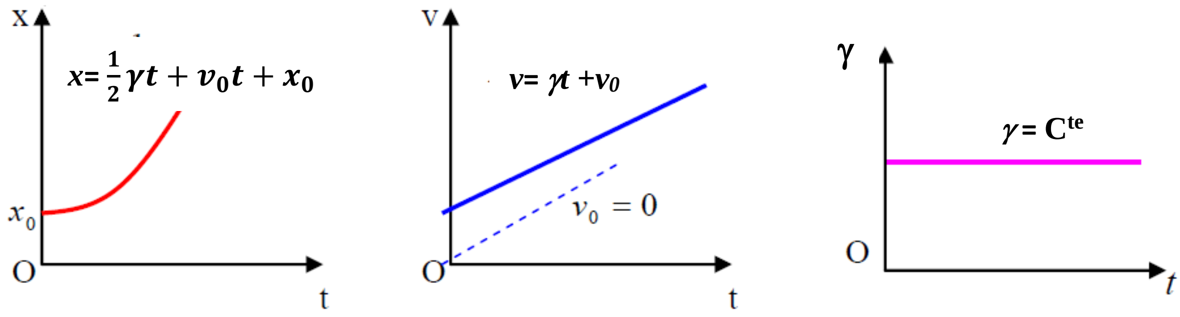
المعادلة الزمنية للحركة هي

$$v = \frac{dx}{dt} = \gamma_0 t + v_0 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (\gamma_0 t + v_0)\, dt$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0}$$

γمخططات الحركة :



نقول عن الحركة أنها:

- حركة متسارعة إذاكان: $\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$
- حركة متباطئة إذا كان: $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$

ملاحظة بما ان التسارع ثابت نستعمل المعادلة التالية لهذا النوع من الحركة و هي:

$$v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$$

2-III الحركة الدائرية: (Mouvement circulaire)

مسارها دائري أي دائرة نصف قطرها R و مركزها "O"، و يمكن دراسة الحركة في الإحداثيات القطبية أو الذاتية:

أ) الحركة الدائرية المنتظمة(Mouvement circulaire uniforme)

الحركة الدائرية المنتظمة شدة السرعة ثابتة ثابت $= \|\vec{V}(t)\|$، و بالتالي التسارع المماسي معدوم أي$0 = \gamma_T = \frac{dV}{dt}$:

$$V = r\omega = cte = .\dot{\theta} = cte = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \gamma_\theta = \gamma_T = 0$$

و عليه يكتب :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_\rho$$

$$\begin{cases} \vec{V} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_T \\ \vec{\gamma} = -R\omega^2\vec{u}_\rho = R\omega^2\vec{u}_N \end{cases}$$

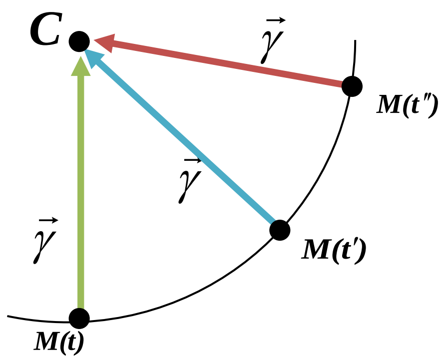
حيث نعرف سرعة الزاوية ω. وحدتها الراديان على الزمن [rad/s]:.

<u>ملاحظة</u> في الحركة الدائرية نصف قطر الانحناء ينطبق على نصف قطر الدائرة

III-3-الحركة ذات التسارع المركزي:مركز التسارعات(Centre d'accélération)

تكون الحركة ذات تسارع مركزي اذا كان في كل لحظة شعاع التسارع $\vec{\gamma}$ يتجه نحو نقطة ثابتةc، المسمات مركز التسارعات العلاقة

$$:\overrightarrow{CM} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0} \qquad \overrightarrow{CM} \,//\, \vec{\gamma}$$



<u>ملاحظة</u> الحركة الدائرية المنتظمة هي حركة ذات تسارع مركزي لأن مهما تكن : $\overrightarrow{OM}//\vec{\gamma}$

<u>مثال 1</u>:

تعرف حركة نقطة مادية قي المعلم الديكارتي بالمعادلتين الزمنيتن :

$$x(t) = a\cos\,\omega t$$
$$y(t) = a\,sin\,\omega t$$

1–ما هو شكل المسار ؟

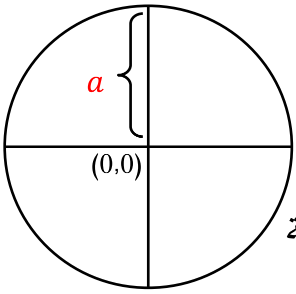
2– احسب شعاع السرعة والتسارع لنقطة M ذات في الاحداثيات القطبية.

هل الحركة ذات التسارع مركزي؟علل؟

<u>**الجواب :**</u>

لإيجاد معادلة المسار ، لدينا :

$$\Rightarrow \cos\,\omega t^2 + \sin\omega t\ ^2 = \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1 \begin{cases} \cos\omega t = \frac{x}{a} \\ \sin\omega t = \frac{y}{a} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

المسار عبارة عن دائرة نصف قطرها a و مركزها (0,0).

شعاع السرعة والتسارع لنقطة M ذات في الاحداثيات القطبية

نبحث عن شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$

$$= a\ \rho\vec{u}_\rho$$

شعاع السرعة $\vec{V} = 0\vec{u}_\rho - a\omega\vec{u}_\theta$

شعاع التسارع $\vec{\gamma} = \frac{d(-a\omega\vec{u}_\theta)}{dt}$

$$= a\omega^2.\vec{u}_\rho$$

نلاحظ بان $\Rightarrow \overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma} = \vec{0}\vec{\gamma}//\overrightarrow{OM}$

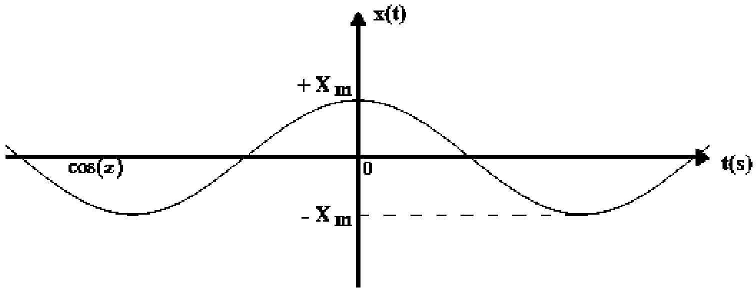
فالحركة إذا ذات تسارع مركزي ومركز التسارعات هو o

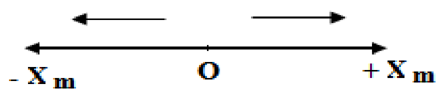
III-4الحركة الجيبية التوافقية المستقيمة: (الحركة الاهتزازية)

ناخذ حالة حركة الجيبية للجسم على المستقيم ox بحيث تكون المعادلة الزمنية لحركتها على إحدى الشكلين:

$$x(t) = x_m\cos(\omega t + \varphi)$$

$x(t) = x_m \sin(\omega t + \varphi)$: أو





المسار عبارة عن قطعة القطعة مستقيمة طولها $2X_m$

حيث:

x: السعة اللحظية أو الفاصلة (Abscisse instantanée)

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$:نبض الحركة (Pulsation)، وحدته هي [rad/s]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: دور الحركة وتمثل الزمن الخاص ب اهتزاز واحدة

x_m:سعة الحركة أو الأعظمي(Amplitude maximale)

f : تواتر الحركة (Fréquence)

φ:الصفحة الإبتدائية (Phase initiale)

<u>السرعة</u>: نشتق المعادلة الزمنية $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ فنجد:

$$v(t) = \dot{x} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$$

<u>التسارع</u> : نشتق معادلة السرعة $a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ فنجد:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)) = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

نلاحظ بان التسارع يتناسب طردا مع الفاصلة اللحظية x ويعاكسه في الاتجاه. عكس السرعة، ينعدم التسارع عند مرور المتحرك من موضع التوازن (مبدأ الفواصل) ويكون أعظميا عند السعةالأعظمية

$$a=-\omega^2 x(t) \Leftrightarrow \ddot{x}=-\omega^2 x(t) \Rightarrow \boldsymbol{\ddot{x}+\omega^2 x=0}$$

$$\boldsymbol{x(t)=\ X_m\cos(\omega t+\varphi)}$$