المنطق الرياضي و أنماط البرهان

Logique et raisonnements mathématiques

تعريف المنطق: المنطق هو مجموعة من القوانين بها يعرف الصحيح من الخطأ في الفكر الانساني.

تعريف القضية Proposition: كل جملة يمكن الحكم عليها أنها صحيحة أو خاطئة تسمى قضية.

ترميز:

- يرمز عادة للقضايا بالرمز p, q, s, r...
- و كل قضية صحيحة يرمز لها بالرمز V أو 1.
- و كل قضية خاطئة يرمز لها بالرمز F أو 0.
- و يرمز لنفي القضية p بالرمز $\overline{p}$.

ملاحظة: إذا كانت القضية p صحيحة فإن نفيها $\overline{p}$ يكون خاطئا و العكس.

الروابط المنطقية Les connecteurs logiques:

القضايا إما أن تكون بسيطة و هي التي تتكون من قضية واحدة فقط، و إما أن تكون مركبة و هي التي تتكون من قضيتين او اكثر و لهذا تحتاج إلى الربط فيما بينها و تسمى هذه الروابط بالروابط المنطقية و هي:

1. **الوصل La conjonction:** و هي الواو و يرمز لها بالرمز $\wedge$ و هي تربط بين قضيتين q و p للحصول على قضية جديدة و مركبة و هي $p \wedge q$ و تكون هذه الاخيرة صحيحة في حالة واحدة فقط إذا كانت كل من q و p صحيحتين معا و تكون خاطئة في بقية الحالات.
2. **الفصل La disjonction:** و هي أو و يرمز لها بالرمز $\vee$ و هي تربط بين قضيتين q و p للحصول على قضية جديدة و مركبة و هي $p \vee q$ و تكون هذه الاخيرة خاطئة في حالة واحدة فقط إذا كانت كل من q و p خاطئتين معا و تكون صحيحة في باقي الحالات.
3. **الاستلزام L'implication:** و يرمز لها بالرمز $\Longrightarrow$ و هي تربط بين قضيتين q و p للحصول على قضية جديدة و مركبة و هي $p \Longrightarrow q$ و تكون هذه الاخيرة خاطئة في حالة واحدة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة (أي قضية صحيحة تستلزم قضية خاطئة) وتكون صحيحة في باقي الحالات.
   ملاحظة: إذا كان لدينا $p \Longrightarrow q$ فإن:
   - $q \Longrightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي Implication réciproque.
   - $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ يسمى العكس النقيض Contraposée d'une implication.
4. **التكافؤ L'équivalence:** تسمى القضية المركبة التالية $(q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow q)$ بالتكافؤ بين القضيتين q و p و نرمز له بالرمز $\Leftrightarrow$ و تكون صحيحة إذا كانت القضيتين q و p صحيحتين أو خاطئتين معا.

جدول الحقيقة: نلخص ما سبق في جدول يسمى بجدول الحقيقة حيث كما اشرنا نرمز بـ 1 للقضية الصحيحة و بـ 0 للقضية الخاطئة:

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$ $(\overline{p} \vee q)$	$p \Leftrightarrow q\big((q \Longrightarrow p) \wedge (p \Longrightarrow q)\big)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

خواص الروابط المنطقية:

a) الامتصاص Propriété d'absorption:

$$p \wedge p \Leftrightarrow p \text{ و } p \vee p \Leftrightarrow p$$

b) **التبديل *La* commutativité:**

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \text{ و } p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

<u>**ملاحظة:**</u> الاستلزام غير تبديلي على غرار التكافؤ فهو تبديلي.

c) **التجميع L'associativité:**

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \text{ و } (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

d) **التوزيعية *La* distributive:**

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \text{ و } p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

e) **العنصر الحيادي L'élément neutre:** نرمز بـ V لقضية صحيحة دوما و بـ F لقضية خاطئة دوما لدينا:

$$V \wedge p \Leftrightarrow p \text{ و } F \vee p \Leftrightarrow p$$

f) **نفي الوصل و الفصل:** نفي الوصل بين قضيتين هو الفصل بين نفييهما و نفي الفصل هو الوصل بين نفييهما كما ان نفي نفي القضية هي القضية نفسها.

$$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p \text{ و } \overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q} \text{ و } \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$$

<u>**تمرين:**</u> باستعمال جدول الحقيقة برهن صحة القضية التالية:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$$

<u>**ملاحظة:**</u>

- $\overline{p} \vee p$ هي قضية دوما صحيحة.
- $\overline{p} \wedge p$ هي قضية دوما خاطئة.

<u>**الجملة المفتوحة La forme proportionnelle**</u>:

و هي تعابير رياضية تشمل متغيرا x أو أكثر حيث هذا المتغير x ينتمي الى المجموعة A و هي ليست قضية إلا إذا أعطينا قيمة ثابتة للمتغير x بعبارة أخرى لا يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ إلا إذا أعطينا قيمة ثابتة لـ x.

<u>**مثال:**</u>

$$x \in \mathbb{N}: x \geq 5$$

و نكتب:

$$x \in \mathbb{N}: P(x)$$

و هي ليست قضية لأنه لا يمكننا الحكم عليها بالصحة أو الخطأ إلا إذا أعطينا قيمة ثابتة للمتغير x فتكون صحيحة من أجل $x = 6$ و خاطئة من أجل $x = 3$.

<u>**المكممات Les quantificateurs:**</u>

الجمل المفتوحة تصبح قضايا إذا أدخلنا عليها إحدى المؤثرات الرياضية التي نطلق عليها اسم المكممات و هي نوعان:

- <u>**المكمم العام Quantificateur universel:**</u> و يرمز له بالرمز $\forall$ و يقرأ مهما يكن أو من أجل كل العناصر.
فإذا كانت لدينا جملة مفتوحة $x \in A: P(x)$ و أدخلنا عليها المكمم الكلي أو العام تصبح قضية يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ أي أن $\forall x \in A: P(x)$ هي قضية تكون صحيحة إذا كانت $P(x)$ محققة من أجل كل العناصر x من المجموعة A و تكون خاطئة إذا وجد عنصر x من المجموعة A حيث $P(x)$ غير محققة.
- <u>**المكمم الوجودي Quantificateur existentiel:**</u> و يرمز له بالرمز $\exists$ و يقرأ يوجد على الاقل

فإذا كانت لدينا جملة مفتوحة $x \in A: P(x)$ و أدخلنا عليها المكمم الوجودي تصبح قضية يمكن الحكم عليها بالصحة أو الخطأ أي أن $\exists x \in A: P(x)$ هي قضية تكون صحيحة إذا كانت $P(x)$ محققة من أجل بعض العناصر x من المجموعة A و تكون خاطئة إذا كانت $P(x)$ غير محققة من أجل كل العناصر x من المجموعة A.

<u>ملاحظة:</u> يمكن أن يكون في نفس الجملة المفتوحة كل من المكمم العام و المكمم الوجودي و في هذه الحالة ترتيب المكممات له أهميته.

<u>نفي قضية مكممة:</u> نفي المكمم العام هو المكمم الوجودي و نفي المكمم الوجودي هو المكمم العام أي:

$$\overline{\forall x \in A: P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in A: \overline{P(x)} \text{ و } \overline{\exists x \in A: P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in A: \overline{P(x)}$$

$$\text{و } \overline{\forall x \in A; \exists y \in A: P(x,y)} \Leftrightarrow \exists x \in A; \forall y \in A: \overline{P(x,y)}$$

$$\overline{\exists x \in A; \forall y \in A: P(x,y)} \Leftrightarrow \forall x \in A; \exists y \in A: \overline{P(x,y)}$$

<u>أنماط البرهان Le raisonnements mathématiques:</u> و يقصد بها طرق البرهان على صحة القضايا و هي متنوعة و عديدة نذكر منها:

1) **<u>البرهان المباشر Raisonnement direct :</u>** إذا أردنا أن نبرهن على صحة القضية $p \Longrightarrow q$ ننطلق من كون p صحيحة و نبين بأن القضية q صحيحة و هي الطريقة المعتادة في البرهان.
<u>مثال:</u> بين انه إذا كان $a, b \in \mathbb{Q}$ فإن $a + b \in \mathbb{Q}$ أي بين صحة القضية:
$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \Longrightarrow a + b \in \mathbb{Q}$$
أي نبرهن أن $a + b$ هو عدد كسري علما ان b و a هي أعداد كسرية.
البرهان يترك للطالب على شكل تمرين.

2) **<u>البرهان حالة بحالة أو الفصل Disjonction ou cas par cas:</u>** للبرهان على صحة القضية $\forall x \in E: P(x)$ نلجأ في كثير من الحالات الى تقسيم المجموعة E إلى مجموعتين او أكثر فمثلا نقسم المجموعة E إلى مجموعتين A و B فنبرهن صحة $P(x)$ من أجل $x \in A$ ثم نبرهن صحة $P(x)$ من أجل $x \in B$ يسمى هذا النمط من البرهان بالفصل او حالة بحالة.
<u>مثال:</u> بين انه:
$$\forall x \in \mathbb{R}: |x - 1| \leq x^2 - x + 1$$
من الواضح ان:
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1; & x \geq 1 \\ -x + 1; & x < 1 \end{cases}$$
لهذا وجب علينا تقسيم المجال $\mathbb{R}$ إلى مجموعتين أو مجالين هما $]-\infty, 1[$ و $[1, +\infty[$ ثم نبرهن العلاقة السابقة.
البرهان يترك للطالب على شكل تمرين.

3) **<u>البرهان بالعكس النقيض Le raisonnement par la contraposée :</u>** نعلم جيدا ان:
$$(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$$
لهذا فبدلا من ان نبرهن على ان $p \Longrightarrow q$ نبرهن أن $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ و تسمى هذه الطريقة بطريقة العكس النقيض.
<u>مثال:</u> بين صحة العلاقة التالية: n زوجي $\Longrightarrow$ ^{2} زوجي
في هذه الحالة نستعمل عكس النقيض أي نأخذ العلاقة:
$$\left(\overline{n \text{ زوجي}} \Longrightarrow \overline{n^2 \text{ زوجي}}\right) \Leftrightarrow \left(n \text{ فردي} \Longrightarrow n^2 \text{ فردي}\right)$$
البرهان يترك للطالب كتمرين.

4) **<u>البرهان بنقض الفرض Le raisonnement par l'absurde:</u>** للبرهان على صحة القضية $p \Longrightarrow q$ ننطلق من كون القضية الاولى p صحيحة بينما القضية الثانية q خاطئة فنحصل على تناقض إما تناقض عام أو تناقض مع إحدى المعطيات و في هذه الحالة نستنتج مباشرة ان الفرض الذي انطلقنا منه خاطئ و بالتالي فإن صحة القضية p يستلزم صحة القضية q و بالتالي القضية $p \Longrightarrow q$ صحيحة.
<u>مثال:</u> ليكن $a, b \geq 0$ بين صحة القضية التالية:

$$\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}\Longrightarrow a=b$$

باستعمال البرهان بنقيض الفرض (يترك للطالب).

5) **البرهان بإعطاء مثال مضاد Le raisonnement par un contre-exemple:** للبرهان على ان القضية $\forall x\in E: P(x)$ خاطئة يكفي ايجاد عنصر $x\in E$ لا يحقق العلاقة $P(x)$ و تسمى هذه الطريقة بالمثال المضاد.

مثال: بين أن القضية التالية خاطئة:

$$\forall x\in\mathbb{R}: 1<sinx<-1$$

6) **البرهان بالتراجع Le raisonnement par récurrence:** إذا كانت خاصية ما متعلقة بعدد طبيعي $n\in\mathbb{N}$ في هذه الحالة نبرهن على صحة القضية باستعمال البرهان بالتراجع و يتم هذا عن طريق ثلاث مراحل:

- المرحلة الاولى: البرهان على صحة الخاصية من اجل القيمة الابتدائية $n_0\in\mathbb{N}$.
- المرحلة الثانية: نفرض صحة الخاصية من اجل n.
- المرحلة الثالثة: نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$.

في النهاية نستنتج صحة القضية من أجل أي عدد طبيعي n.

مثال: باستعمال البرهان بالتراجع برهن صحة القضية التالية:

$$\forall n\in\mathbb{N}: 2^n>n$$

يترك للطالب.

سلسلة تمارين

التمرين الاول: باستعمال جدول الحقيقة بين أن الوصل توزيعي على الفصل:

التمرين الثاني: لتكن

$$\exists x \in \mathbb{R};\ \forall y \in \mathbb{R}: x + y > 0 \text{ و } \exists x \in \mathbb{R};\ \forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x$$

هل هذه العلاقات صحيحة؟ أعط نفيها.

التمرين الثالث: ليكن f تابع معرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ باستعمال المكممات ترجم العبارات التالية:

- f تابع محدود من الاعلى.
- f لا ينعدم مطلقا.
- f تابع متزايد.

التمرين الرابع: باستعمال البرهان بالتراجع برهن صحة القضايا التالية:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ و } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ n \in \mathbb{N}^*$$

التمرين الخامس: نذكر أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

- بين أنه إذا كان $a, b \in \mathbb{N}$ فإن:

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow a = b = 0$$

- استنتج انه إذا كان $a, b, m, n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$a + b\sqrt{2} = m + n\sqrt{2} \Leftrightarrow a = m \ \wedge b = n$$

التمرين السادس:

- بين أن مجموع عددين أحدها كسري أي ينتمي الى المجموعة $\mathbb{Q}$ و الاخر غير كسري أي لا ينتمي الى $\mathbb{Q}$ هو عدد غير كسري.
- بين أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

حـل سلسـلـة التـمــاريـن

حل التمرين الاول: باستعمال جدول الحقيقة بين أن الوصل توزيعي على الفصل

لتكن r, q, p ثلاث قضايا و لنبرهن أن $p \wedge (q \vee r)$ و $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ متكافئتان أي صحيحتان معا أو خاطئتان معا:

				A			B	
p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

و منه فإن القضية صحيحة.

حل التمرين الثاني:

$$\exists x \in \mathbb{R};\ \forall y \in \mathbb{R}: x + y > 0$$

هي قضية خاطئة لان نفيها

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \exists y \in \mathbb{R}: x + y \leq 0$$

هي قضية صحيحة حيث من أجل أي عنصر x من $\mathbb{R}$ يوجد دائما $y \in \mathbb{R}$ إذ يكفي أخذ $y = -x - 1$ فنجد بسهولة أن $x + y = x + (-x - 1) = -1 \leq 0$.

أما بالنسبة للقضية

$$\exists x \in \mathbb{R};\ \forall y \in \mathbb{R}: y^2 > x$$

فهي صحيحة دائما لأنه يكفي أخذ أي قيمة سالبة لـ x و نعلم ان مربع أي عدد هو عدد موجب أو معدوم و هو دوما أكبر من أي عدد سالب و بالتالي و بأخذ $x = -1$ نجد أن $\forall y \in \mathbb{R}: y^2 > -1$ و نفيها هو

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \exists y \in \mathbb{R}: y^2 \leq x$$

و هي قضية خاطئة.

حل التمرين الثالث:

- f تابع محدود من الاعلى $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R}: f(x) \leq A$
- f لا ينعدم مطلقا $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: f(x) \neq 0$
- f تابع متزايد $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}: x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$

حل التمرين الرابع: باستعمال البرهان بالتراجع نبرهن صحة القضية التالية:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\ ; n \in \mathbb{N}^*$$

من أجل $n = 1$ نجد بسهولة:

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$$

و منه العلاقة محققة من أجل $n = 1$ نفرض الان صحتها من أجل n أي أن $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة و نبرهن أنها صحيحة من أجل $n + 1$ أي نبرهن أن $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

و هو المطلوب و بالتالي فإن العلاقة المعطاة صحيحة من أجل اي عدد طبيعي غير معدوم $n \in \mathbb{N}^*$.

و الان نبرهن بالتراجع صحة القضية التالية:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; n \in \mathbb{N}^*$$

من أجل $n = 1$ نجد بسهولة:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} \Leftrightarrow 1 = 1$$

و منه العلاقة محققة من أجل $n = 1$ نفرض الان صحتها من أجل n أي أن $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ صحيحة و نبرهن أنها صحيحة من أجل $n + 1$ أي نبرهن أن $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2}$

لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6}$$

لدينا:

$$n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + n + 6n + 6 = (n+2)(2n+3)$$

و منه نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2}$$

و هو المطلوب و بالتالي فإن العلاقة المعطاة صحيحة من أجل اي عدد طبيعي غير معدوم $n \in \mathbb{N}^*$;.

حل التمرين الخامس:

- نبين من أجل $a, b \in \mathbb{N}$ أن:

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow a = b = 0$$

نبرهن على ذلك باستعمال عكس النقيض أي نفرض أن $a \neq b \neq 0$ في هذه الحالة نجد ان:

$$a + b\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow \sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

و هذا تناقض مع كون $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ و بالتالي الفرض خاطئ و منه فإن $a = b = 0$ أي ان القضية صحيحة

- من خلال ما سبق نستنتج أنه إذا كان $a, b, m, n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$a + b\sqrt{2} = m + n\sqrt{2} \Leftrightarrow a = m \ \wedge b = n$$

الاستلزام الاول بديهي و لا يحتاج الى برهان أي ان:

$$a = m \ \wedge b = n \Rightarrow a + b\sqrt{2} = m + n\sqrt{2}$$

صحيحة دوما. نبرهن الان الاستلزام العكسي أي:

$$a + b\sqrt{2} = m + n\sqrt{2} \Rightarrow a = m \ \wedge b = n$$

$$a + b\sqrt{2} = m + n\sqrt{2} \Longrightarrow a + b\sqrt{2} - m - n\sqrt{2} = 0 \Longrightarrow (a - m) + (b - n)\sqrt{2} = 0$$

حسب ما سبق نستنتج أن $a - m = 0$ و $b - n = 0$ و منه نجد ان $a = m$ و $b = n$.

حل التمرين السادس:

- بين أن مجموع عددين أحدها كسري أي ينتمي الى المجموعة $\mathbb{Q}$ و الاخر غير كسري أي لا ينتمي الى $\mathbb{Q}$ هو عدد غير كسري أي:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$$

نبرهن على ذلك بعكس الفرض أي نفرض ان $x + y \in \mathbb{Q}$ علما أن $x \in \mathbb{Q}$ و $y \notin \mathbb{Q}$ لهذا نضع:

$$z = x + y \Longrightarrow y = z - x \Longrightarrow y = z + (-x) \in \mathbb{Q}$$

لأن $\mathbb{Q}$ مستقرة بالنسبة لعملية الجمع و بالتالي نحصل على تناقض مع كون $y \notin \mathbb{Q}$ ومنه نستنتج صحة القضية:

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$$

- نبرهن أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
نفرض العكس أي نفرض أن $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ و بالتالي يكون لدينا:

$$\exists p, q \in \mathbb{N}: \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

حيث أن العددين q و p أوليان فيما بينها و بالتالي أحدهما أكيد عدد فردي

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2q^2 = p^2$$

p زوجي لأن p^2 زوجي و بالتالي يوجد عدد طبيعي k حيث أن $p = 2k \Longrightarrow p^2 = 4k^2$ و منه

$$2q^2 = p^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$$

من العبارة الأخيرة نستنتج أن q^2 هو عدد زوجي و بالتالي فإن q هو عدد زوجي و هذا تناقض مع كون q و p أوليان فيما بينها و منه فإن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

المـجـمـوعـات العـلاقـات التـطـبـيـقـات

Ensembles, Relations, Applications

I. المـجـمـوعـات

مفاهيم عامة:

1. المجموعة هي عبارة عن قائمة أشياء تجمعهم نفس الخاصية و يرمز لها بأحرف كبيرة A, B, C, D...
2. الأشياء الموجودة داخل مجموعة ما تسمى عناصر المجموعة و يرمز لها بأحرف صغيرة a, b, c, d...
3. العلاقة بين المجموعة و عناصرها هي علاقة انتماء أي أن العنصر إما ينتمي للمجموعة و نكتب $\in$ أو لا ينتمي للمجموعة و نكتب $\notin$.
4. المجموعة إما أن تكتب بذكر جميع عناصرها أو بذكر الخاصية التي تجمع هذه العناصر.

مثال:

$$\mathrm{A} = \{1, -1, 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x^2 - 1) = 0\}$$

5. المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر تسمى مجموعة خالية و يرمز لها بالرمز $\{\ \}$ أو $\emptyset$.
6. المجموعة قد تكون منتهية العدد و قد تكون غير منتهية العدد.
7. المجموعة الغير منتهية قد تكون قابلة للعد و هي التي يمكن ربط عناصرها بمجموعة الاعداد الطبيعية و قد تكون غير قابلة للعد.

العلاقة بين المجموعات:

حين نقارن بين مجموعتين فإما أن إحداهما جزء من الأخرى و بالتالي تكون العلاقة علاقة احتواء و إما أنهما متطابقتان و في هذه الحالة نقول انهما متساويتان و إما أنهما منفصلتان.

1. **الاحتواء:** نقول عن المجموعة A أنها محتواة في المجموعة B أو جزء منها إذا كان كل عنصر x من A ينتمي الى المجموعة B و نكتب $A \subset B$ أو $A \subseteq B$ أي:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

ملاحظة: للبرهان ان $A \not\subset B$ يكفي ايجاد عنصر x من A لا ينتمي الى المجموعة B.

نتيجة: من خلال التعريف نستنتج أن أي مجموعة تكون محتواة في نفسها (كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها) كما أن المجموعة الخالية هي جزء من اية مجموعة أخرى.

2. **المساواة:** إذا كانت المجموعة A جزء من المجموعة B و المجموعة B جزء من المجموعة A في هذه الحالة نقول عن المجموعتان A و B أنهما متساويتان و نكتب $A = B$ أي:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

عمليات على المجموعات: ليكن A و B مجموعتان.

1) **التقاطع:** المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة بين A و B تسمى تقاطع المجموعتين A و B و نرمز لها بالرمز $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ أي ان:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

2) **الاتحاد:** المجموعة المؤلفة من العناصر المشتركة و الغير مشتركة بين A و B تسمى إتحاد المجموعتين A و B و نرمز لها بالرمز $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ أي ان:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

خواص:

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset A \wedge \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$$
$$A \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \wedge \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$$
$$\mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$$
$$\mathrm{A} \cup \emptyset = \mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup B = B \cup A \wedge A \cap B = B \cap A$$

أي أن التقاطع و الاتحاد هما عمليتان تبديليتان.

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\wedge(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

أي ان التقاطع و الاتحاد تجمعيتان.

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\wedge A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

أي ان التحاد توزيعي على التقاطع و العكس.

3) **الفرق:** نسمي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A و لا تنتمي إلى المجموعة B بالفرق بين المجموعتين A و B و نرمز لها بالرمز $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}$ أو $\mathrm{A}-\mathrm{B}$ و نكتب:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{x: x\in A\wedge x\notin B\}$$

4) **الفرق التناظري:** نسمي مجموعة العناصر الموجودة في $A\cup B$ و غير موجودة في $A\cap B$ بالفرق التناظري بين المجموعتين A و B و نرمز لها بالرمز $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$ و نكتب:

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}=(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$$

خواص:

$$A-(A-B)=A\cap B$$
$$A-B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B$$
$$A-A=\emptyset$$
$$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$$
$$A\Delta\emptyset=\emptyset\Delta A=A\wedge A\Delta A=\emptyset$$
$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}=\mathrm{B}\Delta\mathrm{A}$$

متممة مجموعة Complémentaire:

لتكن E مجموعة و $A\subset E$ نقول عن المجموعة $A-E$ بأنها متممة المجموعة A بالنسبة للمجموعة E و نرمز لها بالرمز $\overline{}$ أو $_EA$ أو فقط إن لم يكن هناك خلط بين المجموعات CA و نكتب:

$$C_EA=\{x: x\in E\wedge x\notin A\}$$

خواص:

$$C_E(C_EA)=A$$

$$C_EE=\emptyset\wedge C_E\emptyset=E$$

$$A\subset B\Leftrightarrow C_EB\subset C_EA$$

$$C_E(A\cap B)=C_EA\cup C_EB\wedge C_E(A\cup B)=C_EA\cap C_EB$$

مجموعة أجزاء مجموعة:

لتكن E مجموعة كيفية فإن المجموعة التي تحوي كل المجموعات الجزئية من E تسمى مجموعة أجزاء المجموعة E و يرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(E)$ أي:

$$\mathcal{P}(E)=\{X: X\subset E\}$$

مثال:

$$E=\{a,b,c\}$$

$$\mathcal{P}(E)=\big\{\emptyset,E,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\big\}$$

ملاحظة: محموعة أجزاء مجموعة غير خالية ($\mathcal{P}(E)\neq\emptyset$) لأنها تحوي على الأقل على المجموعة الخالية.

$$\{a\} \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow \{a\} \subset E \Leftrightarrow a \in E$$

الجداء الديكارتي Le produit cartésien:

لتكن المجموعتين A و B فإن المجموعة التي تضم كل الثنائيات (x,y) حيث x ينتمي إلى A و y ينتمي إلى B تعرف بالجداء الديكارتي للمجموعتين A و B و نرمز له بالرمز $A \times B$ أي:

$$A \times B = \{(x,y): x \in A \wedge y \in B\}$$

ملاحظة: الجداء الديكارتي بين المجموعات غير تبديلي أي $A \times B \neq B \times A$ و في حالة التساوي لدينا:

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$$

خواص:

$$A \subset E \wedge B \subset F \Leftrightarrow A \times B \subset E \times F$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \wedge A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

$$A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$

ملاحظة: إذا كان $A = B$ فإننا نضع $A \times B = A \times A = A^2$.

تعميم: يمكن تعميم الجداء الديكارتي إلى عدد منتهي من المجموعات أي إذا كان لدينا $E_1, E_2, \dots, E_n$ فإن:

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 \in E_1 \wedge x_2 \in E_2 \dots \wedge x_n \in E_n\}$$

II. العـلاقـات Les relations

في هذه الفقرة سنتحدث عن علاقة العناصر من نفس المجموعة فيما بينها لهذا نأخذ A مجموعة غير خالية $(A \neq \emptyset)$ و نأخذ $G \subset A^2$ حيث كل عنصر $(x,y) \in G$ تربط بينهما علاقة معينة نرمز لها غالبا بالرمز $\Re$ و بالتالي يكون لدينا:

$$\mathrm{G} = \{(x,y) \in A^2 : x\Re \mathrm{y}\}$$

مثال: كل تابع حقيقية بمتغير حقيقي هو عبارة عن علاقة بين العنصر x و صورته y بواسطة التابع حيث G في هذه الحالة هو بيان التابع.

أنواع العلاقات: لتكن $A \neq \emptyset$ و لتكن $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة A لدينا:

a) **انعكاسية:** نقول عن العلاقة $\Re$ أنها إنعكاسية إذا كان كل عنصر x من A على علاقة مع نفسه أي:

$$\forall x \in A: x\Re x$$

b) **تناظرية:** نقول عن العلاقة $\Re$ أنها تناظرية إذا كان كل عنصر x من A على علاقة مع عنصر y فحتما يكون y على علاقة مع العنصر x أي:

$$\forall x,y \in A: x\Re y \Longrightarrow y\Re x$$

c) **ضد تناظرية:** نقول عن العلاقة $\Re$ أنها ضد تناظرية إذا كان x على علاقة مع y و y على علاقة مع العنصر x فإن x و y متساويان أي:

$$\forall x,y \in A: x\Re y \wedge y\Re x \Longrightarrow x = y$$

d) **متعدية:** نقول عن العلاقة $\Re$ أنها متعدية إذا كان x على علاقة مع y و y على علاقة مع العنصر z فإن x على علاقة مع العنصر z أي:

$$\forall x, y \in A: x\Re y \wedge y\Re z \Longrightarrow x\Re z$$

مثال: لتكن $E \neq \emptyset$ و لتكن $\mathcal{P}(E)$ مجموعة أجزاء المجموعة و لنعرف العلاقة $\Re$ المعرفة كما يلي:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E): A\Re B \Leftrightarrow A \subset B$$

1. $\Re$ هي علاقة انعكاسية لأن كل مجموعة محتواة في نفسها أي:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E): A\Re A \Leftrightarrow A \subset A$$

2. $\Re$ هي علاقة ضد تناظرية لأن:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E): A\Re B \wedge B\Re A \Longrightarrow A = B?$$

$$A\Re B \Leftrightarrow A \subset B \dots\dots\dots (1)$$

$$B\Re A \Leftrightarrow B \subset A \dots\dots\dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $A = B$.

3. $\Re$ هي علاقة متعدية لأن الاحتواء متعدي أي:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E): A\Re B \wedge B\Re C \Longrightarrow A\Re C?$$

$$A\Re B \Leftrightarrow A \subset B \dots\dots\dots (1)$$

$$B\Re C \Leftrightarrow B \subset C \dots\dots\dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $A \subset B \subset C$ و منه فإن $A \subset C$ أي $A\Re C$.

A. **علاقة التكافؤ *La relation d'équivalence*:** لتكن $A \neq \emptyset$ و لتكن $\Re$ علاقة معرفة على المجموعة A, نقول عن العلاقة $\Re$ أنها علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- $\Re$ إنعكاسية.
- $\Re$ تناظرية.
- $\Re$ متعدية.

مثال: ليكن p عددا طبيعيا غير معدوم. في $\mathbb{Z}$ مجموعة الاعداد الصحيحة نعرف العلاقة التالية:

$$x\Re y \Leftrightarrow x \equiv y(modp) \Leftrightarrow x - y \text{ يقسم } p$$

هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ لأن:

- $\Re$ إنعكاسية لأن:

$$\forall x \in \mathbb{Z}: x - x = 0 \times p$$

أي ان p يقسم العدد $x - x$ $x \equiv x(modp)$.

- $\Re$ تناظرية لأن:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}: x\Re y \Longrightarrow y\Re x?$$

$$x\Re y \Leftrightarrow x \equiv y(modp) \Leftrightarrow x - y \text{ يقسم } p \Leftrightarrow -(y - x) \text{ يقسم } p$$

$$\Leftrightarrow (y - x) \text{ يقسم } p \Leftrightarrow y \equiv x(modp) \Leftrightarrow y\Re x$$

- $\Re$ متعدية لأن:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}: x\Re y \wedge y\Re z \Longrightarrow x\Re z?$$

$$x\Re y \Leftrightarrow x \equiv y(modp) \Leftrightarrow x - y \text{ يقسم } p \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: x - y = kp \dots\dots.(1)$$

$$y\Re z \Leftrightarrow y \equiv z(modp) \Leftrightarrow y - z \text{ يقسم } p \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}: y - z = k'p \dots\dots.(2)$$

بجمع (1) و (2) نجد بسهولة:

$$x - y + y - z = kp + k'p = (k + k')p = k''p$$

$$x - z = k''p \Leftrightarrow x \equiv z(modp) \Leftrightarrow x\Re z$$

B. **علاقة الترتيب La relation d'ordre:** لتكن $A \neq \emptyset$ و لتكن $\mathfrak{R}$ علاقة معرفة على المجموعة A, نقول عن العلاقة $\mathfrak{R}$ أنها علاقة ترتيب إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- $\mathfrak{R}$ إنعكاسية.
- $\mathfrak{R}$ ضد تناظرية.
- $\mathfrak{R}$ متعدية.

ملاحظة: في الغالب علاقة ترتيب يرمز لها بالرمز $\leq$ و نقول عن المجموعة $(,\leq)$ أنها مجموعة مرتبة.

علاقة ترتيب الجزئي و الكلي: لتكن $(A,\leq)$ مجموعة مرتبة (أي ان المجموعة A مزودة بعلاقة ترتيب $\leq$).

1. نقول عن عنصرين y,x من A أنهما قابلان للمقارنة إذا كان $y \leq x$ أو $x \leq y$.
2. إذا كان عنصران كيفيين من A قابلان للمقارنة أي:

$$\forall x,y \in A: x \leq y \vee y \leq x$$

في هذه الحالة نقول عن العلاقة $\leq$ أنها علاقة ترتيب كلي.

3. إذا وجد عنصران من المجموعة A لا يمكن المقارنة بينهما أي:

$$\exists x,y \in A: x \nleq y \wedge y \nleq x$$

في هذه الحالة نقول عن العلاقة $\leq$ أنها علاقة ترتيب جزئي.

أمثلة:

a. $(\mathbb{R};\leq)$ هي علاقة ترتيب كلي لأنه من المعروف ان أي عددين حقيقين يمكن المقارنة بينهما بواسطة العلاقة $\leq$.

b. $(\mathcal{P}(E);\subset)$ هي علاقة ترتيب جزئي لأنه يوجد $A,B \in \mathcal{P}(E)$ حيث: $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$.

III. التطبيقات Les applications

سنتطرق هنا للعلاقة بين عناصر مجموعتين.

تعريف: ليكن A و B مجموعتين كيفيتين.

العلاقة f التي تربط كل عنصر x من A بعنصر وحيد y من B تسمى تطبيق و نرمز لها بالرمز $y = f(x)$ أي:

$$xfy \Leftrightarrow y = f(x)$$

بعبارة أخرى: $f: A \longrightarrow B$

$$f \text{ تطبيق} \Leftrightarrow \forall x \in A; \exists!\, y \in B: f(x) = y$$

ملاحظة: عبارة $\exists!$ معناها يوجد على الأكثر عنصر.

تعاريف:

1. x تسمى سابقة.
2. y تسمى صورة x بواسطة التطبيق f.
3. A تسمى مجموعة البدء أو الانطلاق.
4. B تسمى مجموعة الوصول.

بيان التطبيق f: ليكن $f: A \longrightarrow B$ تطبيق فإن المجموعة

$$\mathrm{G} = \{(x,y) \in A \times B: f(x) = y\} \subset A \times B$$

تسمى بيان التطبيق f.

ملاحظة: ليكن $f: A \longrightarrow B$

- إذا كانت $B = \mathbb{R}$ نقول عن التطبيق f أنه تابع حقيقي.
- إذا كانت $A \subset \mathbb{R}$ نقول عن التطبيق f أنه تابع حقيقي بمتغير حقيقي.

ملاحظة: على الطالب أن يفرق بين التطبيق f الذي هو عبارة عن علاقة تربط عناصر المجموعة A بعناصر المجموعة B و بين $f(x)$ الذي هو عنصر من المجموعة B.

تعاريف: ليكن $f: A \longrightarrow B$ و $g: A' \longrightarrow B'$

1. إذا كانت $A = B$ و كان لدينا $\forall x \in A: f(x) = x$ فإن هذا التطبيق و المعرف بهذه الطريق يسمى التطبيق المطابق أو الحيادي Application Identique و نرمز له بالرمز I_A أي $f = Id_A$
2. إذا كان لدينا $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2)$ فإن هذا التطبيق يسمى التطبيق الثابت Application constante .
3. إذا كان $A = A'$ و $B = B'$ و لدينا $\forall x \in A: f(x) = g(x)$ في هذه الحالة نقول أن f تساوي g و نكتب $f \equiv g$.
4. لتكن $E \subset A$ نسمي اقتصار التطبيق على E و الذي نرمز له بالرمز $f_{/A}$ كل تطبيق h من E نحو B حيث: $\forall x \in E: f(x) = h(x)$.
5. نقول عن f أنه تمديد للتطبيق g Prolongement g إذا كان لدينا $A' \subset A$ أو $B' \subset B$ و لدينا: $\forall x \in A': f(x) = g(x)$.
6. نسمي التطبيق المميز للمجموعة A و نرمز له بالرمز $\mathcal{X}_A$ التابع الحقيقي المعرف كما يلي:

$$\mathcal{X}_A = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

نذكر أن التابع الحقيقي هو تطبيق بحيث تكون مجموعة وصوله هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

ملاحظة هامة: ليكن $f: A \longrightarrow B$

فإن المجموعتين A و B ليستا بالضرورة مجموعة الأعداد الحقيقة أو جزء منها فيمكن مثلا أخذ $A = \mathbb{R}^2$ و $B = \mathbb{R}^3$ أو أخذ $A = C(\mathbb{R})$ مجموعة التوابع المستمرة على $\mathbb{R}$ أو أي مجموعة أخرى.

تركيب التطبيقات La composition des applications: ليكن $f: A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow H$

$$\forall x \in A: f(x) \in B \Longrightarrow g\big(f(x)\big) \in H$$

أي يمكن تعريف تطبيق جديد h من المجموعة A نحو المجموعة H حيث:

$$h: A \longrightarrow H$$

$$\forall x \in A: h(x) = (gof)(x)$$

تسمى هذه العملية بعملية تركيب التطبيقات.

ملاحظات:

1. تركيب التطبيقات في الحالة العامة غير تبديلي أي: $gof \neq fog$.
2. لا يمكن الحديث عن gof إلا إذا كانت مجموعة الوصول لـ f هي نفسها مجموعة البدء لـ g.
3. إذا كانت $A = B$ في هذه الحالة نرمز لـ fof بـ f^2 أي: $fof = f^2$.
تعميم: $f^n = \underbrace{fof \ldots}_{n \text{ مرة}}$.

التطبيقات المتباينة، الغامرة و التقابلية Les applications injectives, surjectives et bijectives: ليكن $f: A \longrightarrow B$

1. **التطبيق المتباين L'applications injectives :** نقول عن التطبيق f أنه متباين إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:
$$\forall x_{1,} x_2 \in A: x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

أو

$$\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

بعبارة أخرى كل عنصر y من B يملك سابقة على الاكثر x من A أي أنه يملك سابقة واحدة أو لا يملك سابقة أصلا أي لا يمكن لعنصر y من B أن يملك أكثر من سابقة.

ملاحظة: للبرهان على ان f ليس متباين يكفي إيجاد عنصرين x_1 و x_2 من A حيث $x_1 \neq x_2$ و $f(x_1) = f(x_2)$.

مثال1: ليكن

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto E(x)$$

حيث التطبيق $E(x)$ هو الجزء الصحيح لـ x، و هو أقرب عدد صحيح يكون أقل أو يساوي x، أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}: E(x) \leq x < E(x) + 1$$

هذا التطبيق ليس متباين لأن:

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1[(x_1 \neq x_2): E(x_1) = E(x_2) = 0$$

مثال 2:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

التطبيق الاسي هو تطبيق متباين لان:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

2. **التطبيق الغامر *L'applications surjectives*:** نقول عن التطبيق f أنه غامر إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$\forall y \in B; \exists x \in A: f(x) = y$$

بعبارة أخرى أن كل عنصر y من B يملك سابقة على الاقل x من A أي لا يوجد عنصر y من B ليس له سابقة x من A.

ملاحظة: للبرهان على أن تطبيق ما ليس غامرا يكفي إيجاد y من B ليس له سابقة x من A أي البرهان هنا يكون بإعطاء مثال مضاد.

مثال 1:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

هو تطبيق ليس تقابلي لأن $\mathrm{y} = 0$ عنصر وحيد من مجموعة الوصول ليس له سابقة x في مجموعة البدء.

مثال 2:

$$f:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto lnx$$

هو تطبيق غامر لأن:

$$\forall y \in \mathbb{R}; \exists x \in]0, +\infty[: y = lnx$$

3. **التطبيق التقابلي *l'applications bijectives*:** نقول عن التطبيق f أنه تقابلي إذا كان غامرا و متباينا في نفس الوقت أي:

$$\forall y \in B; \exists! \, x \in A: f(x) = y$$

بعبارة أخرى أن كل عنصر y من B يملك سابقة وحيدة x من A.

ملاحظة: سبق و أن أشرنا إلى أن الرمز $\exists!$ يدل على الوجود و الوحدانية أي يوجد و وحيد.

ملاحظة: للبرهان على ان تطبيق ما تقابلي يمكن ان نبين أنه غامر و متباين أو ان نستعمل العلاقة الاخيرة.

مثال 1:

$$sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

هو تطبيق ليس تقابلي لأن:

$$x_1 = 0, x_2 = \pi; \; x_1 \neq x_2$$

في حين لدينا

$$sin(x_1) = sin(x_2) = 0$$

و بالتالي هو تطبيق ليس تقابلي، كما انه ليس غامر لأنه يوجد $y = 1.5$ من مجموعة الوصول ليس له سابقة في مجموعة البدء.

لكن التطبيق المعرف كما يلي:

$$sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$$

هو تطبيق تقابلي.

<u>**مثال 2:**</u> التطبيق

$$cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ليس تقابلي لأنه ليس متباين نأخذ كمثال مضاد:

$$x_1 = 0, x_2 = 2\pi;\ x_1 \neq x_2$$

في حين لدينا

$$cos(x_1) = cos(x_2) = 1$$

و بالتالي هو تطبيق ليس تقابلي، كما انه ليس غامر لأنه يوجد $y = 2$ من مجموعة الوصول ليس له سابقة في مجموعة البدء.

لكن التطبيق المعرف كما يلي:

$$\underline{\boldsymbol{cos}: [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}] \rightarrow [\mathbf{-1}, \mathbf{1}]}$$

هو تطبيق تقابلي.

<u>**التطبيق العكسي L'application réciproque:**</u> ليكن $f: A \longrightarrow B$

نقول عن التطبيق f أنه يملك تطبيقا عكسيا إذا وجد تطبيق أخر $g: B \longrightarrow A$ و يحقق:

$$gof = Id_A \Leftrightarrow \forall x \in A: (gof)(x) = x$$

$$\wedge$$

$$fog = Id_B \Leftrightarrow \forall y \in B: (fog)(y) = y$$

و نرمز للتطبيق العكسي بالرمز f^{-1} أي أن $g = f^{-1}$.

<u>**الوجود و الوحدانية:**</u>

1. حتى يكون للتطبيق f تطبيق عكسي f^{-1} يجب ان يكون f تقابليا.
2. إذا وجد التطبيق العكسي فهو وحيد

لأنه إذا فرضنا وجود تطبيقان عكسيان لـ f و لنرمز لهما بالرمز g_1 و g_2 نجد:

$$g_1 o Id_B = g_1 o(fog_2) = (g_1 of)og_2 = Id_A og_2 = g_2$$

<u>**مبرهنة:**</u> ليكن $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow H$

إذا كان كل من التطبيقين f و g تقابليان أي لهما تطبيق عكسي فإن التطبيق gof تقابلي و يقبل تطبيقا عكسيا معطى بالعلاقة التالية:

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

البرهان يترك للطالب كتمرين.

<u>**مثال:**</u>

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^3 - 1$$

هو تطبيق تقابلي (على الطالب أن يبين ذلك) و بالتالي يملك تطبيقا عكسيا، يمكن إيجاده بطريقة بسيطة جدا حيث نضع $y = f(x)$ ثم نقوم بكتابة x بدلالة y:

$$y = x^3 - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+1}$$

و في الاخير نكتب:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt[3]{x+1}$$

ملاحظات:

التطبيق الاسي هو التطبيق العكسي للتطبيق اللوغاريتمي.

التطبيق $arccos$ هو التطبيق العكسي للتطبيق cos حيث:

$$arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$$

التطبيق $arcsin$ هو التطبيق العكسي للتطبيق sin.

$$arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

سندرس هذه التطبيقات (التوابع) بالتفصيل في الفصل الرابع.

الصورة المباشرة و الصورة العكسية *L'image directe et l'image réciproque*:

ليكن $f: A \to B$

الصورة المباشرة: لتكن $E \subset A$ نسمي المجموعة التالية:

$$f(E) = \{y \in B: \exists x \in E: f(x) = y\}$$

الصورة المباشرة للمجموعة E

مثال:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto E(x)$$

أوجد الصورة المباشرة للمجموعات التالية:

$$A = \mathbb{R}_+, B = \mathbb{R}, C = [3,4[, D = [0,2[$$

$$f(A) = \mathbb{N}, f(B) = \mathbb{Z}, f(C) = \{3\}, f(D) = \{0,1\}$$

الصورة العكسية: لتكن $F \subset B$ نسمي المجموعة التالية:

$$f^{-1}(F) = \{x \in A: f(x) \in F\}$$

الصورة العكسية للمجموعة F.

نتيجة: للبرهان على أن تطبيق ما f غامر يكفي أن نبين أن $f(A) = B$ أي صورة مجموعة البدء بواسطة التطبيق f هي نفسها مجموعة الوصول.

ملاحظات:

$$f(\emptyset) = \emptyset \wedge f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \wedge f^{-1}(B) = A$$

مثال: نفس التطبيق الموجود في المثال السابق،

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto E(x)$$

أوجد الصورة العكسية للمجموعات التالية:

$$A = \{1,2\}, B = \{3\}, C = \{-1,3,8\}$$

$$f(A) = [1,3[, f(B) = [3,4[, f(C) = [-1,0[\cup [3,4[\cup [8,9[$$

<u>خواص:</u> ليكن $f: A \rightarrow B$ و لدينا E', E مجموعتان جزئيتان من المجموعة A و F', F مجموعتان جزئيتان من المجموعة B فإن:

$$\mathrm{E} \subset \mathrm{E}' \Longrightarrow f(E) \subset f(\mathrm{E}')$$

$$f(E \cup E') = f(E) \cup f(E')$$

$$f(E \cap E') \subset f(E) \cap f(E')$$

في العلاقة الاخيرة إذا كان التطبيق متباينا تصبح المساواة محققة (يطلب من الطلبة إثبات ذلك).

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{F}' \Longrightarrow f^{-1}(F) \subset f^{-1}(\mathrm{F}')$$

$$f^{-1}(F \cup F') = f^{-1}(F) \cup f^{-1}(F')$$

$$f^{-1}(F \cap F') = f^{-1}(F) \cap f^{-1}(F')$$

$$f^{-1}(C_B F) = C_A f^{-1}(F)$$

سلسلــة التمــاريــن

التمرين الاول:

برهن صحة العلاقات التالية:

$$A \subset B \Leftrightarrow CB \subset CA$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB$$

$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

التمرين الثاني:

نعرف العلاقة $\mathfrak{R}$ على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$$

بين أن العلاقة $\mathfrak{R}$ هي علاقة تكافؤ .

التمرين الثالث:

نعرف العلاقة $\preceq$ على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة تماما $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: y = x^n$$

بين ان هذه العلاقة هي علاقة ترتيب. هل الترتيب كلي؟

التمرين الرابع: (يترك للطالب):

ليكن $I \subset \mathbb{R}$ و $J \subset \mathbb{R}$ مجالين و $f: I \to J$ تطبيق متزايد تماما.

بين أن f هو تطبيق متباين, ثم أوجد بدقة المجموعة K حتى يكون التطبيق f تقابلي.

التمرين الخامس:

ليكن

$$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto nm$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$$

$$n \mapsto (n, (n+1)^2)$$

هل f متباين؟ غامر؟ هل g متباين؟ غامر؟

التمرين السادس:

ليكن

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto 2n$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

حيث $E\left(\frac{}{2}\right)$ هو الجزء الصحيح $\frac{n}{2}$.

هل f متباين؟ غامر؟ هل g متباين؟ غامر؟ ثم قارن بين fog و gof.

حـل سلسـلـة التـمــاريــن

حل التمرين الاول:

البرهان على صحة العلاقات:

$$A \subset B \Leftrightarrow CB \subset CA$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$$

نستعمل هنا التكافؤ عكس النقيض حيث نعلم ان $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

و بالتالي نجد ان:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall x: x \notin B \Rightarrow x \notin A) \Leftrightarrow CB \subset CA$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB$$

$$\forall x: x \in C(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in CA \vee x \in CB \Leftrightarrow x \in CA \cup CB$$

أي أن المساواة محققة لان التكافؤ هو استلزام في الجهتين كما يمكن البرهان بطريقة أخرى و هذا تفصيلها:

$$C(A \cap B) = CA \cup CB \Leftrightarrow C(A \cap B) \subset CA \cup CB \wedge CA \cup CB \subset C(A \cap B)$$

$$\forall x: x \in C(A \cap B) \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in CA \vee x \in CB \Rightarrow x \in CA \cup CB$$

هذه العلاقة الاخيرة تعني ان :

$$C(A \cap B) \subset CA \cup CB \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\forall x: x \in CA \cup CB \Rightarrow x \in CA \vee x \in CB \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \in C(A \cap B)$$

هذه العلاقة الاخيرة تعني ان :

$$CA \cup CB \subset C(A \cap B) \ldots\ldots\ldots (2)$$

من العلاقة (1) و ر(2) نجد المساواة المطلوبة.

$$\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$$

$\overline{A}$ يقصد بها متممة المجموعة A و سنستعمل هنا الخواص التالية:

$$\overline{(A \cap B)} = (\overline{A} \cup \overline{B}), \overline{(A \cup B)} = (\overline{A} \cap \overline{B})$$

كما نستعمل توزيع الاتحاد على التقاطع و توزيع التقاطع على الاتحاد أي:

$$A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D), A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$$

و نستعمل أيضا كون متممة المتممة هي المجموعة نفسها أي $\overline{\overline{A}} =$

و نستعمل ايضا كون تقاطع المجموعة مع متممتها يساوي المجموعة الخالية أي: $\bar{A} \cap A = \emptyset$

$$\overline{(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})} = \overline{(A \cap \bar{B})} \cap \overline{(B \cap \bar{A})} = \left(\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}\right) \cap \left(\bar{B} \cup \bar{\bar{A}}\right) = (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)$$
$$= [(\bar{A} \cup B) \cap \bar{B}] \cup [(\bar{A} \cup B) \cap A] = [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})] \cup [(\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A)]$$
$$= [(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \emptyset] \cup [\emptyset \cup (B \cap A)] = \left(\bar{A} \cap \bar{B}\right) \cup (A \cap B)$$

حل التمرين الثاني:

نعرف العلاقة $\Re$ على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\Re y \Leftrightarrow xe^{y} = ye^{x}$$

بيان أن العلاقة $\Re$ هي علاقة تكافؤ:

$$\Re \text{ هي علاقة تكافؤ } \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Re \text{ علاقة إنعكاسية} \\ \Re \text{ علاقة تناظرية} \\ \Re \text{ علاقة متعدية} \end{array}\right.$$

$\Re$ علاقة انعكاسية؟

$$\forall x \in \mathbb{R}: x\Re x?$$

من الواضح جدا أن

$$\forall x \in \mathbb{R}: xe^{x} = xe^{x} \Leftrightarrow x\Re x$$

و هذا يعني ان $x\Re x$ أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}: x\Re x$$

أي ان العلاقة هي علاقة انعكاسية.

$\Re$ علاقة تناظرية؟

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\Re y \Rightarrow y\Re x?$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\Re y \Leftrightarrow xe^{y} = ye^{x} \Rightarrow ye^{x} = xe^{y} \Rightarrow y\Re x$$

استعملنا فقط كون المساواة تبديلية, و منه فان العلاقة هي علاقة تناظرية.

$\Re$ علاقة متعدية؟

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z?$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: x\Re y \Leftrightarrow xe^{y} = ye^{x} \ldots\ldots (1)$$

$$\forall y, z \in \mathbb{R}: y\Re z \Leftrightarrow ye^{z} = ze^{y} \ldots\ldots (2)$$

نأخذ العلاقة (2) و نضربها في x ثم نستعمل العلاقة (1) على النحو التالي:

$$xye^{z} = xze^{y} \Leftrightarrow xye^{z} = zxe^{y} = zye^{x} \Leftrightarrow xe^{z} = ze^{x} \Leftrightarrow x\Re z$$

و منه فان العلاقة هي علاقة متعدية.

نتيجة: بما ان العلاقة $\mathfrak{R}$ هي انعكاسية, تناظرية و متعدية فهي علاقة تكافؤ.

حل التمرين الثالث:

نعرف العلاقة $\preceq$ على مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة تماما $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: y = x^n$$

بيان ان هذه العلاقة هي علاقة ترتيب:

$\mathfrak{R}$ هي علاقة ترتيب $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{علاقة إنعكاسية } \mathfrak{R} \\ \text{علاقة ضد تناظرية } \mathfrak{R} \\ \text{علاقة متعدية } \mathfrak{R} \end{cases}$

$\mathfrak{R}$ انعكاسية؟

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq x?$$

نعلم ان:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*: \exists n = 1 \in \mathbb{N}: x = x^1 \Leftrightarrow x \preceq x$$

أي أن العلاقة هي علاقة انعكاسية.

$\mathfrak{R}$ ضد تناظرية؟

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \wedge y \preceq x \Leftrightarrow x = y?$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: y = x^n \dots\dots (1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: y \preceq x \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}: x = y^m \dots\dots (2)$$

باستعمال المساواة الاولى و الثانية نجد بسهولة:

$$x = y^m = x^{nm} \Rightarrow lnx = lnx^{nm} = nmlnx \dots\dots (3)$$

إذا كان $x = 1$ فإننا نجد بسهولة من العلاقة (1) $y = 1^n = 1 = x$

أما إذا كان $x \neq 1$ فإننا نجد من العلاقة (3) ان $nm = 1$ و بما ان $n, m \in \mathbb{N}$ فإنه يصبح من الواضح جدا ان $n = m = 1$ و من تم نحصل على المساواة $y = x$.

و منه فان العلاقة هي علاقة ضد تناظرية لأن:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \wedge y \preceq x \Leftrightarrow x = y$$

$\mathfrak{R}$ متعدية؟

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \wedge y \preceq z \Leftrightarrow x \preceq z?$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*: x \preceq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}: y = x^n \dots\dots (1)$$

$$\forall y, z \in \mathbb{R}_+^*: y \preceq z \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}: z = y^m \dots\dots (2)$$

نأخذ العلاقة (2) ثم نستعمل العلاقة (1) أي:

$$z = y^m = x^{nm} \Rightarrow \exists \mathrm{p} = \mathrm{n}m \in \mathbb{N}: z = x^p \Leftrightarrow x \leq z$$

و منه نستنتج ان العلاقة هي علاقة متعدية.

نتيجة: بما أن $\mathfrak{R}$ هي انعكاسية, ضد تناظرية و متعدية فالعلاقة المعطاة هي علاقة ترتيب.

هل هذه العلاقة هي علاقة ترتيب كلي؟

تذكير: إذا وجد عنصران $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ لا يمكن المقارنة بينهما بواسطة العلاقة المعطاة في هذه الحالة نقول عن العلاقة انها علاقة ترتيب جزئي و في حالة العكس أي من أجل عنصران كيفيان $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ يمكن المقارنة بينها تسمى حينها العلاقة علاقة ترتيب كلي.

العلاقة علاقة ترتيب جزئي و نبرهن على ذلك بإعطاء مثال مضاد:

نأخذ $x = 7, y = 5 \in \mathbb{R}_+^*$ لا توجد علاقة بين العنصرين 5 و 7 و هذا لأنه لا يمكن إيجاد عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ حيث

$$5 = 7^n \vee 7 = 5^n$$

حل التمرين الخامس:

ليكن

$$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

$$(n, m) \mapsto nm$$

$$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$$

$$n \mapsto (n, (n+1)^2)$$

f ليس متباين و نبين ذلك بإعطاء مثال مضاد أي نجد عنصران من مجموعة البدء $\mathbb{N}^2$ لهما نفس الصورة بواسطة التطبيق f

نأخذ $(3,5)$ و $(5,3)$ واضح أن $(5,3) \neq (3,5)$ في حين نجد ان $f(5,3) = f(3,5) = 5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$

f غامر و هذا لأنه:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (n, 1) \in \mathbb{N}^2: f(n, 1) = n \times 1 = n$$

g هو تطبيق متباين لان:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}: g(n) = g(m) \Rightarrow (n, (n+1)^2) = (m, (m+1)^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ (n+1)^2 = (m+1)^2 \end{cases} \Rightarrow n = m$$

g ليس غامر و نبين ذلك بإعطاء مثال مضاد أي نجد عنصر من مجموعة الوصول $\mathbb{N}^2$ ليس له سابقة في مجموعة البدء $\mathbb{N}$.

مثلا بأخذ العنصر $(5,5)$ ليس له سابقة في مجموعة البدء و لو فرضنا العكس اي يوجد $n \in \mathbb{N}$ حيث $g(n) = (5,5)$ فإنه يكون لدينا:

$$\begin{cases} n = 5 \\ (n+1)^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 6^2 = 5$$

و هذا غير ممكن.

حل التمرين السادس:

ليكن

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$n\mapsto 2n$$

$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

$$n\mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

حيث $E\left(\frac{}{2}\right)$ هو الجزء الصحيح $\frac{}{2}$.

نعرف التطبيق $E(x)$ كما يلي:

$$\forall x\in\mathbb{R}: n\le x<n+1; n\in\mathbb{Z}$$

فإن العدد الصحيح $n\in\mathbb{Z}$ يسمى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

من الواضح أن التطبيق f متباين لان:

$$\forall n,m\in\mathbb{N}: f(n)=f(m)\Rightarrow 2n=2m\Rightarrow n=m$$

لكن التطبيق f ليس غامر و نبين ذلك بمثال مضاد:

بأخذ $p=1$ ليس له سابقة في $\mathbb{N}$. أي لا يوجد $n\in\mathbb{N}$ حيث $f(n)=1$.

g ليس متباين لأنه إذا أخذنا $n=0, m=1$ من الواضح أن $n\ne m$ في حين نجد أن:

$$g(0)=E\left(\frac{0}{2}\right)=E(0)=0$$

$$g(1)=E\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

g غامر لأن:

$$\forall n\in\mathbb{N};\ \exists x=2n\in\mathbb{N}: g(x)=E\left(\frac{2n}{2}\right)=E(n)=n$$

المقارنة بين fog و gof.

حساب fog:

إذا كان $n=2p$ أي أن n زوجي فإن:

$$(fog)(n)=f\big(g(n)\big)=f\big(g(2p)\big)=f\left(E\left(\frac{2p}{2}\right)\right)=f\big(E(p)\big)=f(p)=2p=n$$

$$(fog)(n)=n$$

إذا كان $n = 2p + 1$ أي أن n فردي فإن:

$$(fog)(n) = f\big(g(n)\big) = f\big(g(2p+1)\big) = f\left(E\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right) = f\left(E\left(p + \frac{1}{2}\right)\right) = f\big(E(p)\big) = f(p)$$
$$= 2p = n - 1$$

$$(fog)(n) = n - 1$$

خلاصة:

$$(fog)(n) = \begin{cases} n & si\ n\ est\ pair \\ n-1 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

حساب gof:

$$(gof)(n) = g\big(f(n)\big) = g(2n) = E\left(\frac{2n}{2}\right) = E(n) = n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: (gof)(n) = n \Leftrightarrow gof = Id$$

نتيجة: $gof \neq fog$

ملاحظة: $gof = Id$ لا يعني مطلقا أن g هو التطبيق العكسي للتطبيق f لانه و حسب تعريف التطبيق العكسي يجب ان يكون f تقابلي و يجقق العلاقة التالية $gof = fog = Id$ و هذا غير محقق هنا.

التـــوابـــع الحـقـيـقـيــة بـمـتـغـيـــر حـقـيـقـــي

عـمـــومـيـــات

تعريف: هو عبارة عن تطبيق معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية أو جزء منها نحو مجموعة الاعداد الحقيقية أي أن:

$$f: D \to \mathbb{R}; D \subseteq \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x)$$

مجموعة التعريف:

و هي مجموعة النقط حيث يكون التابع f معرف جيدا و هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$أي مجموعة تعريف التابع هي مجموعة العاصر الحقيقة $x \in \mathbb{R}$ و التي لها صورة وفق التابع و نرمز لها بالرمز D_f.

و يمكن اختصارها في ثلاث حالات:

الحالة الاولى: أن يكون التابع من الشكل $f(x) = \sqrt{P(x)}$ و في هذه الحالة مجموعة التعريف هي:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: P(x) \geq 0\}$$

الحالة الثانية: أن يكون التابع من الشكل $f(x) = ln\big(P(x)\big)$ و في هذه الحالة مجموعة التعريف هي:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: P(x) > 0\}$$

الحالة الثالثة: أن يكون التابع من الشكل $f(x) = \frac{Q(x)}{(x)}$ و في هذه الحالة مجموعة التعريف هي:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: P(x) \neq 0\}$$

ملاحظات:

- إذا كان التابع من الشكل $f(x) = \frac{Q(x)}{\sqrt{P(x)}}$ فإن مجموعة التعريف هي:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: P(x) > 0\}$$

- إذا كان التابع من الشكل $f(x) = \frac{Q(x)}{(P(x))}$ فإن مجموعة التعريف هي:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: P(x) > 0 \ \wedge \ P(x) \neq 1\}$$

أمثلة

1. ليكن التابع المعرف بالعلاقة التالية:

$$f: IR \to IR$$
$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x-2}.$$

مجموعة تعريف هذا التابع معطاة بالعلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
D_f &= \{x \in IR / x - 2 \geq 0\} \\
&= \{x \in IR / x \geq 2\} \\
&= [2, +\infty[.
\end{aligned}
$$

2. ليكن التابع المعرف بالعلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
f &: IR \to IR \\
&x \mapsto f(x) = \ln(2 - x).
\end{aligned}
$$

مجموعة تعريف هذا التابع معطاة بالعلاقة التالية:

$$
\begin{aligned}
D_f &= \{x \in IR / 2 - x > 0\} \\
&= \{x \in IR / x < 2\} \\
&=]-\infty, 2[.
\end{aligned}
$$

بيان التابع الحقيقي:

ليكن:

$$f : IR \to IR.$$

f تابع حقيقي بمتغير حقيقي, نسمي بيان التابع المجموعة التالية:

$$G(f) = \{(x, y) \in IR^2 / y = f(x); x \in D\}$$

التوابع المحدودة:

ليكن f تابع حقيقي معرف على $D \subseteq \mathbb{R}$

نقول عن التابع f أنه محدود من الاعلى على D إذا تحقق مايلي:

$$\exists a \in \mathbb{R};\ \forall x \in D: f(x) \leq a$$

نقول عن التابع f أنه محدود من الاسفل على D إذا تحقق مايلي:

$$\exists b \in \mathbb{R};\ \forall x \in D: f(x) \geq b$$

نقول عن التابع f أنه محدود على D إذا كان محدود من الاعلى و من الاسفل في نفس الوقت أي:

$$\exists a, b \in \mathbb{R};\ \forall x \in D: b \leq f(x) \leq a$$

أو

$$\exists r > 0;\ \forall x \in D: |f(x)| \leq r$$

أمثلة:

- التوابع sin, cos هي توابع محدودة لأنه لدينا دائما:

$$\forall x \in \mathbb{R}: |sinx| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}: |cosx| \leq 1$$

- التابع الاسي هو تابع محدود من الاسفل بالعدد صفر لأنه لدينا دائما:

$$\forall x \in \mathbb{R}: e^x > 0$$

التوابع الزوجية, الفردية و الدورية:

قبل أن نتحدث عن زوجية أو فردية التابع يجب أن تكون مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة للصفر أي:

$$\forall x: x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$$

نقول عن التابع f أنه تابع زوجي إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in D_f: f(-x) = f(x)$$

نقول عن التابع f أنه تابع فردي إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in D_f: f(-x) = -f(x)$$

نقول عن التابع f أنه تابع دوري إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ \exists p > 0: f(x+p) = f(x)\, ;\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ملاحظة: إذا كان f تابع دوري فإن أصغر عدد حقيقي موجب تماما p يحقق العلاقة الاخيرة يسمى دور التابع f.

أمثلة:

- التابع cos هو تابع زوجي و دوري في نفس الوقت أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}: cos(-x) = cosx$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: cos(x + 2\pi) = cosx$$

- التابع sin هو تابع فردي و دوري في نفس الوقت أي:

$$\forall x \in \mathbb{R}: sin(-x) = -sinx$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: sin(x + 2\pi) = sinx$$

ملاحظة: 2π هو دور كل من التوابع cos و sin لانه هو أصغر عدد حقيقي موجب تماما يحقق العلاقات المذكورة سابقا و في الحالة العامة لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}: cos(x + 2n\pi) = cosx;\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: sin(x + 2n\pi) = sinx;\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة هامة: بما أن التوابع هي عبارة عن حالة خاصة من التطبيقات فكل ما درس في التطبيقات (تركيب التوابع, متباين, غامر, تقابلي, التوابع العكسية, عمليات على التوابع...) يبقى صحيح في حالة التوابع الحقيقية بمتغير حقيقي لهذا لا داعي لتكرار دراستها هنا.

عمليات على التوابع:

تساوي تابعين:

ليكن f,g تابعين معرفين على المجموعة D من IR يكون التابعين f,g متساويان على D إذا تحققت علاقة التالية:

$$f=g \Leftrightarrow f(x)=g(x);\forall x\in D.$$

مجموع تابعين:

ليكن f,g تابعين معرفين على المجموعة D من IR نعرف مجموع تابعين على D كما يلي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x);\forall x\in D.$$

جداء تابعين:

ليكن f,g تابعين معرفين على المجموعة D من IR نعرف جداء تابعين على D كما يلي:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x);\forall x\in D.$$

ملاحظة: يمكن تعريف جداء تابع بعدد حقيقي كتابع حقيقي, كما يمكن تعريف النسبة بين تابعين كتابع حقيقي أي:

$$\forall\lambda\in IR;(\lambda f)(x)=\lambda f(x);\forall x\in D.$$
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)};\forall x\in D,g(x)\neq 0.$$

تركيب تابعين:

ليكن f,g تابعين معرفين كما يلي:

$$f:D\to E,\quad g:E\to F$$

حيث أن كل من D,E,F هي مجموعات جزئية من IR فإن تركيب تابعين هو التابع المعرف بالعلاقة التالية:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

حيث D هي مجموعة الانطلاق للتابع h أما مجموعة الوصول فهي F أي أن:

$$\begin{aligned}h=g\circ f:D&\to F\\ x&\mapsto h(x)=(g\circ f)(x).\end{aligned}$$

أمثلة:

1. ليكن لدينا:

$$f(x)=\frac{1}{x},$$
$$g(x)=x^2.$$

المطلوب إيجاد التابع $g\circ f,\ f\circ g$.

لدينا:

$$D_f = IR^*, \quad D_g = IR$$

حساب $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}; \forall x \in IR^*.$$

حساب $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2}.$$

2. ليكن:

$$f(x) = \log(1+x^2), \quad g(x) = \cos x.$$

المطلوب إيجاد التابع $g \circ f,\ f \circ g$

ماذا تستنتج؟

لدينا:

$$D_f = IR, \quad D_g = IR$$

حساب $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos(\log(1+x^2))$$
$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \cos(\log(1+x^2)); \forall x \in IR.$$

حساب $f \circ g$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log(1+(g(x))^2) = \log(1+\cos^2 x)$$
$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \log(1+\cos^2 x); \forall x \in IR.$$

نتيجة: نلاحظ من خلال المثال الثاني بأنه في الحالة العامة:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

النـهـايـات

سنحاول هنا إعطاء التعريف الرياضي الصحيح للنهايات و تبسيطه بقدر الامكان

نقول عن التابع f أنه يؤول الى العدد الحقيق l عندما يؤول x الى العدد x_0 إذا تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0: |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

و معناه انه كلما اقترب المتغير x من العدد x_0 بالقدر الكافي فإن التابع $f(x)$ يقترب من العدد l و نكتب:

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = l$$

ملاحظة: النهاية إن وجدت فهي وحيدة.

نتيجة: إن كانت للتابع أكثر من نهاية في جوار النقطة x_0 فهذا يعني أن النهاية غير موجودة.

النهاية من اليمين و النهاية من اليسار:

النهاية من اليمين: نقول عن التابع f أنه يملك نهاية من اليمين عند النقطة x_0 إذا كان لدينا:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0: x \in]x_0; x_0 + \delta[\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

و نكتب

$$\lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) = l$$

النهاية من اليسار: نقول عن التابع f أنه يملك نهاية من اليسار عند النقطة x_0 إذا كان لدينا:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0: x \in]x_0 - \delta; x_0[\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

و نكتب

$$\lim_{x \mapsto x_0^-} f(x) = l$$

نتيجة: حتى يكون التابع f يقبل نهاية عند النقطة x_0 يجب ان تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار و هي نفسها قيمة النهاية عند النقطة x_0 أي:

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto x_0^-} f(x)$$

ملاحظة: إذا كان لدينا:

$$\lim_{x \mapsto x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \mapsto x_0^-} f(x)$$

فهذا يعني أن النهاية غير موجودة.

ملاحظة: يمكن إعطاء تعاريف مماثلة إذا كانت

$$x_0 = \pm\infty, l = \pm\infty$$

نلخص ذلك فيما يلي:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists A > 0: x > A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists A > 0: x < -A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall B > 0;\ \exists \delta > 0: |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) > B$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall B > 0;\ \exists \delta > 0: |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) < -B$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{B} > 0;\ \exists A > 0: x > A \Rightarrow f(x) > B$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{B} > 0;\ \exists A > 0: x < -A \Rightarrow f(x) > B$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{B} > 0;\ \exists A > 0: x > A \Rightarrow f(x) < -B$$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{B} > 0;\ \exists A > 0: x < -A \Rightarrow f(x) < -B$$

ملاحظة: في الغالب نحسب النهاية مباشرة دون استعمال التعريف لكن في بعض الحالات نستعمل التعريف المكافئ للنهاية.

حالات عدم التعيين: هناك أربع حلات عدم تعيين معروفة نجدها عند حساب النهاية و هي:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, +\infty - \infty$$

لكن هناك حالات عدم تعيين أخرى نحصل عليها عند دراسة التوابع من الشكل: $[f(x)]^{g(x)}$ و هي:

$$1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$$

و التي تتحول فيما بعد الى حالة عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$ و هذا بإدخال التابع اللوغاريتمي.

عمليات على النهايات:

ليكن f و g تابعين حيث:

$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = l, \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = l'$$

فإن:

$$\lim_{x\mapsto x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$$

هذه العلاقة غير صحيحة في الحالة التالية: $l = +\infty, l' = -\infty$ أو $l = -\infty, l' = +\infty$

$$\lim_{x\mapsto x_0} [f(x).g(x)] = l.l'$$

هذه العلاقة غير صحيحة في الحالة التالية: $l = \infty, l' = 0$ أو $l = 0, l' = \infty$

$$\lim_{x\mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}; l' \neq 0$$

هذه العلاقة غير صحيحة في الحالة التالية: $l = l' = \infty$ أو $l = l' = 0$

$$\lim_{x\mapsto x_0} |f(x)| = |l|$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} \lambda f(x) = \lambda l$$

$$f(x) < g(x) \Rightarrow l \leq l'$$

نتيجة: ينتج من العلاقة الاخيرة أنه إذا كان لدينا:

$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\mapsto x_0} f(x) = +\infty$$

بعض طرق حساب النهايات:

هناك الطريقة المباشرة التي تعتمد على حساب النهايات حتى لو صادفنا حالة من حالات عدم التعين نقوم بإزالتها بعمليات حسابية بسيطة كالضرب في المرافق أو الاختزال أو التحليل.... لكن هناك طرق غير مباشرة تعتمد على نظريات و قواعد تبين أن النهاية موجودة أو غير موجودة نذكر منها:

طريقة الحصر: ليكن f تابع حقيقي, إذا وجد تابعين حقيقيين h , حيث:

$$\forall x \in D: h(x) < f(x) < g(x)$$

$$\lim_{x\mapsto x_0} h(x) = \lim_{x\mapsto x_0} g(x) = l$$

فإن

$$\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = l$$

ملاحظات:

1. من الممكن جدا أن تكون $l = \pm\infty$.
2. في كل مما سبق يمكن أخذ $x_0 = \pm\infty$.
3. طريقة الحصر واسعة و فيها الكثير من الحالات لكن نكتفي فقط بذكر هذه الحالة.

المقارنة بالمتتاليات: ليكن f تابع حقيقي معرف على المجال $[,b] - \{x_0\}$ و $x_0 \in [a,b]$ لدينا التكافؤ التالي:

$$\left[\lim_{x\mapsto x_0} f(x) = l\right] \Leftrightarrow \left[\forall (x_n) \subset [a,b]: \lim_{n\mapsto +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\mapsto +\infty} f(x_n) = l\right]$$

نتيجة: نستعمل هذه القاعدة كي نبين أن نهاية تابع ما في جوار النقطة x_0 غير موجودة.

مثال: بين أن

$$\lim_{x\mapsto +\infty} cosx$$

غير موجودة.

الحل: يكفي أخذ المتتالية:

$$x_n = n\pi$$

من الواضح أن:

$$\lim_{n\mapsto +\infty} x_n = +\infty$$

و

$$cosn\pi = \begin{cases} 1; \text{زوجي } n \\ -1; \text{فردي } n \end{cases}$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} cosx = \begin{cases} 1; \text{زوجي } n \\ -1; \text{فردي } n \end{cases}$$

أي أن النهاية ليست وحيدة و بالتالي غير موجودة.

تمرين: بنفس الطريقة بين أن

$$\lim_{x \mapsto +\infty} sinx$$

غير موجودة.

الجداء: إذا كان التابع f يكتب على الشكل جداء تابعين كما يلي:

$$f(x) = g(x)h(x)$$

حيث يكون التابع g محدود و التابع h يؤول الى الصفر في جوار النقطة x_0 فإن التابع f يؤول الى الصفر في جوار النقطة x_0.

مثال: أحسب النهاية التالية

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{cosx}{x}$$

نلاحظ ان التابع $cosx$ هو تابع محدود لأن: $\forall x \in \mathbb{R}: |cosx| \leq 1$ و التابع $\frac{1}{x}$ يؤول الى الصفر في جوار $+\infty$ و منه نستنتج حسب القاعدة السابقة ان:

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{cosx}{x} = 0$$

ترميز: ليكن f و g تابعين حقيقيين, إذا كان لدينا:

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

فإننا نكتب في هذه الحالة:

$$f = o(g)$$

مثال: بما ان

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sinx - x}{x^2} = 0$$

فإن:

$$sinx - x = o(x^2)$$

مثال: بما ان

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{ln(1+x) - x}{x^2} = 0$$

فإن:

$$ln(1+x)-x=o(x^2)$$

ملاحظة: إذا كان

$$f-g=o(f);\ f-g=o(g)$$

في جوار النقطة x_0 نقول في هذه الحالة ان f تكافئ g و نكتب $f\sim g$

ملاحظة: العلاقة $\sim$ هي علاقة تكافؤ على الطالب أن يبرهن ذلك.

الاسـتـمـرار

تعريف: ليكن f تابع معرف على I

نقول عن f أنه مستمر عند النقطة x_0 إذا تحقق ما يلي:

$$x_0\in D_f,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

الاستمرار من اليمين و الاستمرار من اليسار:

الاستمرار من اليمين: نقول عن f أنه مستمر من اليمين عند النقطة x_0 إذا تحقق ما يلي:

$$x_0\in D_f,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

الاستمرار من اليسار: نقول عن f أنه مستمر من اليسار عند النقطة x_0 إذا تحقق ما يلي:

$$x_0\in D_f,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)\ =\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

نتيجة: نقول عن f أنه مستمر عند النقطة x_0 إذا كان مستمر من اليمين عند النقطة x_0 و من اليسار عند النقطة x_0 في نفس الوقت أي:

$$x_0\in D_f,\ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\ =\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

الاستمرار على مجال أو مجموعة:

نقول عن f أنه مستمر على المجموعة D إذا كان مستمر عند كل نقطة من نقاطها.

أمثلة:

1. توابع كثيرات الحدود هي توابع مستمرة على $\mathbb{R}$.
2. التوابع sin و cos هي توابع مستمرة على $\mathbb{R}$.
3. التابع $\log x$ هو تابع مستمر على $]0,+\infty[$.

مثال: ليكن

$$f(x)=\begin{cases}0;\ x\in\mathbb{Q}\\1;\ \ x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

من الواضح أن هذا التابع معرف على $\mathbb{R}$ لكنه غير مستمر عند أي نقطة من نقاطها.

مثال: ليكن التابع التالي

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x};\ x\neq 0\\ 1;\ \ x=0\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}$$

لكن نلاحظ جيدا أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\pm\infty\neq f(0)=1$$

عمليات على التوابع المستمرة:

1. مجموع تابعين مستمرين عند النقطة x_0 هو تابع مستمر عند النقطة x_0.
2. جداء تابعين مستمرين عند النقطة x_0 هو تابع مستمر عند النقطة x_0.
3. جداء تابع مستمر عند النقطة x_0 بعدد حقيقي λ هو تابع مستمر عند النقطة x_0.
4. النسبة بين تابعين مستمرين عند النقطة x_0 هو تابع مستمر عند النقطة x_0 مع الاخذ بعين الاعتبار أن المقام لا ينعدم عند النقطة x_0.
5. القيمة المطلقة لتابع مستمر عند النقطة x_0 هو تابع مستمر عند النقطة x_0.
6. إذا كان f تابع مستمر عند النقطة x_0 و g مستمر عند النقطة $f(x_0)$ فإن التركيب gof هو تابع مستمر عند النقطة x_0.

نتيجة: كل تابع مستمر على مجال من الشكل $[,b]$ يكون محدود أي:

$$\exists M,N\in\mathbb{R}\,;\ \forall x\in[a,b]:M\leq f(x)\leq N$$

حيث أن:

$$M=\inf_{a\leq x\leq b} f(x)\,,N=\sup_{a\leq x\leq b} f(x)$$

كما يوجد على الاقل $x_1,x_2\in[a,b]$ حيث

$$M=f(x_1),N=f(x_2)$$

ملاحظة: يجب التأكيد في النتيجة السابقة على ان المجال فيها يكون محدودا و مغلقا.

نظرية القيم المتوسطة:

ليكن f تابع مستمر على مجال ما, و ليكن $f(x_1),f(x_2)$ و نفرض أن $f(x_1)<f(x_2)$ قيم كيفية مع $x_1<x_2$ فإن:

$$\forall c\in\,]f(x_1),f(x_2)[;\exists x\in\,]x_1,x_2[:f(x)=c$$

نتيجة: ليكن f تابع مستمر على مجال $[,b]$ و إذا كان $f(\mathrm{a}).f(\mathrm{b})<0$ فإن:

$$\exists c\in\,]\mathrm{a},\mathrm{b}[:f(c)=0$$

التمديد بالاستمرار:

ليكن f تابع مستمر على $D-\{x_0\}$ إذا كانت:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

فإن:

1. $l\in\mathbb{R}$ أي أن النهاية عبارة عن عدد منتهي فإن التابع f يقبل التمديد بالاستمرار عند النقطة x_0 و لدينا في هذه الحالة:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x); x \in D - \{x_0\} \\ l; \qquad x = x_0 \end{cases}$$

التابع $\hat{f}$ هو تابع معرف و مستمر على D.

2. $l = \pm\infty$ النهاية موجودة لكن غير منتهية أو إذا كانت النهاية غير موجودة اصلا و في هذه الحالة لا يمكن التمديد بالاستمرار.

مثال 1: ليكن التابع المعرف كما يلي:

$$f(x) = \frac{ln(x+1)}{x}$$

$$D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$$

لكن نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

النهاية عبارة عن عدد منتهي 1 فإن التابع f يقبل التمديد بالاستمرار عند النقطة 0 و لدينا في هذه الحالة:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{ln(x+1)}{x}; x \in D_f \\ 1; \qquad x = 0 \end{cases}$$

و هذا التابع $\hat{f}$ هو تابع معرف و مستمر على $]-1,+\infty[$.

مثال 2: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

من الواضح أن نهاية هذا التابع من اليمين عند الصفر تكون غير منتهية في حين النهاية من اليسار عند الصفر تكون معدومة أي النهاية غير موجودة في جوار الصفر و بالتالي لا يمكن التمديد بالاستمرار عند النقطة صفر.

مثال 3: ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$

من الواضح أن نهاية هذا التابع في جوار الصفر تكون غير منتهية و بالتالي لا يمكن التمديد بالاستمرار عند النقطة صفر.

نتائج:

1. f مستمر على مجال $I \Leftrightarrow f(I)$ مجال. ($f(I)$ هي صورة المجال I بواسطة التابع f).
2. كل تابع مستمر و رتيب تماما يكون متباين.
3. التابع f مستمر و رتيب تماما على مجال I يملك تابع عكسي f^{-1} مستمر من $f(I)$ نحو I.

نظرية النقطة الثابتة:

ليكن I و $f: I \longrightarrow I$ تابع مستمر فإن:

$$\exists x \in I: f(x) = x$$

الاشتقاق

تعريف: نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

موجودة و منتهية و هاته النهاية هي نفسها قيمة المشتقة عند النقطة x_0 و نكتب في هذه الحالة $f'(x_0)$.

<u>ملاحظة:</u> النهاية السابقة إن وجدت فهي تسمح لنا بكتابة العلاقة التالية:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x_0)$$

حيث:

$$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x_0)=0$$

<u>المشتقة من اليمين و المشتقة من اليسار:</u>

1. نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق من اليمين عند النقطة x_0 إذا كانت:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

موجودة و منتهية و هاته النهاية هي نفسها قيمة المشتقة من اليمين عند النقطة x_0 و نكتب في هذه الحالة $f_d'(x_0)$.

2. نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق من اليسار عند النقطة x_0 إذا كانت:

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

موجودة و منتهية و هاته النهاية هي نفسها قيمة المشتقة من اليسار عند النقطة x_0 و نكتب في هذه الحالة $f_g'(x_0)$.

<u>نتيجة:</u> حتى يكون التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة x_0 يجب أن تكون المشتقة من اليمين عند النقطة x_0 مساوية للمشتقة من اليسار عند النقطة x_0 أي:

$$f_d'(x_0)=f_g'(x_0)=f'(x_0)$$

<u>مثال 1:</u> أدرس اشتقاق التابع التالي عند النقطة $x_0=a$

$$f(x)=|x-a|$$

<u>الحل:</u> أولا يجب أن نزيل القيمة المطلقة قبل حساب المشتقة لدينا:

$$f(x)=|x-a|=\begin{cases}x-a; & x\geq a\\ -(x-a); & x<a\end{cases},f(a)=0$$

حساب المشتقة من اليمين:

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(\mathrm{a})}{x-\mathrm{a}}=\lim_{x\to a^+}\frac{|x-a|}{x-\mathrm{a}}=\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{x-\mathrm{a}}=1$$

و منه فإن التابع يقبل الاشتقاق من اليمين عند النقطة $x_0=a$ و قيمة المشتقة من اليمين عند النقطة $x_0=a$ هي:

$$f_d'(\mathrm{a})=1$$

حساب المشتقة من اليسار:

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(\mathrm{a})}{x-\mathrm{a}}=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|}{x-\mathrm{a}}=\lim_{x\to a^-}\frac{-(x-a)}{x-\mathrm{a}}=-1$$

و منه فإن التابع يقبل الاشتقاق من اليسار عند النقطة $x_0=a$ و قيمة المشتقة من اليسار عند النقطة $x_0=a$ هي:

$$f_g'(\mathrm{a})=-1$$

نتيجة: من الواضح جيدا أن:

$$f_d'(\mathrm{a})\neq f_g'(\mathrm{a})$$

و منه فإن التابع f غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=a$.

مثال 2: أدرس اشتقاق التابع التالي عند النقطة $x_0=0$

$$f(x)=sin|x|$$

الحل: أولا يجب أن نزيل القيمة المطلقة قبل حساب المشتقة لدينا:

$$|x|=\begin{cases}x; & x\geq 0\\ -x; & x<0\end{cases}, f(0)=0$$

حساب المشتقة من اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{sin|x|-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{sinx}{x}=1$$

و منه فإن التابع يقبل الاشتقاق من اليمين عند النقطة $x_0=0$ و قيمة المشتقة من اليمين عند النقطة $x_0=0$ هي:

$$f_d'(0)=1$$

حساب المشتقة من اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{sin|x|-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{sin|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{sin(-x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sinx}{x}=-1$$

و منه فإن التابع يقبل الاشتقاق من اليسار عند النقطة $x_0=0$ و قيمة المشتقة من اليسار عند النقطة $x_0=0$ هي:

$$f_g'(0)=-1$$

نتيجة: من الواضح جيدا أن:

$$f_d'(0)\neq f_g'(0)$$

و منه فإن التابع f غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$.

الاشتقاق على مجموعة أو مجال:

ليكن التابع f معرف على المجموعة D

نقول عن التابع f أنه قابل للاشتقاق على المجموعة D إذا كان قابل للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المجموعة D.

نتيجة: من خلال الكتابة

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x_0)$$

حيث:

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x_0) = 0$$

و بالمرور الى النهاية في جوار النقطة x_0 نجد مباشرة ان:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

و هذا يدل على التابع f مستر عند النقطة x_0 و منه نستنتج أن كل تابع قابل للاشتقاق يكون مستمرا.

ملاحظة: عكس هذه النتيجة غير صحيح و كمثال على ذلك يمكن اخد التابع

$$f(x) = |x|, f(x) = sin|x|$$

المشتقة من رتبة أعلى:

1. إذا كان f قابل للاشتقاق فإننا نرمز للمشتقة بالرمز f' و تسمى المشتقة من الرتبة الاولى.
2. إذا كان f' قابل للاشتقاق فإننا نرمز للمشتقة بالرمز f'' و تسمى المشتقة من الرتبة الثانية.
3. إذا كان f'' قابل للاشتقاق فإننا نرمز للمشتقة بالرمز $f^{(3)}$ و تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة.
4. و هكذا إذا كان $f^{(n-1)}$ قابل للاشتقاق فإننا نرمز للمشتقة بالرمز $f^{(n)}$ و تسمى المشتقة من الرتبة n.

ترميز:

$C(I)$ هي مجموعة التوابع المستمر على I أي:

$$f \in C(I) \Leftrightarrow \text{مستمر على} f\ I$$

و نقول ان التابع من الصنف C على I

$C^1(I)$ هي مجموعة التوابع المستمر و القابلة للاشتقاق على I و المشتقة الاولى مستمرة أي:

$$f \in C^1(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ مستمر على} I \\ f' \text{ موجودة على} I \\ f' \text{ مستمر على} I \end{cases}$$

و نقول ان التابع من الصنف C^1 على I

$C^2(I)$ هي مجموعة التوابع المستمر و القابلة للاشتقاق مرتين على I و المشتقة الثانية مستمرة أي:

$$f \in C^2(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ مستمر على} I \\ f' \text{ و } f'' \text{ موجودة على} I \\ f'' \text{ مستمر على} I \end{cases}$$

و نقول ان التابع من الصنف C^2 على I

و هكذا نرمز بصفة عامة بـ

$C^n(I)$ هي مجموعة التوابع المستمر و القابلة للاشتقاق n مرة على I و المشتقة n مستمرة أي:

$$f \in C^2(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ مستمر على} I \\ f' \text{ و } f'' \dots f^{(n)} \text{ موجودة على} I \\ f^{(n)} \text{ مستمر على} I \end{cases}$$

و نقول ان التابع من الصنف C^n على I

ملاحظة: كان من الممكن ان لا أكتب كون f مستمر لان وجود المشتقة يدل على انها مستمر.

و اخيرا نرمز لمجموعة التوابع القابلة للاشتقاق ما لانهاية من المرات على I بالرمز $C^\infty(I)$ و نقول عنها أنها توابع من الصنف C^∞ على I.

مثال: التوابع كثيرات الحدود و المثلثية و الاسية هي توابع من الصنف C^∞ على $\mathbb{R}$.

ملاحظة: f قابلة للإشتقاق لا يعني مطلقا ان التابع المشتق f' مستمر.

عمليات على التوابع القابلة للاشتقاق:

ليكن f و g تابعين قابلين للاشتقاق و لدينا:

$$(f+g)' = f' + g', (f.g)' = f'.g + g'.f, (\alpha f)' = \alpha f', \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}; g \neq 0$$

$$(fog)'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big)$$

مشتق التابع العكسي:

ليكن f تابع قابل للاشتقاق و رتيب تماما على مجال I فهو يقبل تابع عكسي و بالتلي يمكن تعريف مشتق التابع العكسي كما يلي:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'}; y = f(x)$$

خاصية: ليكن f و g تابعين من الصنف C^n يكون لدينا ما يلي:

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}.g^{(k)}$$

علما أن:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!};\ C_n^0 = C_n^n = 1$$

القيم الحدية:

إذا كانت x_0 قيمة حدية فهذا يعني أن المشتقة تنعدم عند النقطة x_0 أي $f'(x_0) = 0$

ملاحظة: العكس غير صحيح أي قد تنعدم المشتقة في نقطة x_0 دون أن تكون هذه الاخيرة قيمة حدية للتابع.

مثال:

$$f(x) = x^3$$

نلاحظ أن المشتقة تنعدم في النقطة $x_0 = 0$ لكن هذه النقطة ليست نقطة حدية.

و السؤال المطروح هو كيف نعرف النقاط التي تنعدم فيها المشتقة هل هي قيم حدية أم لا؟

و نجيب على هذا السؤال بالنظرية التالية:

إذا كان f من صنف x^n في جوار النقطة x_0 فإذا كان لدينا:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) \text{ و } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

فإن المشتقة التي توافق العدد الطبيعي n فردية أم زوجية, فإن كان n فردية فإن النقطة x_0 ليست قيمة حدية و إن كان n زوجي فهي قيمة حدية.

نظرية التزايدات المنتهية:

ليكن التابع f معرف على مجال مغلق $[a,b]$, إذا تحقق ما يلي:

1. التابع f مستمر على المجال $[a,b]$.
2. التابع f قابل للاشتقاق على المجال $]a,b[$.

فإن:

$$\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

نتيجة: إذا كانت شروط نظرية التزيدات المنتهية محققة على المجال $[a,b]$ و كان لدينا زيادة على ذلك $f(b) = f(a)$ فإن:

$$\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$$

نتيجة (قاعدة لوبيتال):

إذا كان f,g تابعين يقبلان الاشتقاق عند النقطة x_0 فإن:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

ملاحظات:

1. عكس النظرية غير صحيح أي إذا

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

فهذا لا يعني مطلقا أن:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

2. نطبق قاعدة لوبيتال على حالات عدم التعيين التالية $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$
3. يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال أكثر من مرة حتى تزول حالة عدم تعيين.

سلسلة التمارين

التمرين الاول:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{sinx(cos(2x) - cosx)};\ \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right);\ \lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x};$$

ليكن التابع:

$$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

أحسب النهاية عند النقطة $x_0 = 0$

التمرين الثاني:

لكن التابع f المعرف كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(2x)$$

هو تابع مستمر عند النقطة $x_0 = 0$. بين أن التابع f هو تابع ثابت.

التمرين الثالث:

ليكن $f \in C([0,1])$ حيث

$$\forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \in [0,1]$$

باستعمال نظرية القيم المتوسط بين ان:

$$\exists \alpha \in [0,1]: f(\alpha) = \alpha$$

ملاحظة: استعمل التابع $g(x) = f(x) - x$

التمرين الرابع:

هل التوابع التالية قابلة للتمديد بالاستمرار على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = sinx.sin\frac{1}{x}\ ; g(x) = \frac{1}{x}ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right); h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

التمرين الخامس:

ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha cos\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0 \quad ; & x = 0 \end{cases}$$

من أجل $\alpha \in \{0,1,2,3\}$ ادرس الاستمرار و الاشتقاق .

في أي حالة يكون التابع f من الصنف $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

التمرين السادس:

أدرس اشتقاق التوابع التالية عند النقطة x_0

$$f(x)=\begin{cases}x.\sin\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases} \text{ و } g(x)=\begin{cases}\sin x.\cos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}, h(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}; & x\neq 1\\ 1 \quad ; & x=1\end{cases}$$

التمرين السابع:

باستعمال نظرية التزيدات المنتهية بين:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \ ; \ \forall x>0$$

حـل سلسـلـة التمـاريـن

حل التمرين الاول:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{sinx(cos(2x) - cosx)};\ \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right);\ \lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}$$

$$\frac{tgx - sinx}{sinx(cos(2x) - cosx)} = \frac{\frac{sinx}{cosx} - sinx}{sinx(cos(2x) - cosx)} = \frac{sinx - cosx.sinx}{cosx.sinx(cos(2x) - cosx)}$$
$$= \frac{sinx(1 - cosx)}{cosx.sinx(cos(2x) - cosx)} = \frac{(1 - cosx)}{cosx(cos(2x) - cosx)}$$

نعلم أن:

$$cos(2x) = 2cos^2x - 1$$

ثم نضع:

$$cosx = X$$

من الواضح أنه لما $x \to 0$ فإن $X \to 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{sinx(cos(2x) - cosx)} = \lim_{x\to 0}\frac{(1 - cosx)}{cosx(2cos^2x - 1 - cosx)} = \lim_{X\to 1}\frac{(1 - X)}{X(2X^2 - 1 - X)}$$
$$= \lim_{X\to 1}\frac{(1 - X)}{X(1 - X)(-1 - 2X)}\lim_{X\to 1}\frac{1}{X(-1 - 2X)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx - sinx}{sinx(cos(2x) - cosx)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{|x|}{x}\right)$$

$$|x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

النهاية من اليمين:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{x}{x}\right)\lim_{x\to 0^+}(x + 1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = 1$$

النهاية من اليسار:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(x + \frac{-x}{x}\right)\lim_{x\to 0^-}(x - 1) = -1$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)=-1$$

نتيجة:

$$\lim_{x\to0^+}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)\neq\lim_{x\to0^-}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

و منه

$$\lim_{x\to0}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

غير موجودة.

$$\lim_{x\to0}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{sin|x|}{x}$$

$$|x|=\begin{cases}x; & x>0\\ -x; & x<0\end{cases}$$

النهاية من اليمين:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{sinx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}=1$$

النهاية من اليسار:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{sin|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{sin(-x)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-sinx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}=-1$$

نتيجة:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}\neq\lim_{x\to0^-}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}$$

و منه

$$\lim_{x\to0}\frac{sin\sqrt{x^2}}{x}$$

غير موجودة.

حساب النهاية في جوار الصفر للتابع

$$f(x) = xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

النهاية من اليمين : لدينا:

$$\forall x > 0; n \le \frac{1}{x} < n+1 \Leftrightarrow -n-1 < -\frac{1}{x} \le -n \dots\dots\dots (1)$$

$$\forall x > 0; n \le \frac{1}{x} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \dots\dots\dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$-n-1+\frac{1}{n+1} < x - \frac{1}{x} \le -n + \frac{1}{n}$$

و بالتالي فإن $E\left(x-\frac{1}{x}\right)$ إما تساوي $-n$ أو تساوي $-n-1$ أي أن:

$$-1-n \le E\left(x-\frac{1}{x}\right) \le -n \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \dots\dots\dots (2)$$

نضرب المتراجحة (3) في العدد -1 لتصبح كل قيم المتراجحة موجبة فيصبح لدينا:

$$n \le -E\left(x-\frac{1}{x}\right) \le n+1 \dots\dots\dots (4)$$

نضرب المتراجحة (4) و (2) طرف لطرف فنجد:

$$\frac{n}{n+1} < -xE\left(x-\frac{1}{x}\right) \le \frac{n+1}{n}$$

و منه بالمرور الى النهاية من يمين الصفر نجد:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-xE\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} xE\left(x-\frac{1}{x}\right) = -1$$

النهاية من اليسار: من أجل $x < 0$ نضع $y = -x$ فيكون لدينا $E(-y) = -E(y) - 1$

$$f(x) = xE\left(x-\frac{1}{x}\right) = x\left(-E\left(-x+\frac{1}{x}\right)-1\right) = (-x)E\left((-x)-\frac{1}{-x}\right) - x = f(-x) - x$$

لدينا $-x > 0$ لان $x < 0$ لهذا نستعمل العلاقة السابقة فنجد:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(f(-x)-x) = -1$$

و منه نجد في النهاية :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1$$

حل التمرين الثاني:

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x) = f(2x)$$

هو تابع مستمر عند النقطة $x_0 = 0$.

بيان أن التابع f هو تابع ثابت:

نثبت x و ليكن $y = \frac{x}{2}$ و منه نجد

$$f(y) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

ثم نضع $y = \frac{x}{4}$ فنجد:

$$f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

و هكذا حتى نحصل على :

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x); n \in \mathbb{N} \dots \dots . . (1)$$

لتكن الان المتتالية المعرفة بحدها العام:

$$u_n = \frac{x}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \mapsto \infty} u_n = 0$$

و بما ان f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ فإن:

$$\lim_{n \mapsto \infty} f(u_n) = f(0)$$

لكن من العلاقة (1) لدينا:

$$f(u_n) = f(x); \forall n \in \mathbb{N}$$

أي ان المتتالية المعرفة بحدها العام $f(u_n)$ هي ثابتة و تساوي الى $f(x)$ و منه فإن:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = f(0)$$

أي ان التابع ثابت.

حل التمرين الثالث:

$f \in C([0,1])$ حيث

$$\forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \in [0,1]$$

باستعمال نظرية القيم المتوسط نبين ان:

$$\exists \alpha \in [0,1]: f(\alpha) = \alpha$$

نستعمل التابع $g(x) = f(x) - x$

g هو تابع مستمر على المجال $[0,1]$ هذا لانه عبارة عن مجموع تابعين مستمرين على المجال $[0,1]$ و هما التابع f و التابع $-x$

و لدينا:

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \in [0,1] \Rightarrow g(0) \geq 0 \dots \dots (1)$$

$$g(1) = f(1) - 1 \in [-1,0] \Rightarrow g(1) \leq 0 \dots \dots (2)$$

العلاقة (2) صحيحة لان :

$$f(1) \in [0,1] \Rightarrow f(1) - 1 \in [-1,0]$$

من العلاقة (1) و (2) نحصل على أن

$$g(0)g(1) \leq 0$$

كما ان التابع g مستمر على المجال $[-1,0]$ فحسب نظرية القيم المتوسط فإنه:

$$\exists \alpha \in [-1,0]: g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$$

حل التمرين الرابع:

$$f(x) = sinx.sin\frac{1}{x}\ ; g(x) = \frac{1}{x}ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right); h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

لمعرفة هل التابع يقبل تمديد بالاستمرار عند النقطة x_0 يكفي ان تكون النهاية في جوار x_0 موجودة و منتهية.

$$f(x) = sinx.sin\frac{1}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

التابع f معرف و مستمر على $\mathbb{R}$ ما عدا النقطة $x_0 = 0$ و لمعرفة ما إذا كان التابع يقبل التمديد بالاستمرار يكفي ان نحسب النهاية في جوار $x_0 = 0$

حساب النهاية:

لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*: -1 \leq sin\frac{1}{x} \leq 1$$

$$\lim_{x \to 0} sinx = 0$$

و نعلم ان نهاية جداء تابعين احدهما محدود و الاخر يؤول نحو الصفر تساوي الصفر أي:

$$\lim_{x \to 0} sinx.sin\frac{1}{x} = 0$$

النهاية موجودة و منتهية و بالتالي فإن f يقبل التمديد بالاستمرار و لدينا:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} sinx.sin\frac{1}{x}; x \neq 0 \\ 0; \qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

التابع $\hat{f}$ هو تابع معرف و مستمر على $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \frac{1}{x} ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

$$D_g = \mathbb{R}^*$$

التابع g معرف و مستمر على $\mathbb{R}$ ما عدا النقطة $x_0 = 0$ و لمعرفة ما إذا كان التابع يقبل التمديد بالاستمرار يكفي ان نحسب النهاية في جوار $x_0 = 0$

حساب النهاية:

نضع:

$$h(x) = ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right);\ h(0) = 0$$

من الواضح ان:

$$g(x) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \Rightarrow \lim_{x \mapsto 0} g(x) = \lim_{x \mapsto 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0)$$

$$h'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow h'(0) = 0$$

النهاية موجودة و منتهية و بالتالي فإن g يقبل التمديد بالاستمرار و لدينا:

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right); x \neq 0 \\ 0; \qquad\qquad\qquad x = 0 \end{cases}$$

التابع $\hat{g}$ هو تابع معرف و مستمر على $\mathbb{R}$.

$$h(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{2}{1 - x^2}$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

$$h(x) = \frac{1}{1 - x} - \frac{2}{1 - x^2} = \frac{1 + x - 2}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{-1}{1 + x}$$

$$\lim_{x \to 1} h(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = -\infty;\ \lim_{x \to -1^-} h(x) = +\infty$$

أي ان:

$$\lim_{x \to -1} h(x)$$

غير موجودة.

نتيجة: التابع h يقبل التمديد بالاستمرار عند النقطة 1 في حين لا يقبل التمديد بالاستمرار عند النقطة -1 و لدينا:

$$\hat{h}(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}; x\in\mathbb{R}-\{1,-1\}\\ -\frac{1}{2}; \qquad\qquad x=1\end{cases}$$

التابع $\hat{h}$ هو تابع معرف و مستمر على $\mathbb{R}-\{1\}$.

حل التمرين الخامس:

$$f(x)=\begin{cases}x^\alpha cos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

اولا نبرهن ان

$$\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$$

غير موجودة:

نعلم من المحاضرة انه إذا كان لدينا تابع f معرف على مجال $[,b]$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \forall(x_n)\subset[a,b]: \lim_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)=l$$

و ذكرنا في المحاضرة أننا نستعمل هذه النظرية للبرهان على ان نهاية ما غير موجودة.

لتكن المتتالية المعرفة بحدها العام:

$$x_n=\frac{1}{n\pi}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n=0$$

$$cos\frac{1}{x_n}=cos\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}=coxn\pi=\begin{cases}1; & si\ n\ et\ paire\\ -1; & si\ n\ est\ impaire\end{cases}$$

و من تم فإن:

$$\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0} cosn\pi=\begin{cases}1; & si\ n\ et\ paire\\ -1; & si\ n\ est\ impaire\end{cases}$$

النهاية ليست وحيدة و بالتالي فإن

$$\lim_{x\to 0} cos\frac{1}{x}$$

غير موجودة

نفس البرهان بالنسبة للتابع $sin\frac{1}{x}$ في جوار الصفر.

من اجل $\alpha=0$ يكتب التابع f على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} cos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

الاستمرار:

راينا ان التابع $cos\frac{1}{x}$ ليس له نهاية في جوار النقطة $x_0=0$ و بالتالي فإن التابع غير مستمر عند النقطة $x_0=0$ رغم أنه معرف عندها.

نتيجة: من اجل $\alpha=0$ يكتب التابع f و بالتاي فهو غير قابل للاشتقاق.

من اجل $\alpha=1$ يكتب التابع f على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} xcos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

الاستمرار:

$$D_f=\mathbb{R};\ f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} xcos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $cos\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع x في جوار النقطة $x_0=0$.

أي أن التابع f مستمر عند النقطة $x_0=0$ و بالتالي فهو مستمر على $\mathbb{R}$.

الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xcos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}cos\frac{1}{x}$$

و كما رأينا سابقا فهي نهاية غير موجودة.

نتيجة: من أجل $\alpha=1$ التابع f مستمر لكنه غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$.

من اجل $\alpha=2$ يكتب التابع f على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2cos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

الاستمرار:

$$D_f=\mathbb{R};\ f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2cos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $cos\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع x^2 في جوار النقطة $x_0=0$.

أي أن التابع f مستمر عند النقطة $x_0=0$ و بالتالي فهو مستمر على $\mathbb{R}$.

الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}xcos\frac{1}{x}=0=f'(0)$$

أي ان التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$ و قيمة المشتقة في هذه النقطة هي $f'(0)=0$.

استمرار المشتقة:

$$f(x)=\begin{cases}2xcos\frac{1}{x}+sin\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R};\ f'(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2xcos\frac{1}{x}+sin\frac{1}{x}\right)$$

غير موجودة لأن لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\left(2xcos\frac{1}{x}\right)=0$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $cos\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع $2x$ في جوار النقطة $x_0=0$

أما

$$\lim_{x\to 0}sin\frac{1}{x}$$

غير موجودة

نتيجة: من أجل $\alpha=2$ التابع f مستمر قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$ لكن المشتقة غير مستمرة اي ان التابع f ليس من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$.

من اجل $\alpha=3$ يكتب التابع f على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases}x^3cos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

الاستمرار:

$$D_f=\mathbb{R};\ f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}x^3cos\frac{1}{x}=0=f(0)$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $cos\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع x^3 في جوار النقطة $x_0=0$.

أي أن التابع f مستمر عند النقطة $x_0=0$ و بالتالي فهو مستمر على $\mathbb{R}$.

الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^2 cos\frac{1}{x}=0=f'(0)$$

أي ان التابع f قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$ و قيمة المشتقة في هذه النقطة هي $f'(0)=0$.

استمرار المشتقة:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 cos\frac{1}{x}+x.sin\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R};\ f'(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\left(3x^2 cos\frac{1}{x}+x.sin\frac{1}{x}\right)=0$$

لان:

$$\lim_{x\to 0}\left(3x^2 cos\frac{1}{x}\right)=0$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $cos\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع $3x^2$ في جوار النقطة $x_0=0$

أما

$$\lim_{x\to 0}x.sin\frac{1}{x}=0$$

لنفس السبب

و منه فإن المشتقة مستمرة .

نتيجة: من أجل $\alpha=3$ التابع f مستمر قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$ و المشتقة غير مستمرة اي ان التابع f من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$.

نتيجة نهائية : من أجل $\alpha\geq 3$ فإن $f\in C^1(\mathbb{R})$

حل التمرين السادس:

دراسة الاشتقاق لتوابع التالية عند النقطة x_0

$$f(x)=\begin{cases}x.sin\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases} \text{ و } g(x)=\begin{cases}sinx.cos\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases},h(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}; & x\neq 1\\ 1 \quad ; & x=1\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x.sin\frac{1}{x}; & x\neq 0\\ 0 \quad ; & x=0\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R};\ f(0)=0$$

الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $\sin\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع x في جوار النقطة $x_0 = 0$.

أي أن التابع f مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ و بالتالي فهو مستمر على $\mathbb{R}$.

الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

و كما رأينا سابقا فهي نهاية غير موجودة.

نتيجة: التابع مستمر لكنه غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$.

$$g(x) = \begin{cases} \sin x.\cos\frac{1}{x}; & x \neq 0 \\ 0 \quad ; & x = 0 \end{cases}$$

$$D_g = \mathbb{R};\ g(0) = 0$$

الاستمرار:

$$\lim_{x\to 0}\sin x.\cos\frac{1}{x} = 0 = g(0)$$

لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما محدود و هو $\cos\frac{1}{x}$ و الاخر يؤول إلى الصفر و هو التابع $\sin x$ في جوار النقطة $x_0 = 0$.

أي أن التابع g مستمر عند النقطة $x_0 = 0$ و بالتالي فهو مستمر على $\mathbb{R}$.

الاشتقاق:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x.\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cos\frac{1}{x}$$

و غير موجودة لأنها عبارة عن جداء تابعين أحدهما يؤول إلى 1 و هو التابع $\frac{\sin x}{x}$ في جوار النقطة $x_0 = 0$ في حين التابع $\cos\frac{1}{x}$ ليس له نهاية في جوار النقطة $x_0 = 0$

نتيجة: التابع مستمر لكنه غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0 = 0$.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}; & x \neq 1 \\ 1 \quad ; & x = 1 \end{cases}$$

$$D_h = \mathbb{R}; h(1) = 1$$

$$x^2-2x+1=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases}x-1; x>1\\ 1-x; x<1\end{cases}$$

الاستمرار من اليمين:

$$\lim_{x\mapsto 1^+} h(x)=\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\mapsto 1^+} h(x)=1$$

الاستمرار من اليسار:

$$\lim_{x\mapsto 1^-} h(x)=\lim_{x\mapsto 1^-}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\mapsto 1^-}\frac{1-x}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\mapsto 1^-} h(x)=-1$$

نتيجة:

$$\lim_{x\mapsto 1^+} h(x)\neq \lim_{x\mapsto 1^-} h(x)$$

و منه فإن النهاية غير موجودة اي أن التابع غير مستمر و بالتالي فهو غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$.

<u>حل التمرين السابع:</u>

باستعمال نظرية التزيدات المنتهية نبين أن:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1};\ \forall x>0 \Leftrightarrow xln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

استعملنا فقد كون التابع ln هو تابع متزايد تماما على المجال $]0,\infty[$ فنحصل بسهولة على:

$$xln\left(1+\frac{1}{x}\right)<1<(x+1)ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x(ln(x+1)-\ln x)<1<(x+1)(ln(x+1)-lnx)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}\\ ln(x+1)-lnx>\dfrac{1}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}<ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x};\forall x>0$$

لهذا الغرض نختار التابع

$$f(x)=lnx,[a,b]=[x,x+1]$$

نعلم أن التابع ln هو تابع معرف و مستمر و قابل للإشتقاق على $]0;\infty[$ و بالتالي فهو معرف و مستمر على أي مجال جزئي من المجال $]0;\infty[$ و بما ان $[x,x+1]\subset]0;\infty[$ لان $x>0$ فهو يحقق ما يلي:

- مستمر على $[,x+1]$
- قابل للاشتقاق على المجال $]x,x+1[$

شروط نظرية التزيدات المنتهية محققة و بالتالي:

$$\exists c\in]x,x+1[:f(x+1)-f(x)=(x+1-x)f'(c)$$

$$\Leftrightarrow ln(x+1) - lnx = f'(c) \Leftrightarrow ln(x+1) - lnx = \frac{1}{c}$$

هذا لأن:

$$f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$$

$$c \in]x, x+1[\Leftrightarrow x < c < \mathrm{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}; x > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < ln(x+1) - \mathrm{lnx} < \frac{1}{x}; \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \; ; \; \forall x > 0$$

النـشـر المـحـدود

صيغة تايلور Taylor

رأينا في تعريف الاشتقاق عند نقطة x_0 أنه يسمح لنا بكتابة العلاقة التالية:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0)$$

حيث:

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x_0) = 0$$

فلو كان لدينا تابع من صنف C^n في جوار نقطة x_0 فيمكن كتابة التابع f على الشكل التالي:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + (x - x_0)^n \varepsilon(x_0)$$

حيث:

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x_0) = 0$$

بوضع:

$$R_n = (x - x_0)^n \varepsilon(x_0) \Leftrightarrow \frac{R_n}{(x - x_0)^n} = \varepsilon(x_0)$$

و بما ان:

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x_0) = 0 \Rightarrow R_n = o((x - x_0)^n)$$

و في النهاية نحصل على الصيغة التالية:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \cdots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o((x - x_0)^n)$$

تسمى هذه الصيغة الاخيرة صيغة تايلور مع باقي يونغ *Taylor-Young*, لكن سنطلق عليها اسم صيغة تايلور فقط .

نحصل على صيغة مماثلة بوضع $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

و التي تسمى صيغة ماك لوران *Maclaurin* مع باقي يونغ و تسمى اختصارا صيغة ماك لوران.

أمثلة:

بما ان التوابع المعرفة بالشكل التالي $\cdots$ $sinx, cosx, e^x, ln(x + 1)$ هي توابع من الصنف C^∞ في جوار النقطة $x_0 = 0$ فهي تقبل صيغة ماك لوران و لدينا:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1})$$

ملاحظة: لإيجاد صيغة ماك لوران للتوابع القابلة للاشتقاق n في جوار الصفر يكفي حساب القيم التالية:

$$f^{(n)}(0); n = 0,1,2,3, \dots, n$$

ثم تعويضها في صيغة ماك لوران.

يمكن إيجاد صيغة ماك لوران لبعض التوابع بالاشتقاق أو بتعويض قيمة x بـ $-x$ أو أي قيمة أخرى كمثال

باشتقاق المساوة الأخيرة نجد ان:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

و بتعويض قيمة x بـ $-x$ في العبارتين أخيرتين نجد أن:

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

<u>مثال:</u> أوجد صيغة ماك لوران من الرتبة 3 في جوار الصفر للتابع:

$$f(x) = e^x$$

ثم استنتج صيغة ماك لوران من الرتبة 6 في جوار الصفر للتابع

$$g(x) = e^{x^2}$$

لدينا التابع e^x:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

يكفي حساب

$$f^{(n)}(0); n = 0,1,2,3$$

بما ان:

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1; n = 1,2,3$$

و منه نجد أن:

$$e^x = f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

و بوضع x^2 بدل x في العبارة الأخيرة نجد:

$$e^{x^2} = g(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + o(x^6)$$

النشر المحدود:

رأينا في صيغة تايلور أن التوابع القابلة للاشتقاق n مرة يمكن تقريبها بواسطة كثيرات الحدود من الرتبة n في جوار النقطة x_0 لكن يوجد توابع غير قابلة للاشتقاق و غير مستمر بل و حتى غير معرفة عند النقطة x_0 و مع ذلك يمكن تقريبها بواسطة كثيرات الحدود مثلا التابع

$$\frac{sinx}{x}$$

هو تابع غير معرف في جوار الصفر مع ذلك يمكن تقريبه بواسطة كثير الحدود في جوار الصفر، الشيء الذي دفعنا إلى إدخال مفهوم النشر المحدود.

ملاحظة: سنكتفي هنا بدراسة النشر المحدود في جوار الصفر، و في نهاية الفصل نقوم بتعميم العلاقة الى نقطة كيفية.

تعريف: ليكن f تابع حقيقي بمتغير حقيقي معرف في جوار النقطة $x_0 = 0$ ماعدا ربما في النقطة $x_0 = 0$

نقول عن التابع f أنه يقبل نشرا محدودا في جوار النقطة $x_0 = 0$ من الرتبة n إذا وجد تابعين أحدهما كثير حدود من الدرجة n يرمز له بالرمز P_n و الاخر o معرف و مستمر في جوار الصفر و يحقق:

$$\lim_{x \mapsto 0} o(x^n) = 0$$

حيث:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$P_n(x)$ يسمى الجزء النظامي او الجزء الرئيسي للنشر المحدود.

$o(x^n)$ يسمى الباقي أو الخطأ ذو الدرجة n.

مثال 1: أوجد النشر المحدود من الرتبة 4 للتابع:

$$f(x) = \frac{sinx}{x}$$

من الوضح أن هذا التابع غير معرف عند النقطة صفر مع ذلك يملك نشرا محدودا في جوار الصفر حتى الرتبة n و بالتالي فهو يملك نشرا محدودا حتى الرتبة 4 في جوار الصفر.

من صيغة ماك لوران نجد أن:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$f(x) = \frac{sinx}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)\right)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)$$

ملاحظة: نلاحظ أننا في حسابنا للنشر المحدود من الرتبة 4 للتابع f قمنا بكتابة صيغة ماك لوران للتابع $sinx$ من الرتبة 5، لأن بعد عملية الاختزال نحصل على الرتبة المطلوبة.

<u>مثال 2:</u> أوجد النشر المحدود من الرتبة *3* للتابع:

$$f(x) = \frac{ln(1+x)}{x}$$

من الوضح أن هذا التابع غير معرف عند النقطة صفر مع ذلك يملك نشرا محدودا في جوار الصفر حتى الرتبة n و بالتالي فهو يملك نشرا محدودا حتى الرتبة *3* في جوار الصفر.

من صيغة ماك لوران نجد أن:

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$f(x) = \frac{ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)}{x}$$
$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

<u>ملاحظة:</u> نلاحظ أننا في حسابنا للنشر المحدود من الرتبة *3* للتابع f قمنا بكتابة صيغة ماك لوران للتابع $ln(1+x)$ من الرتبة *4*، لأن بعد عملية الاختزال نحصل على الرتبة المطلوبة.

<u>ملاحظات:</u>

- التابع f يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر هذا يستلزم ان نهاية التابع f في جوار الصفر موجودة و منتهية.
- إذا كان f يملك نشرا محدودا في جوار الصفر فإن هذا النشر يكون وحيدا. (يبرهن من طرف الطلبة).
- إذا كانت نهاية التابع f غير موجودة أو غير منتهية فهذا يستلزم ان f لا يملك نشرا محدودا في جوار الصفر.

فمثلا التوابع التالية:

$$\text{lnx}, \frac{1}{x}, e^{-\frac{1}{x^2}}$$

لا تقبل نشرا محدودا لان نهايتها في جوار النقطة صفر إما غير موجودة او غير منتهية.

<u>نتيجة:</u>

- إذا كان التابع f زوجي و يملك نشرا محدودا في جوار الصفر حتى الرتبة n فإن جزئه الرئيسي ${}_n(x)$ لا يحوي إلا الحدود ذات الأس زوجي.
- إذا كان التابع f فردي و يملك نشرا محدودا في جوار الصفر حتى الرتبة n فإن جزئه الرئيسي ${}_n(x)$ لا يحوي إلا الحدود ذات الأس فردي.

<u>مثال:</u>

التابع $cosx$ كما هو معروف تابع زوجي و يملك نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة $2n$ معطى بالعلاقة التالية:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

نلاحظ ان جزئه الرئيسي:

$$P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

لا يحوي سوى على الحدود ذا الأس الزوجي.

نفس الامر بالنسبة للتابع الفردي $sinx$ فإن جزئه الرئيسي لا يحوي إلا على الحدود ذات الأس فردي كما هو واضح من خلال النشر التالي:

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ملاحظة: إذا كان التابع f من الصنف C^n في جوار الصفر فإن f يملك نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة n و هي نفسها صيغة ماك لوران.

عمليات على النشر المحدود:

ليكن f, g تابعين يقبلان نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة نفسها n أي أن:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + o(x^n),$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$$

1. **الجمع:** $f + g$ يملك نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة n معطى بالعلاقة التالية:

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + o(x^n).$$

2. **الضرب في مقدار سلمي:** λf يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة n معطى بالعلاقة التالية:

$$(\lambda f)(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \lambda a_3x^3 + \cdots + \lambda a_nx^n + o(x^n)$$

3. **الجداء:** $f.g$ يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة أقل او تساوي n نحصل على جزئه الرئيسي بإجراء عملية الضرب بين الجزئيين الرئيسيين لكل من التابع f و g مع الاحتفاظ بالأس الأقل أو يساوي n.
4. **النسبة:** $\frac{f}{g}$ يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة أقل او تساوي n نحصل على جزئه الرئيسي بقسمة الجزء الرئيسي لـ f على الجزء الرئيسي لـ g حسب القوى المتزايدة حتى الرتبة n.
5. **نشر تابع مركب:** $fo\, g$ يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة n بشرط ان يتحقق $g(0) = 0$، نحصل على جزئه الرئيسي بتركيب الجزء الرئيسي لـ f و الجزء الرئيسي لـ g و الاحتفاظ دائما بالأس الأقل او يساوي n.

مثال: أنشر التوابع التالية في جوار الصفر حتى الرتبة 4:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, f(x) = \frac{sinx.cosx}{x}, g(x) = e^{cosx}$$

الحل:

لدينا

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

بالجمع و القسمة على 2 نجد:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

و هو تابع زوجي.

بالطرح و القسمة على2 نحصل على:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

و هو تابع فردي.

و لدينا النشر التالي:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

فإن:

$$cosx.sinx = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + o(x^5) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + o(x^5)$$

$$= x - \frac{4x^3}{6} + \frac{6x^5}{120} + o(x^5)$$

في النهاية نجد ان:

$$f(x) = \frac{sinx.cosx}{x} = \frac{x - \frac{4x^3}{6} + \frac{6x^5}{120} + o(x^5)}{x} = \frac{x\left(1 - \frac{4x^2}{6} + \frac{6x^4}{120} + o(x^4)\right)}{x}$$
$$= 1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^4}{20} + o(x^4)$$

و لدينا

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

أولا نلاحظ ان

$$cos0 \neq 0$$

لهذا يجب ان نضع:

$$X = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

من أجل:

$$\mathrm{x} = 0 \Rightarrow \mathrm{X} = 0$$

$$e^{1+X} = ee^X = e\left(1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + o(X^4)\right)$$

بتعويض X بقيمتها و الإحتفاظ فقط بالأس الاقل أو يساوي n نجد:

$$e^{cosx} = e\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!} + o(x^4)\right) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{24}x^4 + \frac{e}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{4e}{24}x^4 + o(x^4) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4).$$

النشر المنتهي في جوار نقطة كيفية:

صيغة النشر المحدود في جوار نقطة كيفية x_0 من الرتبة n معطاة بالعلاقة التالية:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

لكن إذا طلب منا النشر المحدود في جوار نقطة كيفية x_0 من الرتبة n يمكن ان نجري التحويل التالي:

$$\mathrm{x} = x_0 + h \Leftrightarrow h = x - x_0$$

فنجد ان:

$$f(x) = f(x_0 + h) = g(h)$$

فإذا كان التابع g يقبل نشرا محدودا في جوار الصفر من الرتبة n فإن التابع f يقبل نشرا محدودا في جوار النقطة $_0$ من الرتبة n

أي إذا كان لدينا:

$$g(x) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n + o(h^n)$$

و بوضع $h = x - x_0$ نجد:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

<u>ملاحظة:</u> يمكن أيضا إيجاد النشر المحدود في جوار ∞ (إن وجد طبعا) من الرتبة n و ذلك بإجراء التحويل التالي:

$$X = \frac{1}{x}; x \to \infty \Leftrightarrow X \to 0$$

<u>مثال:</u> ليكن التابع:

$$f(x) = lnx$$

أنشر التابع f في جوار النقطة $x_0 = 2$ من الرتبة 3.

نضع:

$$\mathrm{x} = 2 + h \Leftrightarrow h = x - 2$$

فيصبح لدينا:

$$f(x)=f(2+h)=g(h)=ln(2+h)=ln\left(2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)=ln2+ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

$$=ln2+\frac{h}{2}-\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3}+o(h^3)=ln2+\frac{h}{2}-\frac{1}{8}h^2+\frac{1}{24}h^3+o(h^3)$$

و بتعويض $h=x-2$ نجد:

$$=ln2+\frac{(x-2)}{2}-\frac{1}{8}(x-2)^2+\frac{1}{24}(x-2)^3+o((x-2)^3).$$

تطبيقات النشر المحدود:

من بين أهم تطبيقات النشر المحدود هو حساب النهايات في كل حالات عدم التعيين، او حتى في حساب نهايات بعض التوابع المعقدة. و ذلك بشر التوابع في جوار النقطة المراد حساب النهاية عندها و إلى اصغر رتبة تمكننا من إزالة حالة عدم التعيين، أو ايجاد النهاية بسهولة.

مثال: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}sin(3x)}{sh(-x)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sin^2x}$$

الحل:

لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}sin(3x)}{sh(-x)}=\frac{0}{0}\text{ح ع ت}$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Rightarrow e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2)$$

$$sinx=x+o(x^2)\Rightarrow sin(3x)=3x+o(x^2)$$

$$\mathrm{sh}(x)=x+o(x^2)\Rightarrow \mathrm{sh}(-x)=-x+o(x^2)$$

$$e^{2x}sin(3x)=(1+2x+2x^2)(3x)+o(x^2)=3x+6x^2+o(x^2)$$

نعوض الان في النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}sin(3x)}{sh(-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x+6x^2+o(x^2)}{-x+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\big(3+6x+o(x)\big)}{x\big(-1+o(x)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{3+6x+o(x)}{-1+o(x)}=-3$$

في النهاية نخلص إلى ان:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}sin(3x)}{sh(-x)}=-3.$$

ملاحظة: في حساب النهاية السابقة توقفنا في النشر المحدود عند الرتبة 2، لأنها كافية لإزالة حالة عدم التعيين، لكن إن قمنا بالنشر المحدود من رتبة اعلى فهذا لا يؤثر على النتيجة مطلقا.

لدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sin^2x}=\frac{0}{0}$$ ح ع ت

$$cosx=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Rightarrow 1-cosx=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$sinx=x+o(x^2)\Rightarrow sin^2x=x^2+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}{x^2\big(1+o(1)\big)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}=\frac{1}{2}$$

و منه نجد في النهاية:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{sin^2x}=\frac{1}{2}.$$

سلسلة التمارين

التمرين الاول:

أكتب النشر المحدود في جوار الصفر حتى الرتبة 3 للتوابع التالية

$$f(x) = (1 + 2Arctgx)(2e^x - sinx); g(x) = \frac{ln(1 + x^3)}{tgx - x}$$

ثم استنتج النهايات في جوار الصفر.

التمرين الثاني:

$$f(x) = e^{2x} + \frac{1}{1 - x} - 3x$$

اعط النشر المحدود للتابع في الجوار الصفر حتى الرتبة 2 ثم استنتج قيمة $f'(0)$ و $f''(0)$.

التمرين الثالث:

باستعمال النشر المحدود اوجد النهايات التالية :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sinx}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}; \lim_{x \to 0} \frac{x - xcosx}{x - sinx}; \lim_{x \to 0} (arctgx)^{\frac{1}{x^2}}; \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x\right)$$

حـــل سلسـلـــة التمـــاريــن

حل التمرين الاول:

$$Arctgx = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow 1 + 2Arctgx = 1 + 2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \Rightarrow 2e^x = 2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \Rightarrow 2e^x - sinx = 2 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = (1 + 2Arctgx)(2e^x - sinx) = \left(1 + 2x - \frac{2}{3}x^3\right)\left(2 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) + o(x^3)$$
$$= 2 + 5x + 3x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow ln(1 + x^3) = x^3 + o(x^3)$$

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \Rightarrow tgx - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

استنتاج النهاية يترك للطلبة

حل التمرين الثاني:

$$f(x) = e^{2x} + \frac{1}{1 - x} - 3x$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^2) \Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = e^{2x} + \frac{1}{1 - x} - 3x = 2 + 3x^2 + o(x^2)$$

بما أن التابع f قابل للاشتقاق في جوار الصفر فهو يقبل صيغة ماك لوران من اي رتبة و لهذا فان:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

و منه و بالمطابقة نجد بسهولة:

$$f(0) = 2\,, f'(0) = 0, f''(0) = 6$$

حل التمرين الثالث:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - sinx}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \frac{0}{0}$$

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3), x - sinx = \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$$

و منه نجد بسهولة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - sinx}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - xcosx}{x - sinx} = \frac{0}{0}$$

$$x - sinx = \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\,, x - xcosx = x - x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2!}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - xcosx}{x - sinx} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2!}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3}$$

البقية تترك للطبة

الفضاء الشعاعي

تعريف العملية الداخلية:

لتكن G مجموعة كيفية و لتكن $*$ عملية, نقول عن العملية $*$ أنها عملية داخلية في المجموعة G إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x, y \in G: x * y \in G$$

يمكن تعريف العملية الداخلية أنه تطبيق من مجموعة G^2 نحو المجموعة G الذي يرفق كل ثنائية $(x, y) \in G^2$ بالعدد $x * y \in G$.

تعريف العملية الخارجية:

لتكن G و K مجموعتان و لتكن T عملية, نقول عن العملية T أنها عملية خارجية في المجموعة G إذا تحقق ما يلي:

$$\forall x \in G;\ \forall \lambda \in K: \lambda T x \in G$$

يمكن تعريف العملية الخارجية أنه تطبيق من مجموعة $\mathrm{K} \times \mathrm{G}$ نحو المجموعة G الذي يرفق كل ثنائية $(\lambda, x) \in \mathrm{K} \times \mathrm{G}$ بالعدد $\lambda T x \in G$.

أمثلة:

الجمع في مجموعة الاعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ هو عملية داخلية في $\mathbb{R}$.

الضرب في مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هو عملية داخلية في $\mathbb{N}$.

تركيب التطبيقات هو عملية داخلية في مجموعة التطبيقات المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

عملية ضرب الاعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ في التوابع المستمرة هي عملية خارجية.

عملية ضرب الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (و هي عبارة عن نقط من المستقيم) في نقط من المستوي $\mathbb{R}^2$ هي عملية خارجية.

تعريف الزمرة:

لتكن G مجموعة كيفية و لتكن $*$ عملية داخلية في المجموعة G نقول عن الثنائية $(G,*)$أنها زمرة إذا تحقق ما يلي:

1. $*$ عملية داخلية أي:

$$\forall x, y \in G: x * y \in G$$

2. $*$ عملية تجميعية أي:

$$\forall x, y, z \in G: (x * y) * z = x * (y * z)$$

3. وجود العنصر الحيادي في G بالنسبة للعملية $*$ أي:

$$\exists e \in G; \forall x \in G: x * e = e * x = x$$

4. لكل عنصر نظير في G بالنسبة للعملية $*$ أي:

$$\forall x \in G; \exists x' \in G: x * x' = x' * x = e$$

ملاحظات:

- إذا كانت العملية $*$ تبديلية في G نقول عن الثنائية $(G,*)$ أنها زمرة تبديلية.
- من الضروري ايجاد العنصر الحيادي قبل العنصر النظير.
- يجب التأكد دائما من أن العملية المعطاة هي عملية داخلية.

أمثلة:

1. $(\mathbb{Z},+)$ هي زمرة تبديلية لأن الجمع في مجموعة الاعداد الصحيحة هو عملية داخلية, تجميعية, و العنصر الحيادي هو 0 و لكل عنصر نظير و هو معكوس العدد, كما ان الجمع تبديلي.
2. $(\mathbb{N},+)$ ليست زمرة رغم ان الجمع في مجموعة الاعداد الطبيعية هو عملية داخلية تجميعية و يوجد العنصر الحيادي و هو الصفر لكن لا يوجد العنصر النظير في $\mathbb{N}$.
3. $(\mathbb{R},+)$ هي زمرة تبديلية لأن الجمع في مجموعة الاعداد الحقيقية هو عملية داخلية, تجميعية, و العنصر الحيادي هو 0 و لكل عنصر نظير في $\mathbb{R}$ و هو معكوس العدد, كما ان الجمع تبديلي.
4. $(\mathbb{Z},.)$ ليست زمرة رغم أن الضرب في مجموعة الاعداد الصحيحة هو عملية داخلية, تجميعية, و العنصر الحيادي هو 1 و لكن لا يوجد العنصر النظير في $\mathbb{Z}$
5. $(\mathbb{R},.)$ ليست زمرة رغم أن الضرب في مجموعة الاعداد الصحيحة هو عملية داخلية, تجميعية, و العنصر الحيادي هو 1 و لكل عنصر نظير و هو مقلوب العدد باستثناء العدد 0 ليس له مقلوب. لكن $(\mathbb{R}^*,.)$ هي زمرة تبديلية.

تعريف الحقل:

لتكن K مجموعة كيفية و لتكن $+,.$ عمليتان داخليتان في المجموعة K نقول عن الثلاثية $(K,+,.)$أنها حقل إذا تحقق ما يلي:

- الثنائية $(K,+)$ زمرة تبدلية.
- الثنائية $(K^*,.)$ زمرة (K^* هي المجموعة K ما عدا العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الثانية و هي .).
- العملية . توزيعية على العملية + في المجموعة K.

ملاحظة: إذا كانت العملية . هي عملية تبديلية في K نقول عن الثلاثية $(K,+,.)$أنها حقل تبديلي.

أمثلة:

1. مجموعة الاعداد الحقيقية مزودة بعمليتي الضرب و الجمع العادي $(\mathbb{R},+,.)$ هي حقل تبدلي.
2. مجموعة الاعداد المركبة مزودة بعمليتي الضرب و الجمع $(\mathbb{C},+,.)$ هي حقل تبدلي.

تعريف:

ليكن K حقلا, V مجموعة غير خالية, نقول أن V هو فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحقق ما يالي:

1) $(V,+)$ زمرة تبديلية

2)

$$\forall x \in V, \forall \lambda \in K : \lambda x \in V$$

وتكون الخواص التالية محققة:

$$\begin{aligned}
&a)\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V : (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x\\
&b)\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V : \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y\\
&c)\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x\\
&d)\forall x \in V : 1.x = x
\end{aligned}$$

حيث 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب في K

تسمى عناصر V بالأشعة وعناصر K بالمقادير السلمية.

أمثلة:

1) كل حقل تبديلي K فهو فضاء شعاعي على الحقل K.

2) مجموعة الأعداد المركبة $(\mathbb{C},+,.)$ هي فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$، .

3) مجموعة الأعدادالحقيقية $(\mathbb{R},+,.)$ هي فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

4) $(\mathbb{R}^2,+,.)$ هي فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

ملاحظة:

ليكن V_1,V_2 فضاءين شعاعيين على نفس الحقل K

فإن $V_1 \times V_2$ هو فضاء شعاعي على الحقل K يسمى بفضاء الجداء الديكارتي .

يمكن تعميم هذه الملاحظةإلى n فضاء شعاعي $V_1,V_2,\ldots,V_n$ على نفس الحقل K حيث يسمى الفضاء

بالفضاء الجداء.

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$$

ترميز:

نرمز للعنصر الحيادي في V بالنسبة لعملية الجمع بالرمز 0_V (الشعاع المعدوم).

نرمز للعنصر الحيادي في K بالنسبة لعملية الجمع بالرمز 0_K

قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي:

ليكن $(V,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K

$$\begin{aligned}
&1)\forall \lambda \in K : \lambda.0_V = 0_V\\
&2)\forall x \in V : 0_K.x = 0_V\\
&3)\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee x = 0\\
&4)\forall x_1,x_2,x_3 \in V : x_1 + x_3 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 = x_2\\
&5)\forall \lambda \in K, \forall x \in V : (-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x)\\
&6)\forall \lambda,\mu \in K, \forall x \in V : (\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x\\
&7)\forall \lambda \in K, \forall x,y \in V : \lambda(x-y)\lambda x - \lambda y
\end{aligned}$$

ملاحظة:

1) $\lambda - \mu = \lambda + (-\mu)$ حيث $(-\mu)$ هو العنصر النظير لـ μ بالنسبة للجمع في K .

2) $x - y = x + (-y)$ حيث $(-y)$ هو العنصر النظير لـ y بالنسبة للجمع في V.

الفضاءات الشعاعية الجزئية:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K , وليكن F مجموعة جزئية من V.

نقول عن F بأنه فضاء شعاعي جزئي من V إذا وفقط إذا:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)0_V \in F \\ 2)\forall x, y \in F : x - y \in F \\ 3)\forall \lambda \in K, \forall x \in F : \lambda x \in F \end{array}}$$

ملاحظة:

إذا كان V فضاء شعاعي على الحقل K فإن كل من V و $\{0_V\}$ هي ف ش ج من V.

نتيجة:

أي فضاء شعاعي جزئي هو فضاء شعاعي أيضا.

نتيجة:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K , وليكن F مجموعة جزئية من V.

نقول عن F بأنه فضاء شعاعي جزئي من V إذا وفقط إذا:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)0_V \in F \\ 2)\forall \lambda, \mu \in K, \forall x, y \in F : \lambda x + \mu y \in F \end{array}}$$

نتيجة:

لتكن $\{F_i\}_{i\in I}$ أسرة فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء V على الحقل K:

فإن $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V على الحقل K

ملاحظة:

إن إتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس بالضرورة فضاء شعاعي جزئي.

مثال:

ليكن

$$F_1=\{(0,y)\in\Re^2; y\in\Re\}$$
$$F_2=\{(x,0)\in\Re^2; x\in\Re\}$$

هي فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي $\Re^2$.

نلاحظ أن:

$$(3,0)\in F_1 \wedge (0;2)\in F_2$$

ولكن

$$(3,0)+(0,2)=(3,2)\notin F_1\cup F_2$$

أي أن $F_1\cup F_2$ ليس فضاء شعاعيا جزئيا من الفضاء $\Re^2$.

نتيجة:

لتكن F_1,F_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاءالشعاعي V على الحقل K فإن:

$$F_1+F_2=\{x+y: x\in F_1\wedge y\in F_2\}$$

هو فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V على الحقل K.

ملاحظة:

يمكن تعميم هذه النتجة عل n فضاء شعاعي جزئي .

الإرتباط الخطي و الإستقلال الخطي:

تعريف:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K,

ولتكن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ أشعة ما من الفضاء V, و $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ مقادير سلمية من الحقل K .

فإن الشعاع

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$$

يسمى مزجا خطيا للأشعة $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

ونقول **أن** الفضاء الشعاعي V مولد بالأشعة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ إذا كان كل شعاع $x\in V$ هو مزج خطي للأشعة

$x_1,x_2,\ldots,x_n$.

مثال:

لتكن الأشعة التالية :

$$x_1 = (1,-1,1), x_2 = (2,3,1), x_3 = (2,1,-1) \in \Re^3$$

فإن الشعاع

$$x = (-1,5,3)$$

هو عبارة عن مزج خطي للأشعة

$$x_1 = (1,-1,1), x_2 = (2,3,1), x_3 = (2,1,-1) \in \Re^3$$

أي أن:

$$\begin{aligned}
& x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \Rightarrow (-1,5,3) = \alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(2,3,1) + \alpha_3(2,1,-1) \\
& \Rightarrow (-1,5,3) = (\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_1) + (2\alpha_2, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3) \\
& \Rightarrow (-1,5,3) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \\
& \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

نتيجة:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K , ولتكن

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

مجموعة من الأشعة في V, فإن مجموعة كل الأمزجة الخطية B للجملة A هي فضاء شعاعي جزئي من V

وهو أصغر فضاء شعاعي جزئي من V يحوي المجموعة A .

ونرمز لهذا الفضاء الشعاعي الجزئي بالرمز

$$B = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

تعريف الإرتباط الخطي:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K , نقول أن الأشعة

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

مرتبطة خطيا إذا وجد n مقدارا سلميا $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ليست كلها معدومة بحيث:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=0$$

تعريف الإستقلال الخطى:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K , نقول أن الأشعة

$$x_1,x_2,\ldots,x_n$$

مستقلة خطيا إذا لم تكن مرتبطة خطيا أي أن:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=0\Rightarrow\alpha_i=0,\forall i=1,\ldots,n$$

مثال:

في IR^3

نلاحظ أن:

$$e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$$

$$\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\lambda_3 e_3=0\Rightarrow\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow(\lambda_1,0,0)+(0,\lambda_2,0)+(0,0,\lambda_3)=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$$

فإنه ينتج

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

ومنه الأشعة $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ مستقلة خطيا

مثال:

في IR^4 الأشعة

$$x_1=(0,1,1,0),x_2=(1,1,1,0),x_3=(1,0,0,0)$$

من الواضح أن:

$$x_2=x_3+x_1$$

ومنه فإن x_1,x_2,x_3 مرتبطة خطيا.

ملاحظة:

تكون جملة من أشعة مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان أحد عناصر هذه الأشعة يكتب على شكل مزج خطي للعناصر المتبقية.

ملاحظة:

1) كل عائلة تحوي عائلة مرتبطة خطيا فهي مرتبطة خطيا.

2) كل عائلة مستخرجة من عائلة مستقلة خطيا فهي مستقلة خطيا.

3) كل شعاع في عائلة مستقلة خطيا فهو غير معدوم .

4) كل عائلة تحوي الشعاع المعدوم فهي مرتبطة خطيا.

الأساس والبعد:

تعريف أساس الفضاء الشعاعي:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K , نقول أن الأشعة

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

هي أساس في الفضاء الشعاعي V , إذا تحقق ما يلي:

1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مستقلة خطيا.

2) إذا كان أي شعاع من V هو مزج خطي للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

مثال:

ليكن $V = K$ هو فضاء شعاعي على الحقل K لدينا:

$$a \in K - \{0\}, \forall x \in K : x = \frac{x}{a} a \Rightarrow K = vect\{a\} = [a]$$

وبما أن $\{a\}$ مستقلة خطيا فإن $\{a\}$ تشكل أساس لـ K .

ملاحظة:

هذا المثال يوضح أنه يمكن لفضاء شعاعي أن يتمتع بعدد غير منته من الأسس

مثال:

الأشعة

$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$$

هي أساس في IR^2 لأن:

1) الأشعة $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ مستقلة خطيا.

2)الأشعة $e_1=(1,0),e_2=(0,1)$ مولدة لـ IR^2 أي :

$$\forall(x,y)\in IR^2;\exists\alpha,\beta\in IR:(x,y)=\alpha e_1+\beta e_2\Rightarrow(x,y)=(\alpha,0)+(0,\beta)$$
$$\Rightarrow(x,y)=(\alpha,\beta)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x\\\beta=y\end{cases}$$

مثال:

الأشعة

$$e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$$

هي أساس في IR^3 لأن:

1) الأشعة $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ مستقلة خطيا.

2)الأشعة $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ مولدة لـ IR^2 أي :

$$\forall(x,y,z)\in IR^3;\exists\alpha,\beta,\lambda\in IR:(x,y,z)=\alpha e_1+\beta e_2+\lambda e_3$$
$$\Rightarrow(x,y,z)=(\alpha,0,0)+(0,\beta,0)+(0,0,\lambda)$$
$$\Rightarrow(x,y,z)=(\alpha,\beta,\lambda)\Rightarrow\begin{cases}\alpha=x\\\beta=y\\\lambda=z\end{cases}$$

مثال:

الجملة $\{1,i\}$ هي أساس في الفضاء الشعاعي C على الحقل IR لأن:

1) الجملة $\{1,i\}$ مستقلة خطيا.

2) الجملة $\{1,i\}$ مولدة للفضاء C .

ملاحظة:

ليكن $V=IR^n$ الأشعة التالية:

$$e_1=(1,0,0,...,0),e_2=(0,1,0,...,0),e_n=(0,0,0,...,1)$$

هي أساس في الفضاء الشعاعي IR^n ويسمى هذا الأساس بالأساس القانوني في الفضاء الشعاعي IR^n .

نتيجة:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $x_1,x_2,\ldots,x_n$ **أشعة في** V فإن:

$x_1,x_2,\ldots,x_n$ تشكل أساس في الفضاء الشعاعي V $\Leftrightarrow$ إذا كان أي شعاع من V يكتب بشكل وحيد عل شكل مزج

خطي للأشعة $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

تعريف:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ **أشعة في** V

نقول عن مجموعة الأشعة $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ أنها أقصى مجموعة مستقلة خطيا إذا تحقق مايلي:

1) المجموعة S مستقلة خطيا.

2) إذا كان $y \in V$ حيث $y \notin S$ المجموعة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y\}$ مرتبطة خطيا.

نتيجة:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ مجموعة **أشعة في** V فإن:

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ تشكل أساس في الفضاء الشعاعي V $\Leftrightarrow$ إذا كانت المجموعة S أقصى مجموعة مستقلة خطيا .

ملاحظة:

1)كل فضاء شعاعي مولد بعدد منتهي من الأشعة يحتوي على أساس منتهي.

2)ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن جملة الأشعة $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ أساس للفضاء V بحيث:

$card(S) = n$ فإن أي أساس أخر سيحتوي على n شعاع.

تعريف بعد الفضاء الشعاعي:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K مولد بعدد منتهي من الأشعة , وإذا كانت $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ أساس للفضاء V فإننا نسمي بعد الفضاء الشعاعي V عدد أشعة الجملة S ونرمز لها $\dim(V)$.

$$\dim(V) = card(S)$$

مثال:

الأشعة

$$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$$

هي أساس في IR^2 لأن:

ومنه فإن $\dim(IR^2) = 2$

مثال:

الأشعة

$$\boxed{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)}$$

هي أساس في IR^3 لأن:

ومنه فإن $\dim\left(IR^3\right)=3$

مثال:

الجملة $\{1,i\}$ هي أساس في الفضاء الشعاعي C على الحقل IR ومنه فإن:

$$\dim(C)=2$$

ملاحظة:

إذا لم يكن الفضاء الشعاعي V منتهي البعد فإننا نصطلح على أن:

$$\boxed{\dim(V)=\infty}$$

ونقول بأنه فضاء لانهائي البعد.

نتيجة:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K حيث:

$$\boxed{\dim(V)=n}$$

عندئذ أي جملة S مستقلة خطيا فإن:

$$\boxed{card(S)\leq n}$$

و إذا كان:

$$\boxed{card(S)=n}$$

فإن S تشكل أساس للفضاء V.

نتيجة:

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K ذا بعد منتهي حيث:

$$\boxed{\dim(V)=n}$$

وليكن F فضاء شعاعي جزئي من الفضاء V فإن:

$$\boxed{\dim(F)\leq n}$$

و إذا كان:

$$\dim(F)=n\Rightarrow F=V$$

وإذا كان:

$$F=\{0_V\}\Rightarrow \dim(F)=0$$

مبرهنة:

ليكن V_1,V_2 فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي V على الحقل K فإن:

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$$

نتيجة:

إذا كان

$$(V_1\cap V_2)=\{0\}\Rightarrow \dim(V_1\cap V_2)=0$$

في هذه الحالة يكون:

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$$

وإذا كان لدينا

$$V=V_1+V_2$$

عندئذ نكتب

$$V=V_1\oplus V_2$$

ونقول أن الفضاء الشعاعي V هو المجموع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية V_1,V_2 .

مثال:

ليكن

$$F_1=\{(0,y)\in IR^2;y\in IR\}$$
$$F_2=\{(x,0)\in IR^2;x\in IR\}$$

فضاءين جزئيين من الفضاء IR^2 نلاحظ أن:

$$\begin{cases}F_1\cap F_2=\{0\}\Rightarrow \dim(F_1\cap F_2)=0\\ IR^2=F_1+F_2\end{cases}\Rightarrow \dim(F_1+F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2)$$
$$\Rightarrow IR^2=F_1\oplus F_2$$

تمرين01

ليكن V فضاء شعاعي على الحقل K بعده 6, و ليكن E,F فضائين شعاعيين جزئيين من الفضاء V بعد كل منهما 4,

حيث $E \neq F$.

هل $E \cap F = \{0_V\}$ ولماذا؟

تمرين 2

1) عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون الشعاع $X = (-1,2,a)$ من IR^3 مزجا خطيا للأشعة

$X_1 = (1,1,1), X_2 = (1,2,3)$

2)برهن أن الأشعة $X_1 = (1,1,1), X_2 = (1,2,3), X_3 = (2,-1,1)$ تولد الفضاء الشعاعي IR^3

إستنتج أنها أساس لـ IR^3.

تمرين 3

ما هي قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون الأشعة التالية في IR^4 مرتبطة خطيا:

$X_1 = (1,2,3,1), X_2 = (0,3,-1,2), X_3 = (1,0,3,-4), X_4 = (2,5,a,-1)$

التمرين 01:

أدرس الاستقلال الخطي للجمل التالية:

$$\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

$$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

$$\{(1,2,1),(2,1,3),(1,0,0)\}$$

$$\{(1,2,1),(1,1,1),(2,1,1),(0,1,1)\}$$

حل التمرين:

دراسة الاستقلال الخطي:

$$\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

ليكن:

$$\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}: \alpha(1,1,0)+\beta(1,0,1)+\lambda(0,1,1)=(0,0,0)\Leftrightarrow(\alpha+\beta,\alpha+\lambda,\beta+\lambda)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha+\lambda=0\\ \beta+\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\alpha\ \dots\dots(1)\\ \alpha=-\lambda\ \dots\dots(2)\\ \beta=-\lambda\ \dots\dots(3)\end{cases}$$

من الجملة الأخيرة نجد أن $\lambda=-\lambda=\beta$ أي ان العدد الحقيقي β موجب و سالب في نفس الوقت أي انه معدوم و بالتالي فإن:

$$\alpha=\beta=\lambda=0$$

أي ان الاشعة مستقلة خطيا.

$$\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

من الواضح أن:

$$(1,1)=(1,0)+(0,1)$$

أي أن الأشعة مرتبطة خطيا.

$$\{(1,2,1),(2,1,3),(1,0,0)\}$$

ليكن:

$$\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}: \alpha(1,2,1)+\beta(2,1,3)+\lambda(1,0,0)=(0,0,0)\Leftrightarrow(\alpha+2\beta+\lambda,2\alpha+\beta,\alpha+3\beta)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\beta+\lambda=0\ \dots\dots(1)\\ \quad 2\alpha+\beta=0\ \dots\dots(2)\\ \quad \alpha+3\beta=0\ \dots\dots(3)\end{cases}$$

من المعادلة (3) نجد أن $\alpha=-3\beta$ نعوض قيمة α في المعادلة (2) نجد ان $\beta=0$ أي ان α بالتعويض في المعادلة (1) نستنتج مباشرة ان:

$$\alpha=\beta=\lambda=0$$

أي ان الاشعة مستقلة خطيا.

$$\{(1,2,1),(1,1,1),(2,1,1),(0,1,1)\}$$

من الواضح أن

$$(2,1,1)=2(1,1,1)+0(1,2,1)-(0,1,1)$$

و هذا يدل على أن الاشعة مرتبطة خطيا.

ملاحظة: بعد دراسة البعد سيتبين لنا انه ان كان عدد الاشعة اكبر من بعد الفضاء الشعاعي فان الاشعة من المؤكد تكون مرتبطة خطيا.

التمرين 02:

لتكن :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

بين ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

أوجد اساس و بعد الفضاء الشعاعي الجزئي E.

بين لماذا المجموعة التالية F ليست فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$$

حل التمرين:

لتكن :

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

بيان ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$:

$$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in E;\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in E?$$

$$\Leftrightarrow (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z') \in E?$$

$$\Leftrightarrow \alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - \alpha z - \beta z' = 0?$$

$$\forall (x, y, z) \in E \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}; \alpha x + \alpha y - \alpha z = 0 \text{ ....(1)}$$

$$\forall (x', y', z') \in E \Leftrightarrow x' + y' - z' = 0 \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R}; \beta x' + \beta y' - \beta z' = 0\text{..........(2)}$$

بجمع المعادلة (1) و (2) نجد أن:

$$\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' - \alpha z - \beta z' = 0$$

و هو المطلوب أي ان E فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$.

ايجاد اساس و بعد الفضاء الشعاعي الجزئي E.

$$\forall (x, y, z) \in E \Leftrightarrow x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$$

$$\forall (x, y, z) \in E: (x, y, z) = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1,0,1) + y(0,1,1)$$

$$\forall (x, y, z) \in E; \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / (x, y, z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1)$$

أي أن الفضاء الشعاعي الجزئي E مولد بالأشعة $(1,0,1), (0,1,1)$ و نكتب:

$$E = [(1,0,1), (0,1,1)]$$

ندرس الاستقلال الخطي للأشعة المولدة:

ليكن $\beta \in \mathbb{R}$, حيث

$$\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,1)=(0,0,0)\Rightarrow \alpha=\beta=0$$

أي ان الاشعة مستقلة خطيا و بالتالي فإن الجملة $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ تشكل اساس في الفضاء الشعاعي الجزئي E.

و منه فإن:

$$dimE=2$$

F ليست فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$

$$F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x+y-z=1\}$$

لان لا تحقق شروط الفضاء الشعاعي الجزئي و بالأخص لا تحوي على الشعاع المعدوم.

التمرين 03:

بإعطاء مثال مضاد بين أن اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس فضاء شعاعي جزئي

حل التمرين:

إعطاء مثال مضاد على أن اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين ليس فضاء شعاعي جزئي:

يكفي أخذ الفضاءين الشعاعيين الجزئيين من $\mathbb{R}^2$

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0\}$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0\}$$

نلاحظ ان:

$$(0,1)\in A\Rightarrow (0,1)\in A\cup B$$

$$(1,0)\in B\Rightarrow (1,0)\in A\cup B$$

لكن:

$$(0,1)+(1,0)=(1,1)\notin A\cup B$$

أي ان الاتحاد ليس مستقر بالنسبة لعملة الجمع, و منه فان الاتحاد ليس فضاء شعاعي جزئي.

التمرين 04:

ليكن:

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0\}$$

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0\}$$

فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء $\mathbb{R}^2$

أوجد الفضاء الشعاعي الجزئي $A\cap B$.

بين أن $\mathbb{R}^2 = A + B$.

استنتج أن $\mathbb{R}^2 = A \oplus B$.

حل التمرين:

ليكن:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء $\mathbb{R}^2$

ايجاد الفضاء الشعاعي الجزئي $A \cap B$.

$$(x, y) \in A \cap B \Leftrightarrow (x, y) \in A \wedge (x, y) \in B \Leftrightarrow x = y = 0$$

و منه فإن:

$$A \cap B = \{(0,0)\} \Rightarrow dim(A \cap B) = 0$$

بين أن $\mathbb{R}^2 = A + B$.

لدينا من العلاقة:

$$dim(A + B) = dimA + dimB - dim(A \cap B) = 1 + 1 - 0 = 2$$

$$\Leftrightarrow dim(A + B) = dim\mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow A + B = \mathbb{R}^2$$

استنتاج أن $\mathbb{R}^2 = A \oplus B$:

من خلال تعريف المجموع المباشر نجد ان

$$\mathbb{R}^2 = A \oplus B \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = \mathbb{R}^2 \\ A \cap B = \{(0,0)\} \end{cases}$$

التمرين 05:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \ \wedge x = y\}$$

فضاءين شعاعيين جزئيين من الفضاء $\mathbb{R}^3$.

برهن أن $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.

يحل بنفس طريقة التمرين الرابع مع الأخذ بعين الإعتبار الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ بدل $\mathbb{R}^2$.