Chapitre I

Propriétés des fluides

Généralités

La mécanique est une branche de la physique dont l'objet est l'étude du mouvement, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes physiques. Cette science applique les lois gouvernant les mouvements de différents sortes de corps.

La mécanique des fluides est une branche de la mécanique qui étudie les écoulements des fluides* lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. C'est la science qui applique les principes fondamentaux de la mécanique générale aux liquides et gaz. Ces principes sont la conservation de la masse, la conservation de l'énergie et la loi du mouvement de Newton. Pour l'étude des fluides compressibles, on a besoin de considérer les lois de la thermodynamique.

*Le fluide : le fluide est tout corps qui prend la forme du vase qui le contient. C'est un corps continu sans rigidité qui peut s'écouler et subir de grandes déformations même sous l'action de forces très faibles.

Les liquides et les gaz sont des fluides. Leur mouvement est régi par les mêmes équations avec la différence que les liquides sont très peu compressibles et les gaz sont compressibles et expansibles indéfiniment.

La mécanique des fluides se compose de deux sous branches :

- La statique des fluides ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos.
- La dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement en calculant diverses propriétés du fluide comme la vitesse, la pression, la masse volumique et la température en tant que fonctions de l'espace et du temps.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme les turbomachines, les moteurs à explosion, la pollution, les réseaux hydrauliques, l'ingénierie navale, l'étude de l'écoulement du sang (hémodynamique), l'étude du comportement des pâtes alimentaires, la théorie de la lubrification, la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie

I-Propriétés des fluides

I-1-La masse volumique

Soit une masse de fluide δm ayant un volume $\delta \mathcal{V}$. La masse volumique du fluide en un point A à l'intérieur du volume est: $\rho = \lim_{\delta \mathcal{V} \to 0} \frac{\delta m}{\delta \mathcal{V}}$. Son unité est kg/ m^3.

- Des valeurs numériques de la masse volumique en kg/m^3 pour l'air et l'eau à la pression atmosphérique sont représentées sur le tableau I-1ci-dessous :

Fluide/température	0 ° C	4 ° C	20 ° C	100 ° C
Air	1.294	-	1.20	0.95
Eau	999.87	1000	998.2	958.7

Tableau I-1 masse volumique de l'air et l'eau à différentes température

La variation de la masse volumique est importante dans les gaz est varie avec la pression et la température. Dans les liquides, elle est presque constante: la masse volumique de l'eau augmente seulement de 1% si la pression augmente d'un facteur de 220. Pour cela la plus part des liquides sont considérés comme fluides incompressibles.

En général la valeur de la masse volumique des liquides est plus importante que celle des gaz à pression atmosphérique.

Le liquide le plus lourd est le mercure, et le gaz le plus léger est l'hydrogène. Leurs masses volumiques à 20°C et 1 atm sont: $\rho_{Hg} \approx 13600$ kg/m^3 et $\rho_{H2} = 0.0838$ kg/m^3. Le rapport entre les deux masses volumiques est de 162000.

Le plus souvent la valeur de la masse volumique du mercure utilisée dans les applications est $\rho_{Hg} = 13600$ kg/m^3.

I-2-La densité

La densité est le rapport de la masse volumique d'un fluide par rapport à celle du fluide de référence, qui est l'eau pour les liquides et l'air pour les gaz. La densité est donc sans unité.

$$d_{gaz} = \frac{\rho_{gaz}}{\rho_{air}} \text{ et } d_{liquide} = \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{eau}}$$

I-3-Le poids spécifique

Le poids spécifique d'un fluide, désigné par γ (gamma), est son poids par unité de volume $\gamma=\rho g$. Son unité est N/m^3.

I-4-1-Viscosité dynamique *μ*

La viscosité μ est une propriété d'un fluide due à la cohésion et à l'interaction entre les molécules qui présentent une résistance aux déformations .

Tous les fluides sont visqueux et obéissent à la loi de viscosité établie par Newton

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{dU}{dz}$$

$\frac{dU}{dz}$: taux de déformation de cisaillement

μ: viscosité dynamique du fluide. Son unité est le Poiseuille *Pl*, *Pl*= Pa.s=N m^{-2} s = kg/m s

Une poise P =0.1 *Pl*

I-4-2-La viscosité cinématique ν

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Son unité est donc m^{2}s^{-1}(kg m^{-1}s^{-1}/kg m^{-3}). On remarque qu'elle est indépendante de l'unité de masse kg et ne dépend que des unités de la cinématique c'est à dire les unités de longueur et de temps d'où le nom de viscosité cinématique

1-4-3-Fluides newtoniens et fluides non-newtoniens

Les fluides pour lesquels la contrainte de cisaillement est proportionnelle (varie linéairement) au taux de déformation (donc au gradient de vitesse) sont appelés fluides newtoniens. La plupart des fluides courants tels que l'eau, l'air, l'essence et les huiles sont newtoniens.

I-5-Quelques Définitions

1-Fluide parfait : est un fluide **non** visqueux, (μ=0).

2-Fluide réel : est un fluide visqueux, (μ≠0).

3-Fluide compressible ou incompressible : la masse volumique du fluide **varie** ou **ne varie pas** lors de l'écoulement respectivement.

4- Ecoulement subsonique, supersonique : l'écoulement est subsonique (supersonique) si la vitesse du fluide V est inférieure (supérieure) à la vitesse du son c. Dans ce cas, le nombre de Mach = V / c < 1 (> 1).

5- Ecoulement laminaire, turbulent : Un écoulement peut être laminaire ou turbulent

6- Ecoulement externe, interne : les écoulements externes sont des écoulements en milieu ouvert, non confiné autour d'objets. Les écoulements internes sont confinés, par exemple à l'intérieur d'un conduit. Ils sont limités par des parois fixes ou mobiles.

7- Ecoulement unidimensionnel, bidimensionnel, tridimensionnel :un écoulement est unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel si les paramètres qui le caractérisent (tels que la vitesse, la pression, la température etc.) dépendent de une, deux ou trois variables d'espace respectivement.

8- Ecoulement permanent ou stationnaire, non permanent ou instationnaire : un écoulement est permanent ou stationnaire (non permanent ou instationnaire) lorsque les grandeurs caractéristiques, en chaque point donné du domaine, ne varient pas (varient) avec le temps, $\frac{\partial(\,)}{\partial t} = 0$, ($\frac{\partial(\,)}{\partial t} \neq 0$).

Chapitre II

Statique des fluides

La statique des fluides est la science qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. La résultante de toutes les forces agissant sur toute particule est nulle.

II-1-Notion de pression en un point d'un fluide

$$P_M = \lim_{dA\to 0} \frac{dF_n}{dA}$$

L'unité de la pression est le pascal Pa: 1Pa=1N/m^2

On a aussi un bar = 10^5 Pa

Une autre unité de la pression est l'atmosphère telle que 1atm=1.01325 ×10^5 Pa=1.01325 bar

Remarques

-Un fluide a toujours une pression.

-La pression absolue p_{abs} est un scalaire toujours **positif**.

- La pression effective est donnée par: $p_{eff} = p_{abs} - p_{atm}$ où p_{atm} est la pression atmosphérique.

II-2-Equation fondamentale de la statique des fluides

Soit un volume fluide $\mathcal{V}$ soumis à la force volumique de pesanteur $\vec{F}_V$ et à la force surfacique $\vec{F}_S$, le fluide est au repos donc $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_V + \vec{F}_S = \vec{0}$

$$\int_V \rho \vec{g}\, d\mathcal{V} - \oint_A p\, \vec{n}_{ext}\, dA = \vec{0}$$

D'une autre part la formule du gradient permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume qui est délimité par cette surface.

$$\oiint_A p\, \vec{n}_{ext}\, dA = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{grad}\, p\, d\mathcal{V}$$

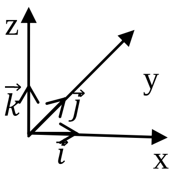
$$\int_{\mathcal{V}} \rho \vec{g}\, d\mathcal{V} - \int_{\mathcal{V}} \overrightarrow{grad}\, p\, d\mathcal{V} = \vec{0}$$

Rappelons que $\overrightarrow{grad}\, p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$

$$\rho \vec{g} = \overrightarrow{grad}\ p$$

Cette relation représente l'équation fondamentale de l'hydrostatique.

En projetant cette équation sur les différents axes on trouve :



$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

L'équation montre que la variation de la pression ne dépend que de la coordonnée z. On peut écrire alors:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \text{ ou bien } dp = -\rho g\, dz$$

- Cela signifie qu'à une altitude donnée (z fixée) la pression est la même. Les plans horizontaux (x, y) sont des surfaces isobares pour le même fluide (la même masse volumique).
- De l'équation précédente on déduit du signe (-) que la pression augmente quand la hauteur z diminue.

Pour déterminer la pression en chaque point du fluide en équilibre, l'équation doit être intégrée. On trouve : $p = -\int \rho g\, dz = \int \gamma\, dz$

II-3-Equation fondamentale de la statique pour un fluide incompressible:

Pour un fluide incompressible, sa masse volumique ρ est constante et donc indépendante de z. L'intégrale donne

$$p + \rho g z = Constante \text{ ou bien } p + \gamma z = C^{te}$$

En intégrant entre deux points du même fluide 1 et 2 on trouve :

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

Ou bien $$p_2 - p_1 = \rho g (z_1 - z_2) = \gamma (z_1 - z_2)$$

-Si le fluide est un gaz et considéré incompressible, sa masse volumique est négligeable et dans ce cas

$$p_2 - p_1 = 0$$

La pression est la même dans tout le gaz pour des hauteurs relativement faibles.

II-4-Appareils de mesure de pression

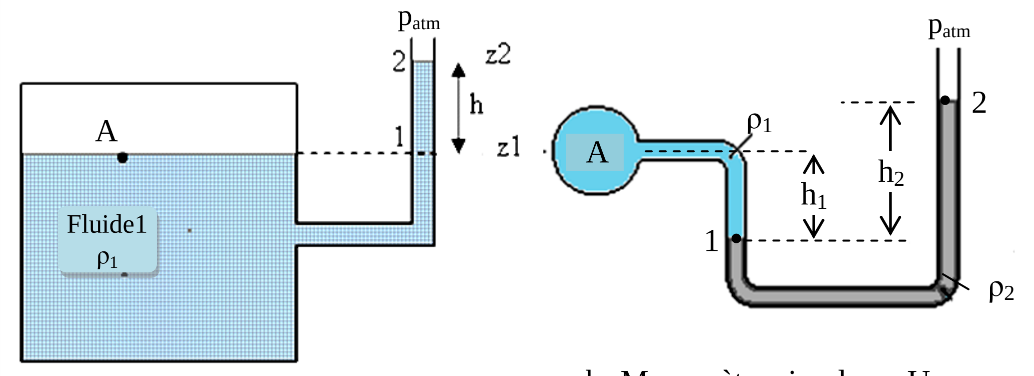
La pression absolue est toujours positive. Elle est exprimée par rapport au zéro absolu. Par contre la pression effective peut être positive ou négative quand il s'agit d'une dépression.

Pour mesurer la pression il existe plusieurs appareils de mesure dont les principaux sont considérés ci-après.

-Le baromètre : C'est un appareil qui mesure la pression absolue atmosphérique locale.

-Les manomètres : le manomètre est un instrument qui mesure la différence de pression entre deux points.

1 Le manomètre simple : Le plus simple est le manomètre représenté sur les figures II-4-a et b. Il est utilisé pour mesurer la pression p_A au point A dans une chambre fermée, relative à la pression atmosphérique p_{atm} autrement dit mesurer la pression effective au point A.



a- Manomètre simple

b- Manomètre simple en U

Fig. II-4 Manomètres

La pression au point A est calculée comme suit.

En appliquant l'**Equation fondamentale de la statique pour un fluide incompressible** entre A et 2 on trouve :

$$p_A - p_2 = \rho_1 g(z_2 - z_A)$$

$$p_2 = p_{atm}, z_A = z_1 \text{ et } \quad z_2 - z_A = h$$

la pression effective au point A est $p_{A_{eff}} = \rho_1 gh$

-Considérons maintenant le manomètre en U de la figure (II-4-b). Il est utilisé pour mesurer la pression effective des liquides et des gaz.

Pour déterminer la valeur de la pression effective au point A, on applique l'équation de l'hydrostatique entre A et 1dans le fluide de masse volumique ρ_1 et entre 1 et 2 dans le fluide de masse volumique ρ_2 on trouve:

$$p_A - p_1 = \rho_1\, g(z_1 - z_A) \qquad \text{(a)}$$

$$p_1 - p_2 = \rho_2\, g(z_2 - z_1) \qquad \text{(b)}$$

Sachant que $p_2 = p_{atm}$ et en sommant les équations a et b on aura :

$$p_A - p_{atm} = \rho_1\, g(z_1 - z_A) + \rho_2\, g(z_2 - z_1)$$
$$p_A - p_{atm} = \rho_2\, g h_2 - \rho_1\, g\, h_1$$

Donc la pression effective au point A est $p_{Aeff} = \rho_2\, g h_2 - \rho_1\, g\, h_1$

-Si le fluide 1 est un gaz, dans ce cas ρ_1 est négligeable alors $p_{Aeff} = \rho_2\, g h_2$

-2 Le manomètre différentiel

Il est destiné à mesurer la différence entre deux pressions p_1 et p_2 sans se préoccuper de la valeur de chacune d'elles.

Considérons le dispositif de la figure II-5. Il représente une conduite avec un obstacle qui provoque une variation de pression entre les stations 1 et 2. Pour estimer cette différence de pression on utilise le manomètre différentiel. On a:

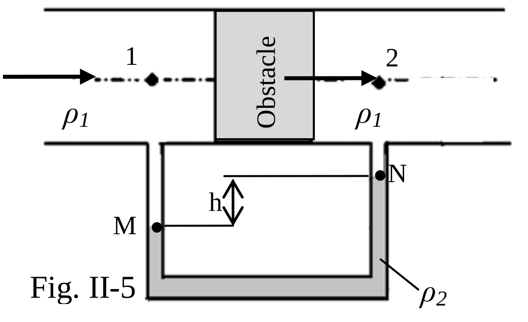


Fig. II-5

$$p_1 - p_M = \rho_1\, g\left(z_M - z_1\right)$$

$$p_M - p_N = \rho_2\, g(z_N - z_M)$$
$$p_N - p_2 = \rho_1\, g\,(z_2 - z_N)$$

Par sommation de ces équations et en mettant $z_1 = z_2$ et $z_N - z_M = h$ on trouve:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = (\rho_2 - \rho_1)\, g h$$

Exemple II-1

- Calculer la pression effective au point A, (voir Fig. Exp. II-1), sachant que la densité de l'huile est $d_H = 0.85$ et la densité du mercure est $d_M = 13.6$.

Solution

Pour calculer la pression effective au point A, on applique l'équation fondamentale de la statique entre les points A-1, 1-2, 2-3, et 3-4.

$$p_A - p_1 = \rho_E\, g(z_1 - z_A)$$

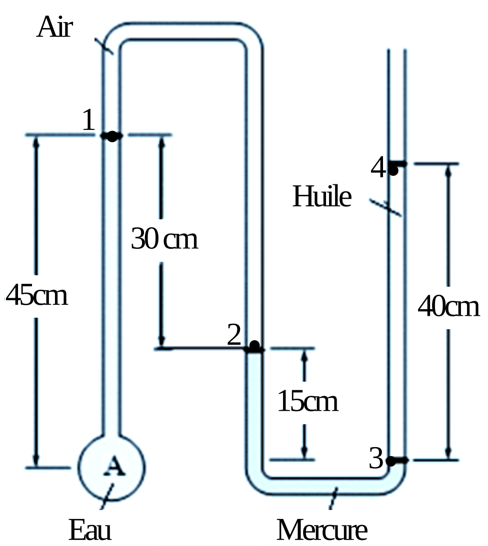


Fig. Exp. II-1

$$p_1 = p_2 \text{ (Le fluide est un gaz)}$$

$$p_2 - p_3 = \rho_M g(z_3 - z_2)$$

$$p_3 - p_4 = \rho_H g(z_4 - z_3)$$

Par sommation on trouve

$$p_A - p_4 = \rho_E g(z_1 - z_A) + \rho_M g(z_3 - z_2) + \rho_H g(z_4 - z_3)$$

Puisque $p_4 = p_{atm}$ donc

$$p_{Aeff} = g\big(\rho_E(0.45m) + \rho_M(-0.15m) + \rho_H(0.4m)\big)$$

En mettant dans cette formule la masse volumique de l'eau en facteur on trouve

$$p_{Aeff} = g\rho_E\big((0.45m) + d_M(-0.15m) + d_H(0.4m)\big)$$

Où d_M, et d_H sont les densités du mercure et de l'huile respectivement.

$$p_{Aeff} = 9.81\left(\frac{N}{kg}\right)\times 1000\left(\frac{kg}{m^3}\right)\big((0.45m) + 13.6(-0.15m) + 0.85(0.4m)\big)$$

$$p_{Aeff} = -12262.5\ Pa$$

Le signe (-) de la pression effective au point A montre que celle-ci est inférieur à la pression atmosphérique, c'est une dépression.

Exemple II-2

Un réservoir contient de l'eau, de l'huile et un troisième liquide. Les surfaces libres de l'eau et de l'huile sont au même niveau (voir figure Exp.II-2).

Calculer la hauteur **'h'** sachant que la densité de l'huile est d_H=0.86, la densité du liquide est d_L=1.6, H=1.5m et L=1m.

Solution

Pour calculer la hauteur h du liquide du côté droit du réservoir on applique l'équation de la statique entre les points 1, 2, 3 et 4 montrés sur la figure Exp. II-2. On aura:

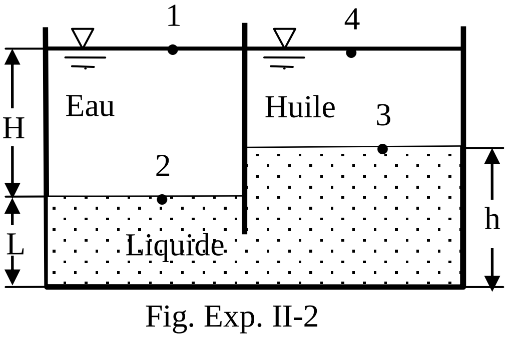


Fig. Exp. II-2

$$p_1 - p_2 = \rho_E g(z_2 - z_1)$$

$$p_2 - p_3 = \rho_L g(z_3 - z_2)$$

$$p_3 - p_4 = \rho_H g(z_4 - z_3)$$

Par sommation on trouve

$$p_1 - p_4 = \rho_E g(z_2 - z_1) + \rho_L g(z_3 - z_2) + \rho_H g(z_4 - z_3)$$

On a $p_1 = p_4 = p_{atm}$ donc

$0 = \rho_E g(z_2 - z_1) + \rho_L g(z_3 - z_2) + \rho_H g(z_4 - z_3)$

$0 = \rho_E g(-H) + \rho_L g(h - L) + \rho_H g(H + L - h)$

D'où $h = \frac{\rho_E(H)+\rho_L(L)-\rho_H(H+L)}{\rho_L-\rho_H} = \frac{1000(1.5)+1600(1)-860(1.5+1)}{1600-860} = 1.284m$

Dans ce chapitre nous allons traiter le principe de conservation de la masse et discuter l'utilisation de la seconde loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ appliquée à une particule fluide. Nous obtenons alors la fameuse équation de Bernoulli et l'appliquons pour différents écoulements.

III-1-Equation de continuité (Forme intégrale) - Débit massique

Le principe de conservation de masse est exprimé mathématiquement par l'équation de continuité.

Si l'écoulement est stationnaire il n'y a pas d'accumulation de masse dans une région considérée.

Le taux de masse de fluide entrant dans cette région = le taux de masse sortant de cette région.

- dans le cas d'un écoulement **stationnaire, le débit massique** traversant une section A

$$\dot{m} = \int_A \rho u dA = C^{te}$$

- Elle représente la forme intégrale de l'équation de continuité où u est la vitesse linéaire perpendiculaire à la section choisie.

- Si ρ **et *u* ne varient pas le long d'une section A_1** du tube de courant le débit massique traversant cette section est $\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1$.

III-2-Débit volumique

c'est le rapport entre le débit massique et la masse volumique

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

Il peut être représenté aussi par le produit de la vitesse et la section de passage du fluide.

$$Q\left(\frac{m^3}{s}\right) = \int_A u \, dA$$

Si le fluide est **incompressible** (ρ ne varie pas le long du tube de courant), Q reste constant le long du tube de courant.

En général l'écoulement est caractérisé par sa vitesse moyenne ***U*** et le débit volumique s'exprime alors par:

$$Q = UA$$

De cette formule on déduit que la vitesse moyenne d'écoulement U et la section de passage du fluide A varient à l'inverse.

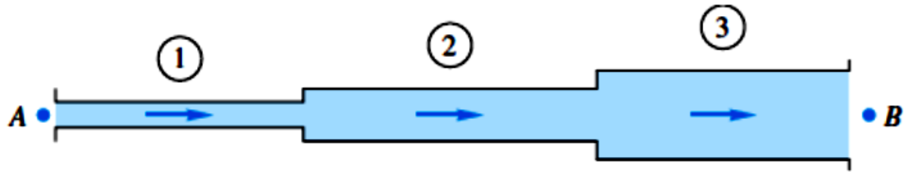
Il existe plusieurs types de réseaux de conduites, éléments en série et éléments en parallèles

a-Eléments en série

Lorsque des éléments de conduites (tronçons droits et singularités) sont placés en série (Fig. VI-7-a), ils sont tous traversés par le même débit

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

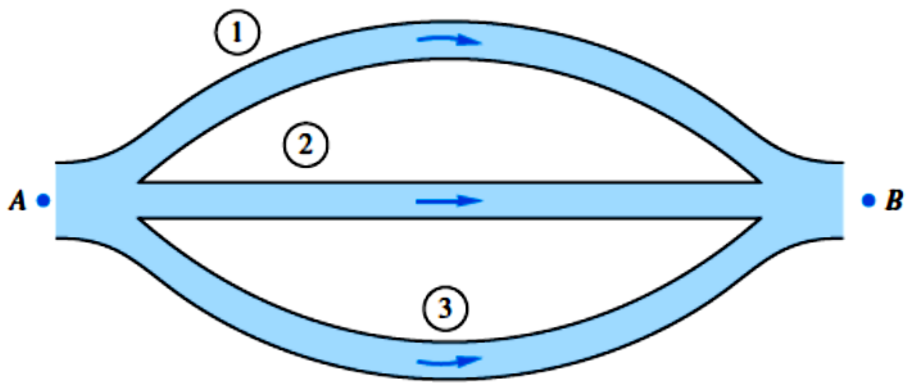
$$U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3$$



Système en série

b-Eléments en parallèle

Lorsque les conduites sont liées en parallèle, le débit total est la somme des débits des différentes branches (1), (2), et (3) $Q_A = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_B$



Système en parallèle

Exemple III-1

De l'eau s'écoule dans une conduite de diamètre 50 mm à une vitesse moyenne de U_1=10 m/s puis traverse radialement l'espace entre deux disques comme montré sur la figure ci contre. Les disques sont parallèles et la distance entre eux est h=10mm.

-Calculer la vitesse moyenne U_2 de l'eau au rayon de 300mm à la sortie de l'espace entre les deux disques.

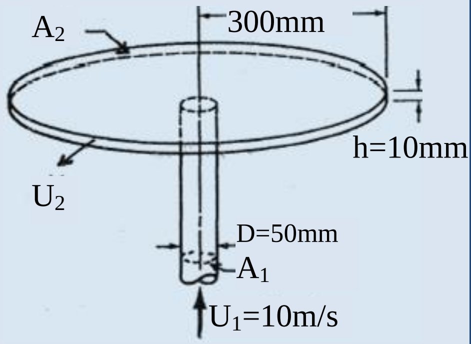


Fig. Exp. III-1

Solution

- Calculer la vitesse moyenne entre les deux disques

Dans cet exemple on considère que le fluide est incompressible et les vitesses d'écoulement à travers les sections A_1 et A_2 sont des vitesses moyennes donc constantes le long des sections. En appliquant l'équation de continuité on a

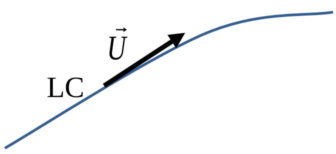
$Q_1 = Q_2$ donc $U_1 A_1 = U_2 A_2$

Ainsi $U_2 = \frac{A_1}{A_2} U_1 = \frac{\frac{\pi D^2}{4}}{2\pi R h} U_1 = \frac{D^2}{8Rh} U_1 = \frac{(0.05m)^2}{8(0.3m)(0.01m)} \left(10 \frac{m}{s}\right) = 1.042\ m/s$

III-3-Equation de Bernoulli (sans échange de travail):

Pour établir l'équation de Bernoulli nous allons faire quelques considérations:

- considérer **une ligne de courant*** (LC) (figure) quelconque dans un écoulement **permanent** d'un fluide **parfait incompressible**,



***Ligne de courant** est une ligne de champs du vecteur vitesse. C'est une courbe tangente en tout point M(x, y, z) au vecteur vitesse $\vec{U}$ (x,y,z,t_0) à l'instant t_0.

- considérer un déplacement de la particule fluide avec une vitesse $\vec{U}$ le long de cette ligne de courant

La fameuse équation de Bernoulli (Daniel Bernoulli (1700-1782)) traduit la conservation de l'énergie totale par unité de masse pour un fluide **parfait incompressible** en écoulement **permanent** dans le champ de pesanteur. La charge totale le long d'une ligne de courant pour un fluide parfait reste constante.

$$\frac{U^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=C^{te}$$

L'unité des termes de l'équation (III-5) est joule/kg.

- Le terme $\frac{U^2}{2}$ représente l'énergie cinétique par unité de masse
- Le terme $\frac{p}{\rho}$ représente le travail des forces de pression par unité de masse du fluide.
- Le terme gz représente l'énergie potentielle par unité de masse.

Divisons l'équation (III-5) par 'g' on obtient

$$\frac{U^2}{2g}+\frac{p}{\rho g}+z=C^{te}$$

Tous les termes de l'équation de Bernoulli écrite sous la seconde forme (III-6) sont homogènes à une hauteur, leur unité est le mètre.

- $\frac{U^2}{2g}$ représente la hauteur dynamique
- $\frac{p}{\rho g}+z$ représente la hauteur piézométrique.
- z représente la côte ou la hauteur de position.

En multipliant l'équation (III-5) par ρg on obtient une équation où tous les termes sont équivalents à une pression tel que

$$\frac{\rho U^2}{2}+p+\rho g z=C^{te}$$

Si on considère deux points 1 et 2 de la même ligne de courant l'équation de Bernoulli s'écrit alors

$$\frac{U_1{}^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1=\frac{U_2{}^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2=C^{te}$$

III-4-Equation de Bernoulli avec échange de travail

En présence de machines, le fluide **fourni** un travail $\boldsymbol{w_T}$ à une machine telle qu'une **turbine** et **reçoit** un travail $\boldsymbol{w_P}$ d'une machine telle qu'une **pompe**, l'équation en terme d'énergie par unité de masse s'écrit alors:

$$\frac{U_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+gz_1+w_p=\frac{U_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+gz_2+w_T$$

En termes de hauteur, en divisant l'équation III-9 par g on obtient

$$\frac{U_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}+z_1+h_p=\frac{U_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2+h_T$$

La puissance d'une machine (M) installée dans le circuit du fluide entre les points 1 et 2 est donnée par l'expression (III-11)

$$\mathcal{P}_{\mathrm{M}}=\dot{m}\,w_M=\dot{m}\,gh_M=\rho\,Q\,g\,h_M$$

Exemple III-2

On pompe de l'huile de densité d=0.861 jusqu'au réservoir C par une conduite de 40 cm de diamètre (figure Exp. III-3). La pression effective en A est 1400 Pa quand le débit est de 197litres/s.

a- Quelle est la puissance fournie par la pompe?

b- Quelle doit être la pression effective en B?

Solution

a-Calculer la puissance fournie par la pompe

Pour trouver la puissance de la pompe on utilise l'équation de Bernoulli entre A et C en présence d'une pompe

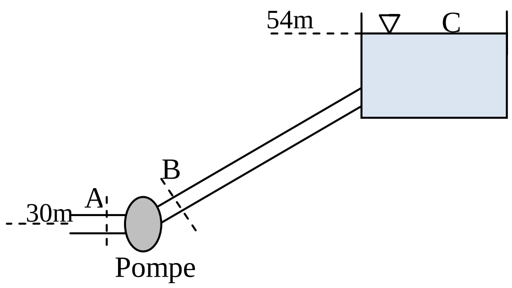


Fig. Exp.III-2

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{U_A^2}{2g}+z_A+h_p=\frac{p_C}{\rho g}+\frac{U_c^2}{2g}+z_c$$

On a choisi le point C car on a $U_c=0$, $p_c=p_{atm}$ et $z_c=54m$

$p_{Aeff}=1400\ Pa$, $z_A=30m$

De l'équation de continuité on a $Q=U_A\,A=U_A\pi D^2/4$

Donc $U_A=4Q/\pi D^2=4.\ 197.10^{-3}\ (m^3/s)/\pi.\ (0.4m)^2=1.57m/s$

$$h_p=-\left(\frac{p_A-p_C}{\rho g}\right)-\frac{U_A^2}{2g}+z_c-z_A=\frac{-p_{Aeff}}{\rho g}-\frac{U_A^2}{2g}+z_c-z_A$$

$$=\frac{-1400(\,Pa\,)}{861(\,{}^{kg}\!/\!{}_{m^3}\,)9.81(\,{}^{N}\!/\!{}_{kg}\,)}-\frac{\left(1.57(\,{}^{m}\!/\!{}_{s}\,)\right)^2}{2\times 9.81\left({}^{N}\!/\!{}_{kg}\right)}+54-30(\,m\,)$$

$hp=23.75(m)$

La puissance de la pompe est donnée par la formule

$\mathcal{P}_p=\rho\,Q\,g\,h_P=861\ ({}^{kg}\!/\!{}_{m^3})\ 197\times 10^{-3}(m^3/s)\ 9.81\ \left({}^{N}\!/\!{}_{kg}\right)23.75(m)=39525.68Watt$

b- La pression effective en B

On applique l'équation de Bernoulli entre A et B

$$\frac{p_{Aeff}}{\rho g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A + h_p = \frac{p_{Beff}}{\rho g} + \frac{U_B^2}{2g} + z_B$$

$U_A = U_B$ (On a la même conduite)

$z_A = z_B$

En remplaçant ces données dans l'équation de Bernoulli on trouve:

$p_{Beff} = p_{Aeff} + \rho g h_p$

On remarque que le rôle de la pompe est d'augmenter la pression du fluide par $\rho g h_p$

p_{Beff} =1400(Pa)+861(kg/m^3) 9.81(N/kg) 23.75(m)=202002.24(Pa)=2.02bar

III-5- Applications de l'équation de Bernoulli

III-5-1-Ecoulement libre à travers un petit orifice

Considérons la figure ci-dessous qui représente un réservoir ayant une section A_1, rempli d'un fluide qui s'écoule par un petit orifice de section A_2.

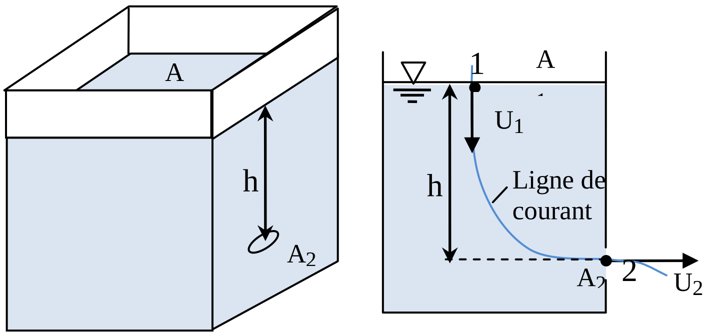


Fig. III-4 Réservoir à petit orifice

Appliquons l'équation de Bernoulli (III-8) le long de la ligne de courant passant par les points 1 et 2.

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Les particules 1 et 2 sont en contact avec l'atmosphère alors $p_1 = p_2 = p_{atm}$ en les remplaçant dans l'équation précédente on trouve

$$z_1 - z_2 = \frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = h$$

En supposant que les vitesses sont uniformes le long des sections du réservoir et de l'orifice, le principe de continuité nous permet d'écrire $Q = U_1 A_1 = U_2 A_2$ donc $U_1 = U_2 \frac{A_2}{A_1}$. En remplaçant la valeur de U_1 on obtient : $U_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$

Si la section de l'orifice est négligeable devant celle du réservoir alors la vitesse d'écoulement du fluide à travers cet orifice est donnée par la formule de **Torricelli**.

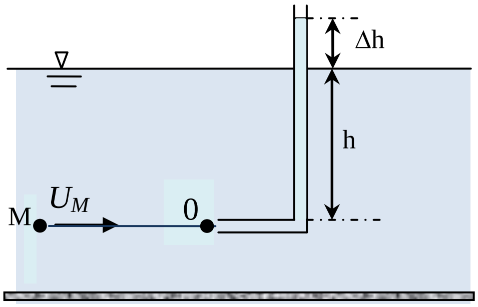
$$U_2 = \sqrt{2gh}$$

III-5-2-Mesure des vitesses-Tube de Pitot

Ils existent plusieurs appareils pour mesurer la vitesse dans des écoulements des fluides. Nous allons présenter les plus simples d'utilisation.

III-5-1-Tube de Pitot : Ce simple tube est utilisé pour mesurer la vitesse dans des écoulements à surface libre (les canaux, les rivières…).

Considérons une particule fluide M de vitesse U_M. Le tube de Pitot est placé dans le fluide au même niveau 'h' que le point M. Il est envahi par le fluide jusqu'à une hauteur Δh de la surface libre du fluide. Le point '0' est un point d'arrêt.



Tube de Pitot

Appliquons la relation de Bernoulli entre le point M et le point 0 qui appartiennent à la même ligne de courant, on trouve:

$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} + z_M = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{U_0^2}{2g} + z_0$$

Or $z_M = z_0$ *et* $U_0 = 0$ (point d'arrêt) donc :

$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g}$$

Alors $$p_0 = p_M + \rho \frac{U_M^2}{2}$$

p_0 est la pression totale

p_M est la pression statique

$\rho \frac{U_M^2}{2}$ est la pression dynamique

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre M et un point de la surface libre on trouve

$$p_M = p_{atm} + \rho g h$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre '0' et un point de la surface libre dans le tube de Pitot on trouve $p_0 = p_{atm} + \rho g\left(h + \Delta h\right)$.

En remplaçant les expressions de p_M et p_0 on trouve la vitesse d'écoulement du fluide au point M comme suit $U_M = \sqrt{2g\Delta h}$

III-5-2-Tube de Pitot statique : Le tube de Pitot a été amélioré (voir figure ci-dessous) pour mesurer la vitesse des écoulements internes c'est-à-dire des écoulements dans des conduites.

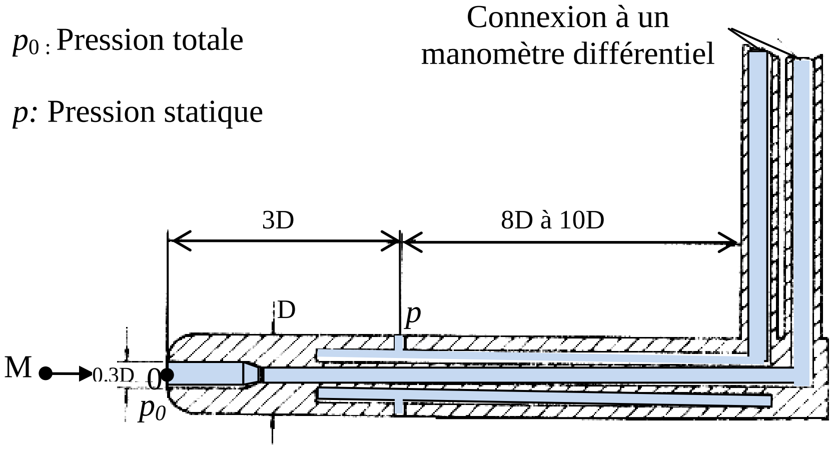


Fig. III-7 Tube de Pitot statique

Deux pressions, la pression statique p et la pression totale p_0 sont transmises à un manomètre différentiel qui indique la différence de pression $\Delta p = p_0 - p$.

La pression p_0 représente la pression au point d'arrêt, et p la pression au niveau des trous qui se trouvent sur le périmètre du tube de Pitot.

Si on considère que la vitesse au droit de la fente est égale à U_M et la pression est p_M, l'équation de Bernoulli entre M et le point d'arrêt 0 s'écrit:

$$\frac{p_M}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} + z_M = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{U_0^2}{2g} + z_0$$

Or $z_M = z_0$, $U_0 = 0$ (point d'arrêt) et $p_M = p$ donc : $\frac{p}{\rho g} + \frac{U_M^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g}$

En termes de pression, l'équation précédente peut s'écrire: $p_0 = p + \rho \frac{U_M^2}{2}$

La valeur de la vitesse d'écoulement de n'importe quel point dans la conduite est déterminée en connaissant la différence de pression $(p_0 - p)$ par la relation suivante:

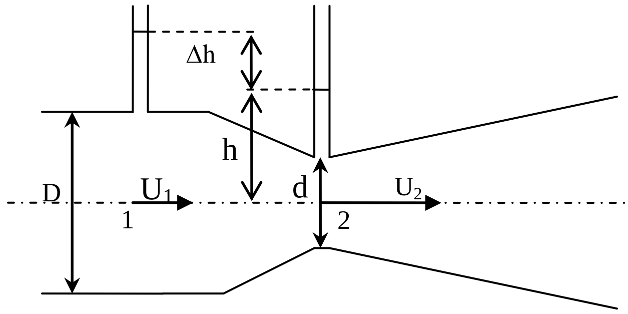
$$U_M = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

$(p_0 - p)$ est calculée à partir d'un tube manométrique.

Connaissant la valeur de la vitesse, dans une station de la conduite, le débit volumique peut être déduit.

III-5-3-Tube de Venturi

c'est l'effet le plus courant et le plus spectaculaire associé à l'équation de Bernoulli. Il est utilisé pour déterminer la vitesse moyenne d'un écoulement donc le débit de l'écoulement dans une conduite (voir figure).



Tube de Venturi

L'application de l'équation de Bernoulli entre les points 1 et 2 donne:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + z_2$$

Dans le cas d'un venturi horizontal, $z_1 = z_2$

En considérant le principe de continuité et en l'appliquant entre les deux surfaces 1 et 2 on obtient $U_1\, A_1 = U_2\, A_2$

Où $A_1 = \frac{\pi D^2}{4}$, et $A_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, donc $U_2 = U_1 \frac{D^2}{d^2}$. En remplaçant cette expression dans l'équation de Bernoulli on trouve l'expression de la vitesse par la relation: $U_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left(1 - (D/d)^4\right)}}$

L'application de l'équation de l'hydrostatique permet d'obtenir p_2-p_1 où

$$p_1 = p_{atm} + \rho g(h + \Delta h)$$

$$p_2 = p_{atm} + \rho g h$$

En remplaçant ces expressions dans la relation de U_1 on peut déterminer la valeur de la vitesse moyenne de l'écoulement en connaissant la déviation obtenue dans les tubes manométriques du Venturi et ainsi que le débit de l'écoulement par les relations

$$U_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{(\frac{D}{d})^4 - 1}} \text{ et } Q = U_1 \frac{\pi D^2}{4}$$