Méthodes énergétiques

1. *Généralités*

Soit un corps élastique, on amène ce système d'un état initial (1) à un état final (2) par l'application d'un ensemble de forces extérieures, le corps est déformé élastiquement et prend une nouvelle position d'équilibre(2)

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre deux instants correspondants à l'état initial et l'état final donne :

Wext +wint=0 (1)

Wext travail des forces extérieures, Wint travail des forces intérieures

Par définition on appelle l'énergie de déformation le travail des forces intérieures changé de signe. Si on représente par w l'énergie de déformation on a : w=-wint

Et l'équation (1) s'écrit : wext=w

On dit alors que pendant la déformation élastique d'un solide le travail des forces extérieures est égal à l'énergie de déformation du solide.

2. *Travail des forces extérieures*

- Sollicitation de traction pure

On considère une barre rectiligne de longueur l, l'intensité de la force de traction croit lentement et progressivement de zéro à la valeur maximale F. Soit x l'allongement de la barre obtenu lorsque la force maxima le F est atteinte. L'allongement et la force sont deux grandeurs proportionnelles. L'aire du triangle OAB représente le travail de la force de traction.

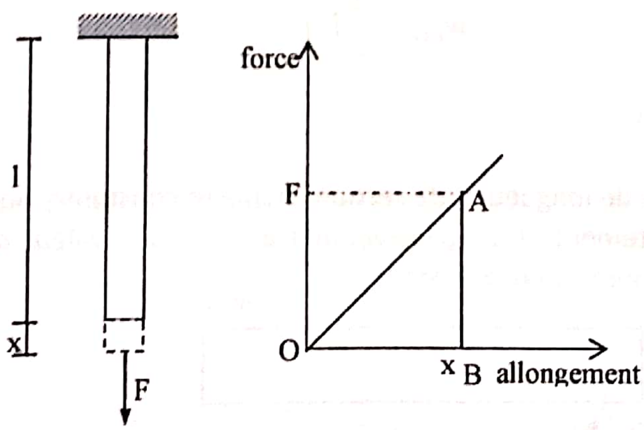


Fig1

Le travail des forces extérieures :

$$w_{ext} = \frac{1}{2}\overline{AB}.\overline{OB} = \frac{1}{2}F.x$$

- Sollicitation de flexion

On considère une poutre sollicitée par trois forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, soit y_1, y_2, y_3 les flèches des forces extérieures F_1, F_2, F_3.

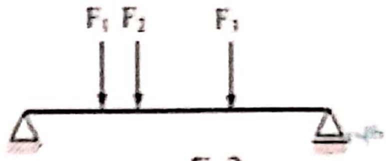


Fig2

Le travail des forces extérieures :

$$w_{ext} = \frac{1}{2}F_1.y_1 + \frac{1}{2}F_2.y_2 + \frac{1}{2}F_3.y_3$$

- Sollicitation de cisaillement

On considère un solide sollicité en cisaillement simple sous l'action de l'effort tranchant T, la dénivellation C1D1 par rapport a CD est j.

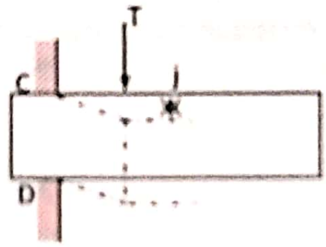


Fig3

Le travail de l'effort tranchant :

$$w_{ext} = \frac{1}{2}T.j$$

- Sollicitation de torsion

On considère l'élément rectiligne de longueur l, de section circulaire constante, auquel on applique un couple de torsion croissant lentement et progressivement de zéro à la valeur maximale Mt. Soit α l'angle de torsion total avec un couple maximal Mt.

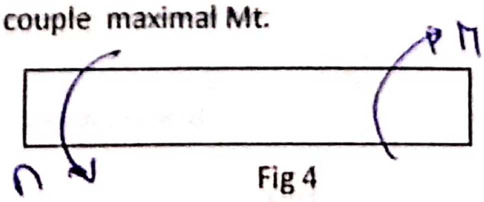


Fig 4

Le travail du couple de torsion :

$$w_{ext} = \frac{1}{2}M_t.\alpha$$

3. *Energie de déformation*

L'énergie de déformation W dans le cas d'un élément de volume V soumis à un ensemble de contraintes $((\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ est donnée par :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right] dv$$

- Sollicitation de tension

Soit une barre de longueur l et de section constante A, soumise à une force de tension P à chaque extrémité. Si l'axe de la barre est l'axe x, on a $\sigma_x = \frac{N}{A}$, les autres contraintes étant nulles.

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2E}(\sigma_x^2)\right] dv = \frac{1}{2E}\int_0^l \left(\frac{N}{A}\right)^2 Adx = \frac{N^2 l}{2AE}$$

- Sollicitation de flexion

Soit une outre droite de longueur l et de moment d'inertie I, soumise à des charges transversales engendrant une flexion. Si on considère que $\sigma_x = \frac{M}{I}y$ et les autres contraintes sont nulles.

L'énergie reliée aux contraintes de cisaillement est négligeable comparativement à l'énergie associée à la contrainte normale. L'expression de l'énergie de déformation s'écrit :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2E}(\sigma_x^2)\right] dv = \int_0^l \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dAdx = \int_0^l \left[\frac{M^2}{2EI^2}\int y^2 dA\right] dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

- Sollicitation de cisaillement

Soit un solide sollicité en cisaillement simple .sous l'effet de l'effort tranchant : $\tau = \frac{T}{A}$

L'expression de l'énergie de déformation s'écrit :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2G}(\tau^2)\right] dv = \int \frac{1}{2G}\frac{T^2}{A^2} Adx = \int_0^l \frac{T^2}{2GA} dx$$

(dans le cas de la flexion) Si on considère l'énergie reliée aux contraintes de cisaillement on $\tau = \frac{TS'}{Ib}$

$$w=\int_v\left[\frac{1}{2G}(\tau^2)\right]dv=\int\frac{1}{2G}\frac{T^2S'^2}{I^2b^2}dv=\int_0^l\frac{T^2}{2GI^2}\int\left(\frac{S'^2}{b^2}\right)dA\,dx=\int_0^l\frac{T^2}{2GA}\frac{A}{I^2}\int\left(\frac{S'^2}{b^2}\right)dA\,dx$$

$$w=K\int_0^l\frac{T^2}{2GA}dx$$

- Sollicitation de torsion

On considère l'élément rectiligne de longueur l, de section circulaire constante de rayon r, soumis à un couple de torsion à ses extrémités. On a $\tau=\frac{M_t r}{I_p}$

L'expression de l'énergie de déformation s'écrit :

$$w=\int_v\left[\frac{1}{2G}(\tau^2)\right]dv=\int_v\left[\frac{1}{2G}\left(\frac{{M_t}^2r^2}{{I_p}^2}\right)\right]dAdx=\int_0^l\left(\frac{{M_t}^2}{2G{I_p}^2}\int_A r^2dA\right)dx=\int_0^l\frac{{M_t}^2}{2GI_p}dx$$

Pour une poutre soumise en une section courante aux 4 éléments de réduction (N,T,M_t,M_f) l'énergie de déformation sera par l'application de superposition

$$w=\int_0^l\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{EA}+K\frac{T^2}{GA}+\frac{{M_t}^2}{GI_p}+\frac{M_f^2}{EI}\right)dx$$

L'expression plus générale de l'énergie de déformation :

$$w=\int_0^l\frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{EA}+K_y\frac{{T_y}^2}{GA}+K_z\frac{{T_z}^2}{GA}+\frac{{M_t}^2}{GI_p}+\frac{M_y^2}{EI_y}+\frac{M_z^2}{EI_z}\right)dx$$

4. *Théorème de réciprocité des travaux (théorème de Betti)*

On considère une poutre simple soumise en deux états à une force concentrée. La charge, les efforts intérieurs et les déformations relatifs à ces deux états sont affectés d'indices 1 et 2. La figure 5a, visualise le premier état du système, et la figure 5b, le deuxième.

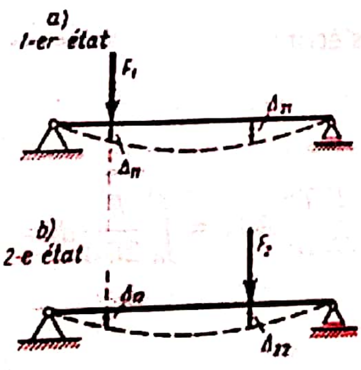


Fig5

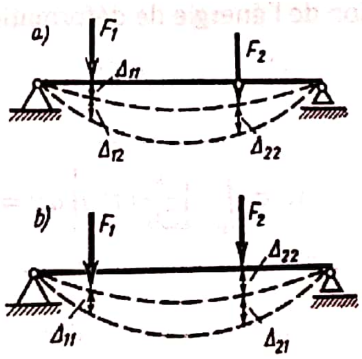


Fig6

Le déplacement dans le sens de la charge en premier état produit par cette même charge est noté Δ11. Le déplacement dans le sens de la charge en deuxième état produit par l'action de la charge du premier état est notéΔ21 a, Les notations du déplacement en deuxième état sont données par la figures dont les notations comportent deux mêmes indices Δ11, Δ22 , sont dits principaux et ceux de la forme Δ12 ,Δ21 sont dits accessoires.

O, applique à la poutre les forces F1et F2, l'ordre de leur application étant différent.

1. On applique d'abord la charge F1, puis on subit la poutre déformée à la force F2,(fig. 6 a).

On Calcule le travail effectué dans ces conditions par les forces extérieures

Le travail de la force F1 sur son déplacement Δ11 produit par cette même force est $w_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$. Le travail effectué par la force F2, sur son propre déplacement Δ22 est $w_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}$

Le travail auxiliaire de la force F1 sur le déplacement Δ12 dû à la force F2 est $w_{12} = F_1 \Delta_{12}$

Dans le calcul de w12 le facteur 1/2 disparaît, du fait que la force F1 sur le déplacement Δ12 effectue un travail tout en restant constante.

Le travail total réalisé par les forces extérieures suivant le premier mode de sollicitation :

W1=w11+w22+w12

2. On charge maintenant la poutre dans une autre succession : On applique d'abord la force F2, puis la force F1, (fig. 6 b).

Le travail effectué par la force F2 sur son propre déplacement Δ22 $w_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}$

Le travail de la force F1, sur son propre déplacement Δ11, $w_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$

Le travail de la force F2, sur le déplacement Δ21 est $w_{21} = F_2 \Delta_{21}$

Le travail total en deuxième mode de sollicitation : W2= w22+w11+w21

Le travail des forces ne dépend pas de l'ordre de leur application. Par conséquent :

W1=W2, d'où w12=w21 , $F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}$

Ceci démontre le théorème de la réciprocité des travaux virtuels des forces extérieures.

D'une façon analogue, on peut démontrer la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures

Le travail virtuel, W'_{12} d'un élément de poutre de longueur dx vaut (Fig7 c, d)

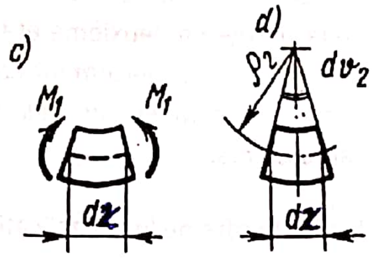


Fig7

$$dw_{12}^{i} = M_1 d\theta_2$$

$$d\theta_2 = \frac{dx}{\rho_2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_2}{EI} \qquad \text{donc} \qquad d\theta_2 = \frac{M_2 dx}{EI}$$

Par conséquent :

$$dw_{12}^{i} = \frac{M_1 M_2}{EI} dx$$

le travail virtuel w_{12}^{i} pour toute la poutre de longueur l :

$$w_{12}^{i} = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx \qquad \text{(a)}$$

Ou M1, et M2 sont les valeurs courantes des moments fléchissant en premier et en deuxième états.

D'une façon analogue, on peut montrer que le travail des forces intérieures en deuxième état sur les déplacements produits par les forces intérieures du premier état peut se calculer d'après la formule

$$w_{21}^{i} = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx \qquad \text{(b)}$$

En comparant les expressions (a) et (b), on voit qu'en effet :

$$w_{12}^{i} = w_{21}^{i} \qquad \text{puisque} \qquad \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

Ceci démontre la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures.

En utilisant la loi de la conservation de l'énergie, on peut montrer que le travail supplémentaire des forces extérieures est égal en valeur absolue au travail supplémentaire des forces intérieures: $w_{12} = w_{12}^{i}$.

Lorsque le système est soumis à la force F1, les forces extérieures effectuent le travail , $w_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$, et les forces intérieures, le travail $w_{11}^{i} = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, on a :

$$\frac{1}{2}F_1\Delta_{11}=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_1^2}{EI}dx$$

Pour la sollicitation ultérieure du système par la force F2, on a, d'une façon analogue, l'égalité :

$$\frac{1}{2}F_2\Delta_{22}=\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_2^2}{EI}dx$$

D'autre part, lorsque le système subit la force F2, le travail complémentaire réalisé par la force F1 est : $w_{12} = F_1\Delta_{12}$

et par les forces intérieures $w_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI}dx$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, le travail w_{12} doit être égal au travail w_{12}^i :

$w_{12} = w_{12}^i$; d'une façon analogue, $w_{21} = w_{21}^i$

Ce qui vient d'être dit implique également : $w_{12} = w_{21} = w_{12}^i = w_{21}^i$

5. Détermination des déplacements par la méthode de *Mohr*.

On Suppose, par exemple, qu'il soit nécessaire de calculer le déplacement vertical du point B de la poutre représentée sur la figure (8 a). On note par 1 l'état donné. On choisit un état auxiliaire de la même poutre à force unitaire (adimensionnelle) appliquée au point B dans la direction du déplacement cherché. On désigne par 2 l'état auxiliaire(fig.8 b).

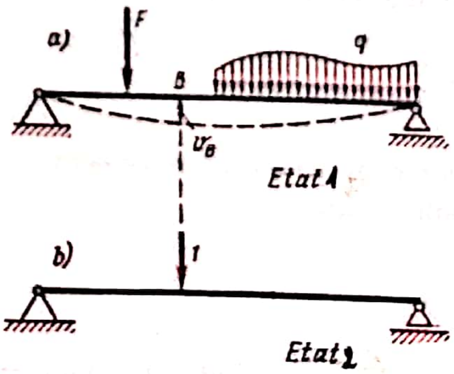


Fig8

On calcule le travail des forces extérieures et intérieures de l'état auxiliaire sur les déplacements résultant de l'action des forces de l'état de sollicitation

Le travail des forces extérieures est égal au produit de la force unitaire par le déplacement cherché v_B: $w_{21}=1.\ v_B$

et le travail des forces intérieures, à l'intégrale

$$w_{21}^{l} = w_{21}^{l} = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

On a $w_{21} = w_{21}^{i}$ ou

$$v_B = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

C'est ce qu'on appelle l'intégrale de **Mohr** qui permet de calculer le déplacement en un point quelconque d'un système déformé linéairement

Dans cette formule sous le signe d'intégration le produit M2M1, est positif si les deux moments fléchissant sont de même signe, et négatif si M2 et M1 ont des signes différents.

Si le déplacement angulaire était déterminé pour le point B, il faudrait en état 2 appliquer au point B un moment égal à l'unité.

Si tout déplacement (angulaire ou linéaire) est noté Δ, l'intégrale de Mohr s'écrit:

$\Delta = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$ (c)

Dans le cas général, l'expression analytique de M2 et M1, peut différer suivant les tronçons différents de la poutre ou, en général, d'un système élastique. C'est pourquoi, au lieu de (c), on peut utiliser une formule plus générale

$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$ (d)

Si les barres du système travaillent à la flexion et à la traction, il faut utiliser la formule

$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{N_2 N_1}{EA} dx$ (e)

Dans le cas particulier, où les barres travaillent seulement à la traction ou à la compression (treillis), la formule des déplacements devient

$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_2 N_1}{EA} dx$ (f)

Dans cette formule, le produit N2N1, est positif si les deux efforts sont une traction ou une compression.

Ordinairement, comme le montrent les calculs comparatifs, le calcul des portiques dans lesquels les barres travaillent simultanément à la flexion et à la traction (compression), les déplacements peuvent être déterminés en ne tenant compte que des moments fléchissant, l'action des efforts normaux étant très faible.

Dans les cas courants on peut ne pas prendre en compte l'action des efforts tranchants.

Le calcul immédiat de l'intégrale de Mohr peut être remplacé par le mode grapho-analytique ou la méthode de multiplication des diagrammes, ou encore la règle de Vérechtchaguine.

6. Méthode de Verechtchaguine

On considére deux diagrammes des moments fléchissants, celui de M1 a un contour arbitraire, celui de M2, est rectiligne (fig9. a, b).

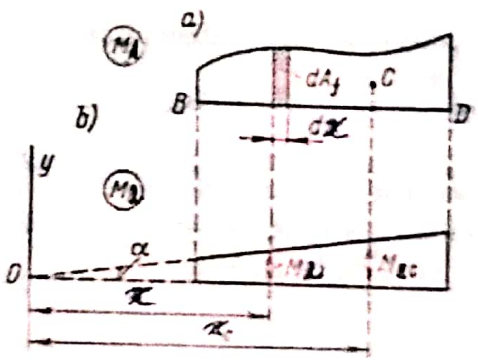


Fig9

O admet que la section de la barre du tronçon BD soit constante.

Dans ce cas $\int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l M_2 M_1 dx$

la grandeur M1dx est l'aire élémentaire dA1 du diagramme de M1

$$\int_B^D M_2 M_1 dx = \int_B^D M_2 dA_1$$

Mais $M_2 = x tan\alpha$ donc,

$\int_B^D M_2 dA_1 = tan\alpha \int_B^D x dA_1$

Or $\int_B^D x dA_1$ est le moment statique du diagramme de M1 par rapport à l'axe y. et on a

$\int_B^D x dA_1 = A_1 x_c$

où A1 est l'aire du diagramme des moments.

Xc la distance entre l'axe y et le centre de gravité du diagramme de M1

On a $x_c = \frac{M_{2c}}{tan\alpha}$

où M2c est l'ordonnée du diagramme de M2 sous le centre de gravité du diagramme de M1.

$\int_B^D M_2 dA_1 = tan\alpha \int_B^D x dA_1 = tan\alpha A_1 x_c = A_1 M_{2c}$

c'est-à-dire que l'intégrale cherchée est égale au produit de l'aire du diagramme de M1 par l'ordonnée du diagramme rectiligne M2c sous son centre de gravité.

Donc , pour déterminer les déplacements, on a la formule de Vérechtchaguine suivante :

$$\Delta_{21} = \frac{A_1 M_{2c}}{EI}$$

On admet que la quantité $A_1 M_{2c}$ est positive si les deux diagrammes sont du même côté de la barre, et négative s'ils se trouvent sur des côtés différents. Le résultat positif de la multiplication des diagrammes signifie que la direction du déplacement coïncide avec la direction de la force (ou du moment) unitaire

Pour les barres de section variable, la règle de Vérechtchaguine de la multiplication des diagrammes est inapplicable du fait que EI ne peut déjà plus être sortie du signe d'intégration. Il faut alors exprimer la quantité EI comme fonction de l'abscisse de la section et calculer l'intégrale de Mohr

Lorsque la rigidité de la barre change par gradins, l'intégration (ou la multiplication des diagrammes) se fait pour chaque tronçon isolément, puis les résultats sont sommés.

7. *Le théorème de Castigliano*

On considère un corps élastique pour lequel le système qui comporte les forces concentrées p_i(i=1,..., ,n) et les réactions constitue le système I. On augmente la valeur d'une force quelconque (exemple p_R) d'une petite quantité Δp_R l'ensemble comportant l'augmentation de charge Δp_R et les variations des réactions constitue le système II.

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{p_i})_I \left(\Delta\overline{\delta_i}\right)_{II} = (\Delta\overline{p_R})_{II} \left(\overline{\delta R}\right)_I \qquad (7.1)$$

$(\Delta\overline{\delta_i})_{II}$: représente le déplacement du point d'application de la force p_i causé par l'augmentation de la charge Δp_R

$(\delta R)_I$: le déplacement du point d'application de la force p_R du a l'ensemble des forces initiales.

On Calcule l'accroissement de l'énergie de déformation Δw qui résulte de l'augmentation de charge Δp_R.

$$\Delta w = \frac{1}{2} (\Delta\overline{p_R})_{II} \left(\overline{\Delta\delta R}\right)_{II} + \sum_{i=1}^{n} (\overline{p_i})_I \left(\Delta\overline{\delta_i}\right)_{II} \qquad (7.2)$$

On remplace le second terme de droite par son équivalent

$$\Delta w = \frac{1}{2} (\Delta\overline{p_R})_{II} \left(\overline{\Delta\delta R}\right)_{II} + (\Delta\overline{p_R})_{II} \left(\overline{\delta R}\right)_I$$

Si on divise par Δp_R on obtient :

$$\frac{\Delta w}{\Delta pR} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta\overline{p_R})}{\Delta pR} \left(\overline{\Delta\delta R}\right) + \frac{(\Delta\overline{p_R})}{\Delta pR} \left(\overline{\delta R}\right)$$

Lorsque $\Delta p_R \rightarrow 0$ $\frac{1}{2} \frac{(\Delta\overline{p_R})}{\Delta pR} \left(\overline{\Delta\delta R}\right) \rightarrow 0$

Et on peut pouvons écrire :

$$\frac{\Delta w}{\Delta pR} = \lim_{\Delta pR \to 0} \frac{(\Delta \overline{p_R})}{\Delta pR} (\overline{\delta R})$$

$\frac{(\Delta \overline{p_R})}{\Delta pR}$ représente le vecteur unitaire dans la direction p_R.

Le produit scalaire de $\overline{\delta R}$ par ce vecteur unitaire fournit la composante du déplacement du point d'application de p_R dans la direction de p_R.

On appelle cette composante δR , et on obtient la relation fondamentale du théorème de Castigliano.

$$\frac{\partial w}{\partial p_R} = \delta R$$

De façon identique, on peut montrer qu'avec un moment M on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial M} = \theta$$

Ou est l'angle de rotation autour de l'axe du moment, au point d'application du moment.

Le théorème de Castigliano s'énonce :

La dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des fores extérieures appliquées est égale à la projection du déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action.

La dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'un des couples extérieurs appliqués est égale à la projection de la rotation du point d'application de ce couple suivant son axe.

Application du théorème de Castigliano aux systèmes hyperstatiques

Théorème de Ménabrea

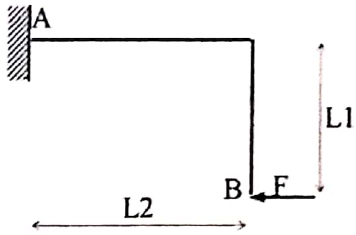
Le théorème de Castigliano indique que la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une fore quelconque appliquée à un système en équilibre est égale à la projection du déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action. Dans le cas ou on considère la réaction d'un appui, le déplacement de cette réaction est nul. Il faut donc en conclure que la dérivée partielle de l'énergie de déformation.

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial M} = 0 \end{cases}$$

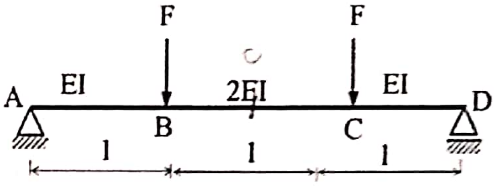
Déformation des structures élastiques

Ex01 : Déterminer le déplacement vertical, horizontal et angulaire de la section B.

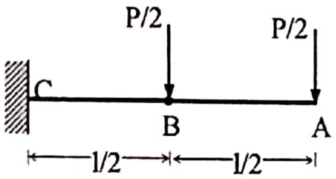
(En utilisant l'intégrale de Mohr et la méthode de Verechtchaguine).



Ex02 : Déterminer d'après la méthode de Verechtchaguine l'angle de rotation sur l'appui gauche A et la flèche au milieu de la poutre.

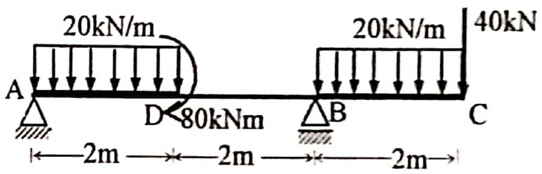


Ex03 : Déterminer la flèche en A .(Castigliano)

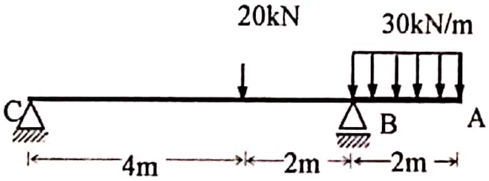


Ex04 : Déterminer la flèche au point D

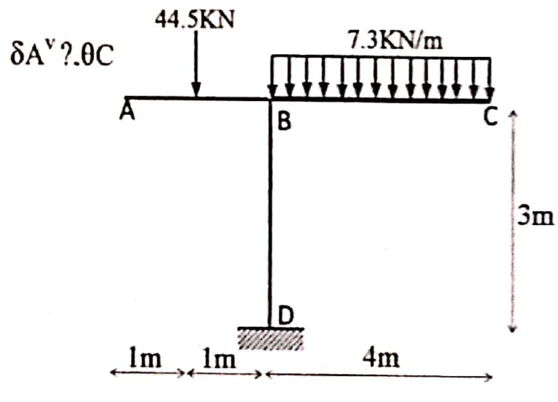
(Verechtchaguine).



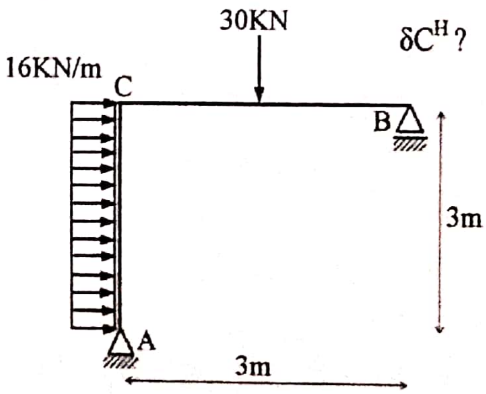
Ex05: Calculer le déplacement du pointA, et la rotation en B. (Castigliano)



Ex06 : Calculer le déplacement vertical du point A, et la rotation en C.



Ex07 : Calculer le déplacement horizontal du point C



Ex08 : Calculer le déplacement horizontal du point C, et la rotation en A.