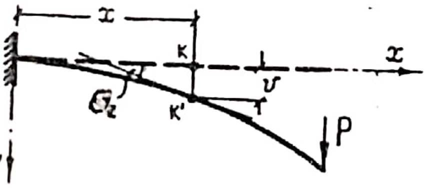
Equation de la ligne elastique.

<u>Generalités</u>: quand on charge une poutre, la ligne moyenne initialement droite se déforme sous l'effet d'un moment flechissant. L'allure de l'axe longitudinal de la poutre après flexion (déformée) est appelée ligne élastique.

<u>Equation differentielle de la ligne elastique</u>:
D'après l'etude de la flexion pure on a etabli la relation suivante,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad \ldots \quad (1)$$



$\frac{1}{\rho}$: courbure de l'axe de la poutre

EI_z: la rigidité flexionnelle.

on sait par les mathématiques, que:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad \ldots \quad (2)$$

le signe depend de l'orientation des axes. Il est (+) si y est dirigé en haut, et (-) en bas.
en égalisant (1) et (2), on obtient l'equation diferentielle de la ligne elastique de la poutre:

$$\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad \ldots \quad (3)$$

pour les poutres rigides la grandeur $\frac{dv}{dx}$ est petite. Alors on peut négliger le terme $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ devant l'unité

l'equation de la ligne elastique s'ecrit finalement:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{-M_z}{EI_z} \quad \ldots \quad (4)$$

pour déterminer la forme de la ligne élastique de la poutre, il faut résoudre l'équat ④. c'est à dire il faut trouver les expressions $v(x)$ et $\theta(x)$. on a vu deux méthode pour la résolution de l'équat ④

<u>la méthode de l'intégration de la ligne élastique:</u>

on fait l'intégrat de l'équat ④. la première intégration donne l'expression de $\theta(x)$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = -\int \frac{M_z(x)}{EI_z}\,dx + a \quad \ldots \quad (5)$$

la dernière intégration donne:

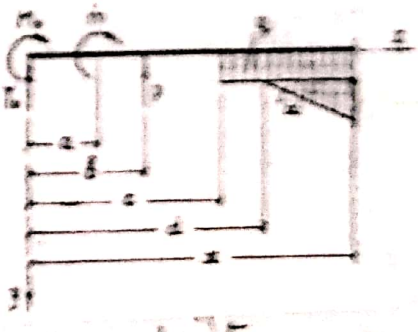
$$v(x) = -\iint \frac{M_z(x)}{EI_z}\,dx^2 + ax + b \quad - \quad (6)$$

on détermine les constante d'intégration a et b à l'aide des conditions aux limites.

<u>la méthode des paramètres initiaux:</u>

on considère une portée de la poutre, chargée par un certain système de forces. dans une section courante x le moment fléchissant $M_z(x)$ peut être écrit:

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + m(x-a)^0 + P(x-b) + q\frac{(x-c)^2}{2} + \frac{tg\alpha\,(x-d)^3}{6} \quad (7)$$



l'expression de $M_z(x)$ peut être représentée sous la forme:

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + \Big|_{x>a} m(x-a)^0 + \Big|_{x>b} P(x-b)^1 + \Big|_{x>c} q\frac{(x-c)^2}{2} + \Big|_{x>d} q\,tg\alpha\frac{(x-d)^2}{6} \quad (8)$$

le signe $|_{x>a}$ dit que le membre correspondant doit être pris en considération uniquement pour les sections où $x>a$.

l'équation différentielle de la ligne élastique est donnée par :

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = - M_z \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

On égalisant (8) et (9) on obtient :

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -\left[M_0 + T_0 x + \Big|_{x>a} m(x-a)^0 + \Big|_{x>b} p(x-b)^1 + \Big|_{x>c} q\frac{(x-c)^2}{2} + \Big|_{x>d} tg\,\alpha \frac{(x-d)^3}{6} \right].$$

l'intégration de cette équation donne :

$$EI_z \frac{dv}{dx} = EI_z \theta(x) = a - \left[M_0 x + T_0 \frac{x^2}{2} + \Big|_{x>a} m(x-a) + \Big|_{x>b} p\frac{(x-b)^2}{2} + \Big|_{x>c} q\left(\frac{x-c)^3}{6}\right. + \Big|_{x>d} \frac{tg\,\alpha (x-d)^4}{24} \right.$$

la deuxième intégration donne :

$$EI\,v(x) = B + ax - \left[M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \Big|_{x>a} m\frac{(x-a)^2}{2} + \Big|_{x>b} p\frac{(x-b)^3}{6} + \Big|_{x>c} q\frac{(x-c)^4}{24} + \Big|_{x>d} tg\,\alpha \frac{(x-d)^5}{120} \right.$$

pour $x = 0$ $\quad a = EI_z \theta_0$, $\quad B = EI_z v_0$.

où θ_0 et v_0 sont les valeurs de θ_z et v en extrémité gauche de la poutre.

on a finalement :

$$EI\,v(x) = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 x - \left[M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \Big|_{x>a} \frac{m(x-a)^2}{2} + \Big|_{x>b} \frac{p(x-b)^3}{6} + \Big|_{x>c} \frac{q(x-c)^4}{24} + \Big|_{x>d} tg\,\alpha \frac{(x-d)^5}{120} \right]$$

cette équation s'appelle : l'équation universelle de la ligne élastique