Matrice de rigidité de plusieurs ressorts

Comment forme la matrice de rigidité globale de la structure à partir des matrices élémentaires

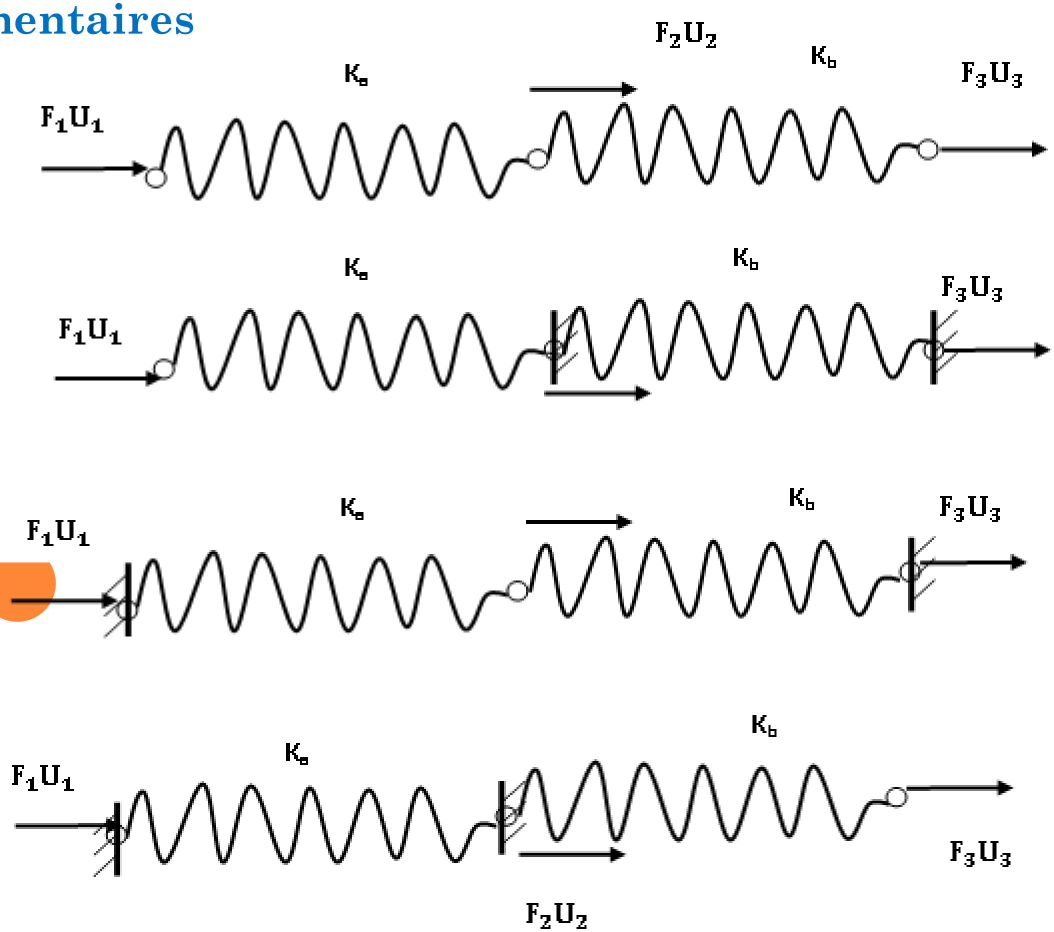


Figure 3.1 Etat possible de mouvement pour une réunion de ressorts

Premier cas

On considère que le nœud 2 et 3 sont bloqués donc les déplacements $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_3}$

sont égales à zéro ,on permet uniquement au nœud 1 de se déplacer dans ce cas la relation entre $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{U_1}$ devient:

$$F_1 = k_a U_1$$

Les lois de la statique impliquent:

$$F_2 = -F_1$$

Aucune force ne peut exister au nœud 3 puisque $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_3}$ sont nuls tous les deux. On a donc

$$F_3 = 0$$

Deuxième cas

On pose U_1 et $\mathbf{U_3}$ égale à zéro ,on remarque que dans ce cas la continuité des déplacements au nœud 2 impose que chaque ressort se déplace de la même quantité. Ainsi la force au nœud 2 a deux composantes, $k_a U_2$ (force nécessaire pour étirer le ressort AB) $k_b U_2$ (la force nécessaire pour comprimer le ressort BC donc:

$$F_2 = (K_a + K_b) U_2$$

En considérant l'équilibre du ressort AB, on a:

$$F_1 = -K_a U_2$$

Et en considérant l'équilibre du ressort BC, on a:

$$F_3 = -K_b U_2$$

Troisième cas

Finalement , $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ sont posés égale à zéro et par analogie avec le premier cas on aura

$$F_3 = K_b U_3$$

$$F_2 = -F_3$$

Il est évident que $\mathbf{F_1 = 0}$ car les nœuds A et B ne bougent pas

Action combinée

Il reste à combiner les résultats obtenus pour obtenir la forme de l'équation (2.3)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Puisqu'on considère le comportement linéaire élastique de l'ensemble , le principe de superposition peut être utilisé et les trois cas considérés ajoutés ainsi on obtient

		1^{er} cas	2^{eme} cas	3^{eme} cas
Somme des forces en A	$\square_{\square}$	$\square_{\square}\square_1$	$-\square_{\square}\square_2$	0
Somme des forces en B	$\square_{\square}$	$-\square_{\square}\square_1$	$(\square_{\square}+\square_{\square})\square_2$	$-\square_{\square}\square_3$
Somme des forces en C	$\square_{\square}$	0	$-\square_{\square}\square_2$	$\square_{\square}\square_3$

L'écriture sous forme matricielle donne:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_{33} \end{bmatrix}$$

On remarque que la matrice de rigidité [K] est symétrique

Application aux charpentes

Pour une barre uniforme articulée la valeur de la rigidité K peut s'obtenir à partir de la relation entre contrainte et déplacement

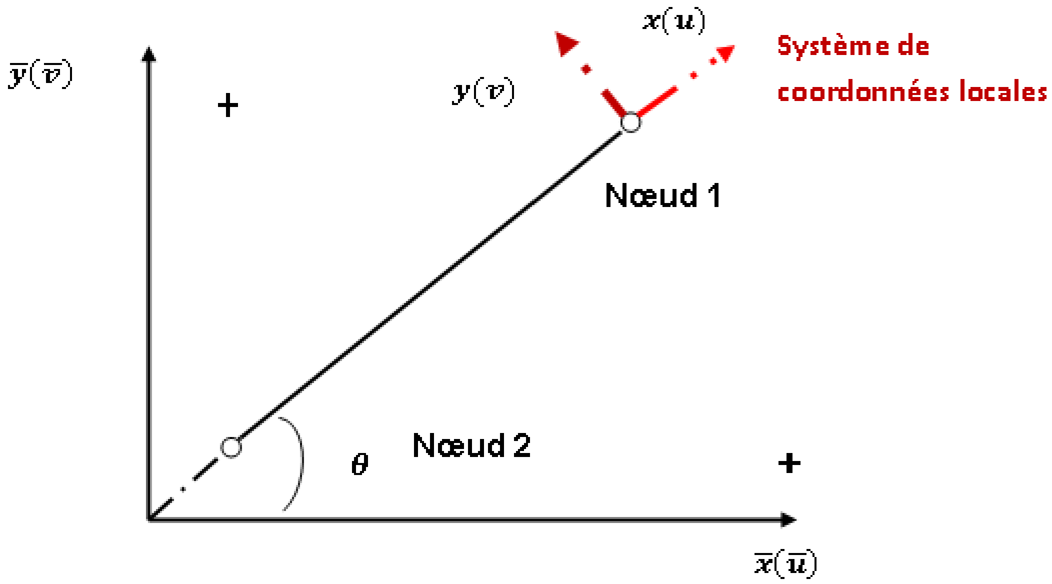
$$F_1 = \frac{EA}{L} U_1$$

Ou F_1 est la tension dans le membre considéré et U_1 son extension.

Donc $K = \frac{EA}{L}$. Ainsi pour une barre de section uniforme l'équation prends la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

L'équation ci-dessus représente la relation entre les forces agissantes sur les extrémités de la barre et les déplacements se produisant aux nœuds, cela est écrit dans les coordonnées de la barre. Cependant il faut tenir compte du fait que les charpentes sont habituellement formés d'un ensemble de barres faisant des angles entre eux. Pour écrire la matrice de rigidité globale il faut écrire la matrice de chaque élément dans le système globale de coordonnées adopté pour toute la structure.



Système de coordonnée globale

Le membre 1-2 est incliné d'un angle θ (positif dans le sens trigonométrique) dans le système globale. Les axes x et y représente le système local de l'élément et $\bar{x}$ et $\bar{y}$ le système global, les déplacements respectifs étant u et v et $\bar{u}$, $\bar{v}$ et les forces F_x ,F_y et $\bar{F}_x$,F_y .Puisqu'un déplacement axial de l'élément possède en général des composantes $\bar{u}$ et $\bar{v}$ dans le système global , il est nécessaire de développer l'équation de la manière suivante.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Puisqu'un membre articulé peut seulement supporter une charge axiale , $F_{y1} = F_{y2} = 0$.
On remarque qu'on peut relier les systèmes de forces en coordonnées locales et global au nœud 1 par les expressions.

$$F_{x1} = F_{x1}\, cos\theta + F_{y1} sin\theta$$

$$F_{y1} = -F_{x1}\, sin\theta + F_{y1} cos\theta$$

On a les mêmes expression au nœud 2

En posant que: $sin\theta = \mu$ et $cos\theta = \beta$ on obtient le système de forces

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \end{Bmatrix}$$

Ou $$\{F\} = [T]\{\bar{F}\}$$

$[T]$ est appelée matrice de changement de basse ou de passage .Une propriété très utile de cette dernière est que son inverse est égale à sa transposée c'est-à-dire

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

La relation qui existe entre les deux ensembles de déplacements est la même que celle qui existe entre les deux ensembles de forces.

$$\{\delta\} = [\mathrm{T}]\{\bar{\delta}\}$$

Nous avons les données nécessaires pour établir la matrice de rigidité $[\bar{K}^e]$ de l'élément dans le système de coordonnées globale . La relation entre forces et déplacements de base pour l'élément donnée par l'équation (**) établit que $\{F\} = [K^e]\{\delta\}$
En combinant avec l'équation (****) on obtient

$$[T]\{\bar{F}\} = [K^e]\{\delta\}$$

En multipliant les deux membres par $[T]^{-1}$ et en utilisant le fait que $[T]^{-1} = [T]^T$

$$[T]^{-1}[T]\{\bar{F}\} = [[T]^T K^e]\{\delta\}$$

Donc
$$\{\bar{F}\} = [[T]^T K^e]\{\delta\}$$

A partir de l'équation $\{\delta\} = [\mathrm{T}]\{\bar{\delta}\}$ et en remplaçant dans l'équation ci-dessus on a:

$$\{\bar{F}\} = [[T]^T K^e][\mathrm{T}]\{\bar{\delta}\} = [\bar{K}^e]\{\bar{\delta}\}$$

De là on peut voir que la matrice de rigidité $[\bar{K}^e]$ de l'élément écrite dans le système de coordonnées globale s'obtient à partir de l'équation suivante:

$$[\bar{K}^e] = [[T]^T K^e][\mathrm{T}]$$

Dans laquelle K^e est la matrice de rigidité dans le système de coordonnées locales

$$[\bar{K}^e] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} \beta^2 & \beta\mu & -\beta^2 & -\beta\mu \\ \beta\mu & \mu^2 & -\beta\mu & -\mu^2 \\ -\beta^2 & -\beta\mu & \beta^2 & \beta\mu \\ -\beta\mu & -\beta^2 & \beta\mu & \beta^2 \end{bmatrix}$$