

MÉTHODES DES ÉLÉMENTS FINIS

Cours-TD-TP

M1 VOA

Introduction à la méthode des éléments finis

L'analyse numérique d'un problème en physique associe des notions de mathématiques, de physique et d'analyse numérique. Le problème de physique est régi par des lois de comportement des matériaux (béton, acier...).

Les hypothèses de modélisation permettent la construction d'un modèle mathématique représentatif du problème physique. Souvent, le problème mathématique peut ne pas présenter de solution analytique explicite.

On opte alors pour sa résolution par des méthodes numériques, généralement à base de discrétisations du problème mathématique.

La résolution numérique nous fournit des résultats qu'il faudra alors vérifier et interpréter. Cela peut conduire à la construction de nouveaux modèles physiques ou mathématiques.

La méthode des éléments finis fait partie des outils de mathématiques appliquées.

Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes de la formulation variationnelle ou formulation faible, un algorithme mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (ou EDP) sur un domaine avec des conditions aux bords ou dans l'intérieur du domaine.

les conditions de type Dirichlet (valeurs aux bords) ou Neumann (gradients aux bords) sont utilisés.

Les équations différentielles

A la base des modèles physiques et numériques, nous avons des équations différentielles qui régissent le comportement de la structure.

Une équation différentielle peut être définie comme une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différentiation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, par exemple pour l'étude des systèmes de structure en dynamique. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Les solutions des équations différentielles peuvent être très simples (polynômes, fonctions exponentielles,...) ou très difficiles à exprimer, voire parfois même impossible à résoudre. Il est nécessaire de bien comprendre le sens physique des fonctions décrivant les phénomènes afin de pouvoir, le cas échéant, apporter des hypothèses simplificatrices qui vont nous aider à résoudre notre problème.

Principe de discrétisation en espace et en temps

L'objectif du numéricien en physique appliqué est de bien comprendre les fondements des EDP qu'il utilise et de les manipuler afin de pouvoir les utiliser dans le plus de cas possibles.

Proposer une résolution d'une EDP qui est strictement dépendante de la géométrie ou des conditions limites et qui demande une programmation adaptée à chaque. En outre, pour des cas très simples, il vaut mieux chercher une solution analytique précise plutôt qu'une solution numérique.

Les solutions numériques ont surtout été créées afin de palier aux besoins des ingénieurs en matière de calcul mécanique (problèmes non-linéaires, dynamique des solides,...).

L'idée directrice de nombreuses méthodes numériques, et pas seulement de la MEF, est de transformer un problème continu complexe à résoudre en une somme de problèmes discrets (sous-problèmes) simples à résoudre, mais dont la solution n'est généralement pas exprimée sous forme analytique.

La discrétisation consiste à « découper » le domaine Ω , c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine polygonal par morceaux ; il y a donc une redéfinition de la géométrie. Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir une nouvelle géométrie constitué par de nouveau plan qui sont les éléments finis.

- Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'EDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation.
- Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini.
- Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système.
- Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale. Le système d'équations linéaires global est résolu .

L'EDP est résolue aux nœuds du maillage, c'est-à-dire que la solution est calculée en des points donnés (résolution discrète) et non en chaque point du domaine Ω . Cela nécessite de pouvoir interpoler, c'est-à-dire déterminer les valeurs en tout point à partir des valeurs connues en certains points. On utilise en général des fonctions polynomiales.

Un élément fini est la donnée d'une cellule élémentaire et de fonctions de base de l'espace d'approximation dont le support est l'élément, et définies de manière à être interpolantes.

Résolution du système globale:

Le système globale peut être linéaire ou non linéaire . Il définit un problème d'équilibre qui concerne un cas statique ou un problème de valeurs critiques où il faut déterminer les valeurs et vecteurs propres du système qui correspondent généralement aux fréquences et modes propres d'un système physique .

Un problème de propagation qui concerne le cas transitoire (non stationnaire) dans lequel il faut déterminer les variations dans le temps des variables physiques et la propagation d'une valeur initiale.

Les méthodes d'intégration pas à pas sont les plus fréquentes telles que, méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson. A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus célèbre est la méthode de Newton Raphson

1. Formulation variationnelle

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très répandu. Il est souvent formulé en termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine et l'équation est réécrite sous forme intégrale

1.1 Forme forte

Un problème classique d'équations différentielles gouvernant un système physique s'énonce comme suit :

Trouver une fonction $u \in V$; V espace des fonctions, telle que :

$$; A(u) = 0|_{\Omega} \quad B(u) = 0|_{\Gamma} \quad (1)$$

où $A(u)$ est l'ensemble d'équations gouvernantes définies sur le domaine Ω et $B(u)$ est l'ensemble des conditions aux limites que les fonctions u doivent vérifier sur le contour Γ (fig.1).

La fonction u peut être un scalaire tel que la température, la pression, ... ou un vecteur tel que le déplacement, la vitesse, ...

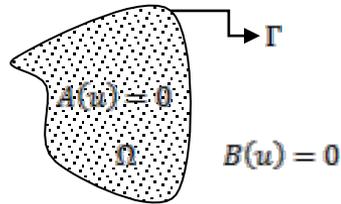


Fig.1 Domaine géométrique et contour

Le problème variationnel associé au système (1) s'écrit en prenant l'intégrale du système d'équations gouvernantes pondérées par des fonctions poids, l'énoncé devient :

$$\forall \omega \in V : \int_{\Omega} \omega A(u) d\Omega = 0 \quad 2$$

Cette équation est appelée forme intégrale forte de l'équation différentielle (ou du système d'équations différentielles). Elle est analogue à l'expression des travaux virtuels. En fait la solution de (2) a encore plus de portée, on peut affirmer que si elle est satisfaite pour toute fonction poids w , alors l'équation différentielle (1) est satisfaite en tout point du Domaine Ω .

Exemple :

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$A(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + 1 - x = 0 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 3$$

Définie dans le domaine unidimensionnel $\Omega = [0, L]$ avec les conditions aux limites :

$$A(x = 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x = 1) = 0 \quad 4$$

Dans ce cas $B(u)$ est l'ensemble des valeurs imposées aux deux bords du domaine. En unidimensionnel, Γ se réduit à deux points. Le forme intégrale associée à l'équation $A(u)$ s'écrit :

$$\int_{\Omega} \omega \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 1 - x \right) d\Omega = 0 \quad ; \quad \int_0^1 \omega \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int_0^1 \omega(1 - x) dx \quad 5$$

Avec la forme des termes à intégrer, on voit que la recherche de solutions approximatives pour la fonction inconnue u , requiert l'utilisation de polynômes ou de fonctions d'interpolation dérivables au moins deux fois. De plus les conditions aux limites doivent être vérifiées à part puisqu'elles n'interviennent pas dans l'équation intégrale ci-dessus, d'où l'introduction de la forme intégrale faible.

○ Forme faible

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder; soit par le choix de la fonction de pondération, soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} \omega B(u) d\Gamma = 0 \quad 6$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (2) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(\omega) D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} E(\omega) F(u) d\Gamma = 0 \quad 7$$

Les opérateurs C , D , E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de fonctions d'approximation de u plus large. Cette équation est la formulation faible de l'équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finis.

Remarque : Pour obtenir de telle formulation intégrales, nous disposons de deux procédés:

le premier est la méthode des résidus pondérés connue sous le nom de la méthode de Galerkin, le deuxième est la détermination de fonctionnelles variationnelle que l'on cherche à rendre stationnaire.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de trouver une fonctionnelle. Le premier procédé est plus utilisé; il consiste à choisir $\omega = \delta u$ fonction de Dirac (une perturbation de la fonction cherchée) et d'utiliser l'approximation nodale pour la discrétisation. ω s'appelle aussi fonction poids d'où le mot : "pondéré".

Exemple

Pour obtenir la forme variationnelle faible de l'exemple précédent (équation 5) on intègre par partie le premier terme.

$$\int_0^1 \frac{d\omega}{dx} \frac{du}{dx} dx + \left[\omega \frac{du}{dx} \right]_0^1 = \int_0^1 \omega(x-1) dx \quad 8$$

On voit maintenant que les conditions aux limites notamment sur les dérivées sont explicitement prises en compte dans l'équation. Les valeurs imposées à la fonction elle-même seront traitées lors de la résolution des systèmes discrets.

CHAPITRE 2

CONCEPT D'ANALYSE DES RIGIDITÉS

○ Introduction

Le plus simple concept idéalisant un élément de structure est le ressort articulé à ses deux extrémités figure 2.1. Pour un tel élément il existe une relation directe entre la force dans le ressort F et le déplacement u de son extrémité libre cette relation prends la forme de l'équation 2.1

$$F = KU \quad [2.1]$$

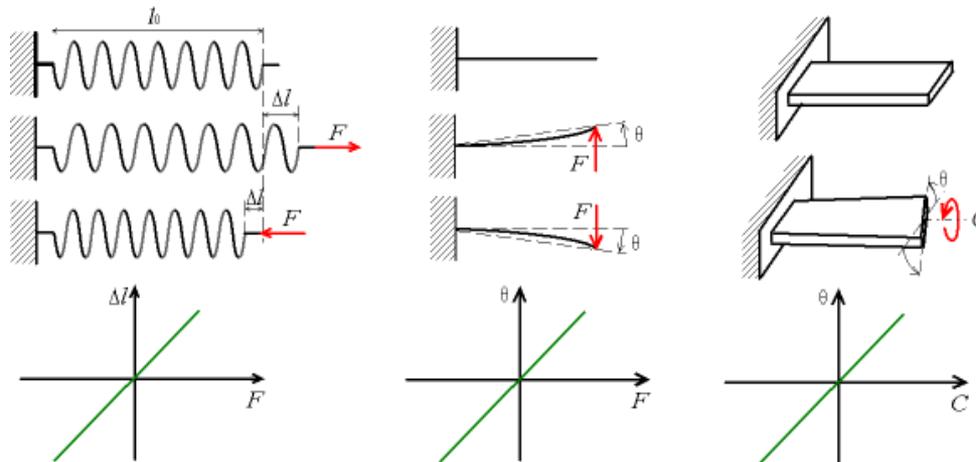
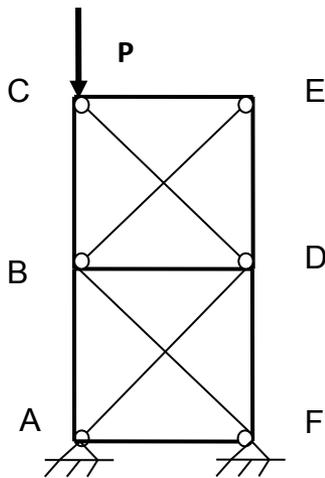


Figure 2.1 Simple ressort élastique et élément de structures

- La quantité K est appelée la rigidité(ou raideur) du ressort et correspond à la pente de la courbe : force en fonction du déplacement. Connaissant les valeurs de la rigidité et de la force appliquée l'équation [2.1] donne le déplacement.

$$U = \frac{F}{K} \quad [2.2]$$

Une seule valeur est suffisante pour caractériser l'état de déformation du ressort figure 2.1



Pour une structure plus compliquée comme la structure articulée figure 2.2, il est nécessaire de déterminer les déplacements des joints B, C, D et E, afin de pouvoir évaluer les contraintes. Les points B, C, D et E seront appelés nœuds.

Figure 2.2 structure hyperstatique

Supposons, que pour une structure complète, on puisse déterminer une quantité similaire à K dans l'équation 2.1 , il est alors nécessaire d'écrire cette dernière sous forme matricielle équation [2.3].

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad [2.3]$$

Les quantités $\{F\}$ et $\{\delta\}$ sont respectivement les vecteurs représentant les charges et les déplacements nodaux.

La quantité $[K]$ est la matrice complète de la structure . Elle relie les forces nodales appliquées $\{F\}$ aux déplacements nodaux inconnus $\{\delta\}$

Matrice de rigidité pour un ressort classique.

Pour le ressort de la figure 2.1 , un seul déplacement $\{\delta\}$ est possible. Le ressort possède deux nœuds , chacun d'eux pouvant se déplacer et être l'objet d'une force appliquée.

Sur la figure 2.3 F_1, U_1 et F_2, U_2 sont les forces et les déplacements s'exerçant axialement .

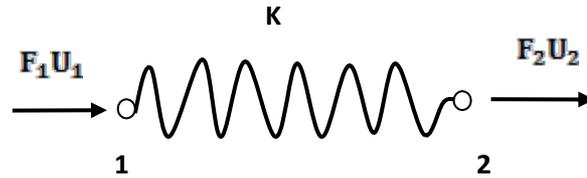


Figure 2.3 Elément de ressort équivalent pour un lien articulé

Le vecteur force pour le ressort sera donc: $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Le vecteur déplacement sera aussi: $\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$

La matrice de rigidité pour le ressort est donc carrée d'ordre 2 .
L'équation 2.3 prend la forme:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad [2.4]$$

Convention de signe.

On adoptera la convention de signe illustre par la figure 2.4 pour les forces et les déplacements. L'analyse portera sur des ressorts linéaire en série, on suppose que seul l'extrémité 1 peut se déplacer , le nœud 2 étant fixé figure 2.5

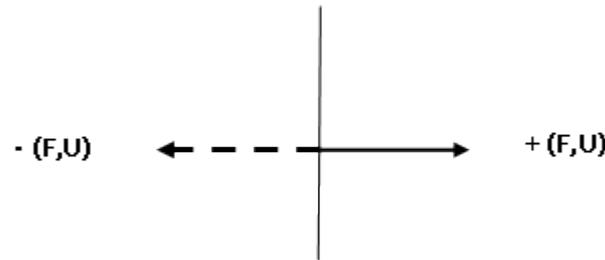


Figure 2.4 Convention de signe



Figure 2.5 Force appliquée à l'extrémité A. L'extrémité B est fixée

La force et le déplacement au nœud 1 sont exprimés par l'équation:

$$F_{1a} = KU_1$$

Ou U_1 est le déplacement à l'extrémité A. L'équilibre des forces agissant sur le ressort implique:

$$F_{1a} + F_{2a} = 0$$

$$F_{2a} = -F_{1a} = -KU_1$$

Si la situation est maintenant inversé en fixant le nœud 1 dans sa position initiale et en permettant au nœud 2 de se déplacer sous l'action de F_2 appliquée à l'extrémité B (Figure 2.6) on aura:

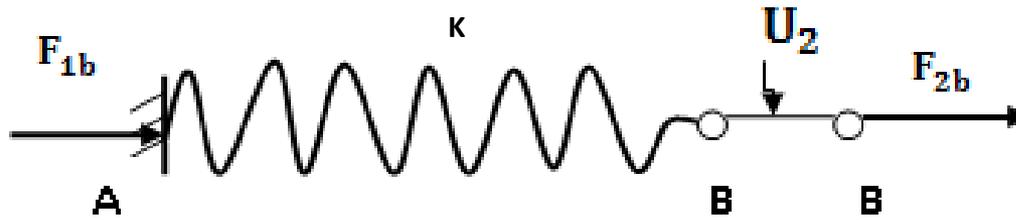


Figure 2.6 Force F_2 appliquée à l'extrémité B. L'extrémité A est fixé

Pour obtenir la relation entre les forces F_1 et F_2 et les déplacements U_1 et U_2 pour le cas ou les deux extrémités peuvent se déplacer figure 2.7 . On utilise le principe de superposition en combinant les deux cas précédents.

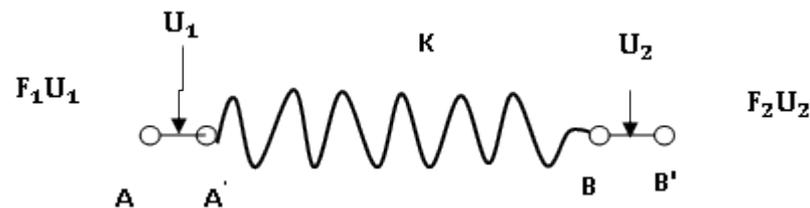


Figure 2.7 cas 1 et 2 combinés

Somme des forces agissantes au nœud 1:

$$F_1 = F_{1a} + F_{1b}$$

Somme des forces agissantes au nœud 2:

$$F_2 = F_{2a} + F_{2b}$$

Ou encore :

$$F_1 = KU_1 - KU_2$$

$$F_2 = -KU_1 + KU_2$$

On remarque que ces équations peuvent facilement être écrites sous formes matricielle de l'équation [2.3]

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi la matrice élémentaire de rigidité $[K^e]$ pour un seul ressort est donnée par l'équation [2.5], l'indice e étant utilisé pour indiquer que la matrice est celle d'un seul élément.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad [2.5]$$

On remarque sur l'équation [2.5] une propriété importante de la matrice de rigidité d'un seul élément et donc de celle d'une structure complète : elle est en effet symétrique, le coefficient k_{12} étant égale au coefficient k_{21} ; c'est une conséquence attendue du théorème de réciprocité.

La matrice donnée par l'équation [2.5] est singulière c'est-à-dire que son déterminant est nul