

# Chapitre I

## COMPORTEMENT DES SOLS SOUS CHARGEMENT CYCLIQUE

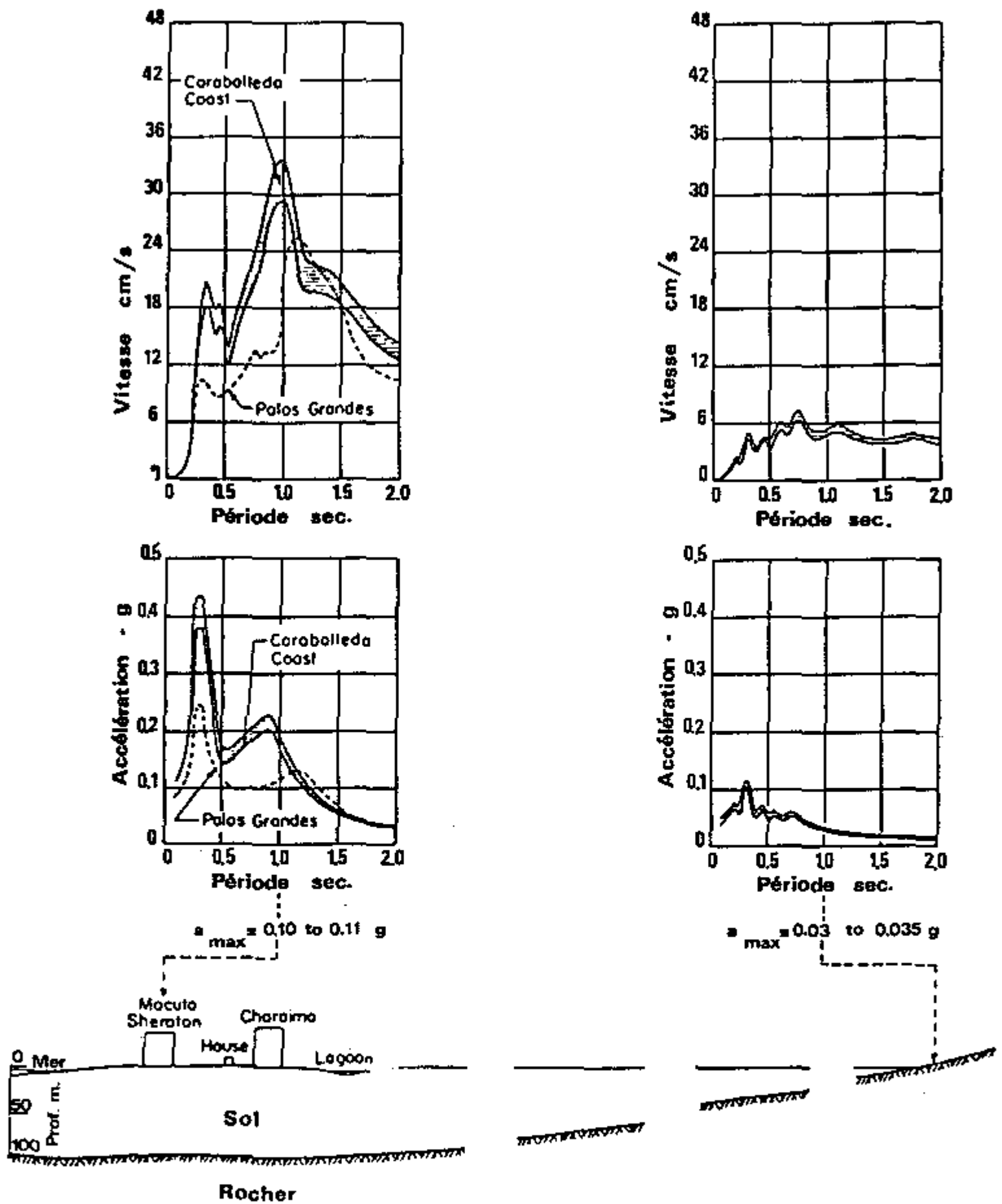
### 1. INTRODUCTION

L'étude du mouvement sismique a mis en évidence l'importance de la nature des couches géologiques de surface sur les caractéristiques de ce mouvement. Un exemple de cette influence est donnée sur la figure 1 qui représente les spectres de réponses en vitesse et en accélération calculés à partir des accélérogrammes enregistrés dans la vallée de Caracas (Vénézuéla) lors du séisme de 1967 [SEED et al, 1972]. Les deux stations d'enregistrement peuvent être considérées comme suffisamment proches l'une de l'autre (distance nettement inférieure à la distance hypocentrale) pour que les autres paramètres influant sur la nature du mouvement sismique (paramètres liés à la source et au trajet) puissent être considérés comme semblables. La différence de nature des mouvements entre l'affleurement rocheux et le centre de la vallée traduit l'influence des caractéristiques géotechniques des sols de fondation.

L'étude du comportement des sols sous chargement cyclique, qui constitue l'objet du présent chapitre, apparaît donc comme une étape essentielle du génie parasismique.

### 2. DESCRIPTION DU COMPORTEMENT DES SOLS

Une description complète du comportement du sol est obtenue si, partant d'un état d'équilibre caractérisé par un champ de contrainte  $\sigma$  et un champ de déformation  $\epsilon$ , il est possible de déterminer le nouvel état de déformation obtenu après application d'un incrément de contrainte  $d\sigma$ . Cette description est obtenue à l'aide de la loi de comportement du sol.



**Figure 1** Spectre de réponse à CARABALLEDA (1967)

La loi de comportement est une relation liant le tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}$ , le tenseur de déformation  $\underline{\epsilon}$  et leurs incréments  $d\underline{\sigma}$  et  $d\underline{\epsilon}$ . En toute généralité, le temps intervient également comme paramètre dans la relation précédente / Cependant pour les sols on verra, qu'en règle générale, le temps n'intervient pas dans l'expression de la loi de comportement. La formulation de la loi de comportement est obtenue dans le cadre d'une théorie donnée : élasticité, visco-élasticité, élasto-plasticité ... Elle constitue le but ultime de la description du comportement du sol. Cependant, en raison de la complexité de description de ce comportement, dont un aperçu sommaire sera donné au paragraphe 3, une approche plus expérimentale et plus pragmatique est souvent employée en mécanique des sols. Cette approche est un substitut au modèle théorique que constitue la loi de comportement.

### 2.1. Loi de comportement

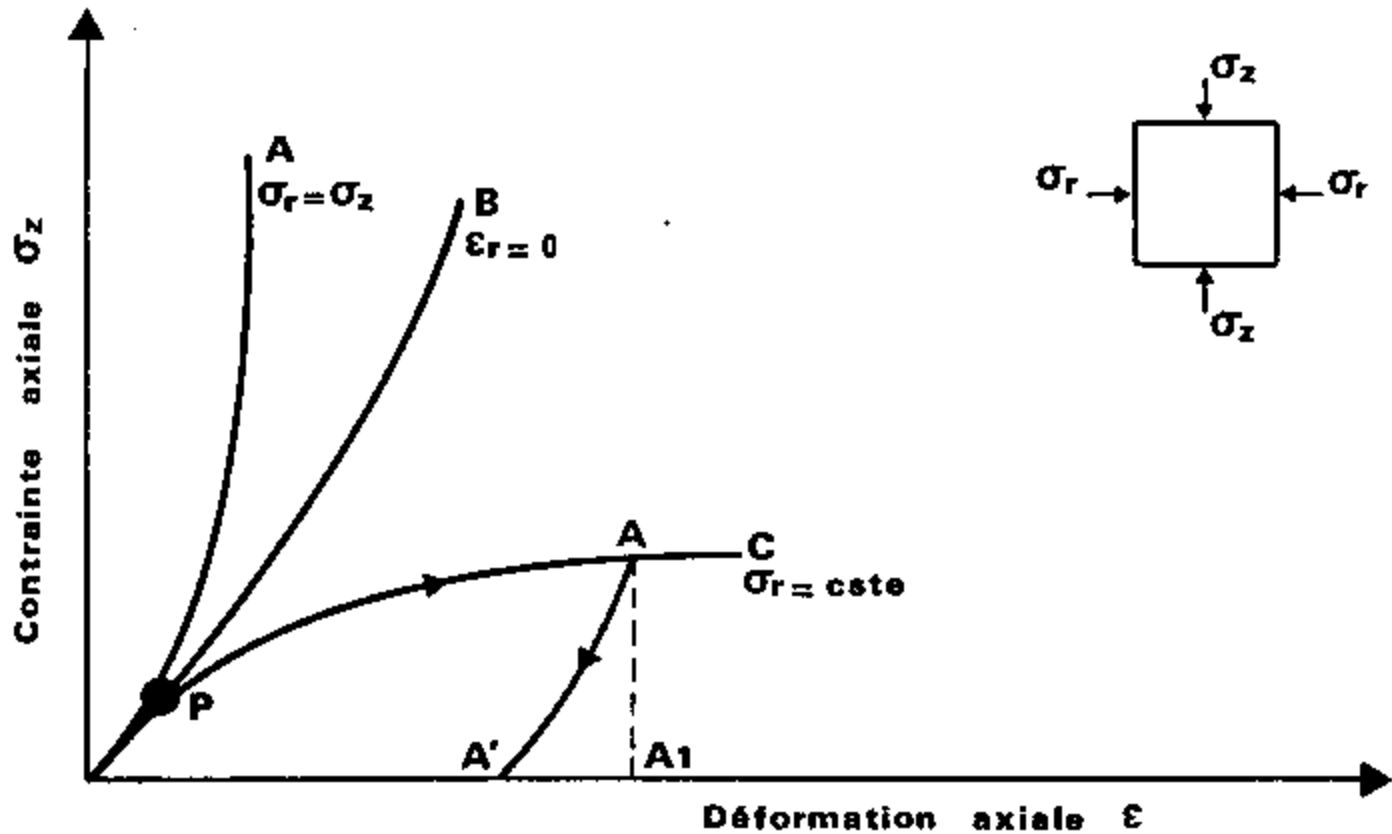
Sa détermination se fait, dans le cadre d'une théorie donnée, à partir d'un petit nombre de résultats expérimentaux. Le modèle ainsi déterminé permet d'évaluer le comportement du sol soumis à des chemins de contraintes quelconques, tels que ceux suivis in situ lors d'un séisme. Ces chemins de contraintes sont généralement plus complexes que ceux ayant servi à l'établir. Le modèle doit être formulé en contraintes effectives puisque le comportement du sol est régi par ces contraintes. Pour être totalement valable, il doit pouvoir être testé sous des chemins de contraintes différents de ceux ayant servi à l'établir. Pour cela, les moyens expérimentaux dont on dispose étant relativement limités, le modèle doit rester simple et ne pas faire intervenir un trop grand nombre de paramètres dont la détermination nécessiterait la mise en oeuvre de l'ensemble des moyens disponibles.

### 2.2. Description expérimentale

La deuxième approche, plus pragmatique, relève d'une démarche courante en mécanique des sols. Elle consiste à anticiper le mode de chargement auquel va être soumis en place un élément de sol lors de la sollicitation sismique. Ce mode de chargement est reproduit au laboratoire de façon aussi fidèle que possible, compte tenu des moyens expérimentaux qu'il est possible de concevoir. Le comportement du sol sous ce type de chargement est alors caractérisé par une courbe effort - déformation qui est directement utilisée pour rendre compte du comportement du sol en place. Ainsi, en se référant à la figure 2, pour évaluer les tassements d'une couche de sol sous un remblai de grandes dimensions, on utiliserait la courbe expérimentale B obtenue en imposant une déformation latérale nulle à l'éprouvette.

A l'échelle de temps des sollicitations sismiques, la plupart des sols ont au cours de la sollicitation cyclique un comportement non drainé. La perméabilité du sol n'est pas suffisante (par rapport à la vitesse d'application des charges) pour permettre un drainage de celui-ci. En conséquence, dans ce type d'approche, les contraintes cycliques imposées et les résultats sont exprimés en termes de contraintes totales. Cette approche constitue un pis-aller, classique en mécanique des sols ; en effet, comme on l'a indiqué, le comportement du sol est régi par les contraintes effectives et la compréhension de son comportement non drainé réside dans la loi de comportement. Cette loi de comportement détermine la

tendance à la variation de volume du sol qui se traduit, en comportement non drainé ou partiellement drainé, par une variation de pression interstitielle donc de contrainte effective.



**Figure 2** Courbe effort-déformation  
Chargement quasi statique monotone

La limitation de cette deuxième approche en contraintes totales apparaît clairement dès que les conditions de drainage deviennent complexes. Par ailleurs elle reste nécessairement d'application limitée aux chemins de contraintes testés dans les essais. Ceux-ci requièrent souvent des simplifications importantes par rapport aux trajets de chargement réels.

En dépit de ces restrictions importantes, qu'il convient de toujours garder à l'esprit, la suite du chapitre sera en grande partie basée sur cette deuxième approche qui reste la plus utilisée dans la pratique courante. On généralisera cependant ces résultats pour donner des formulations générales de lois de comportement.

### 3. OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

#### 3.1. Chargement monotone

Avant d'aborder l'étude du comportement des sols sous chargement cyclique, il paraît nécessaire de faire un rappel sur le comportement des sols sous chargement quasi-statique monotone. La figure 2 présente de façon schématisée des courbes

effort-déformation obtenues à l'appareil triaxial pour trois chemins de contraintes différents :

- compression isotrope (courbe A)
- essai à déformation latérale nulle (courbe B)
- essai triaxial classique à contrainte radiale (ou pression de confinement) constante (courbe C)

L'examen de ces résultats expérimentaux montre que :

a) il existe un domaine de faibles déformations pour lequel la relation entre la contrainte appliquée et la déformation associée est linéaire. Si à l'intérieur de ce domaine de déformation on effectue une décharge (diminution de la contrainte appliquée), le trajet suivi dans le plan  $(\sigma, \epsilon)$  est identique au trajet suivi lors de la charge. En particulier si l'effort revient à zéro, la déformation résiduelle de l'échantillon est nulle. Le sol a un comportement élastique linéaire. ]

b) au-delà d'un certain seuil de contrainte et quelque soit le chemin de contrainte suivi, la relation effort - déformation n'est plus une droite. Le comportement du sol cesse d'être linéaire. Notons cependant que la non linéarité n'exclurait pas a priori l'hypothèse d'un comportement élastique qui se traduirait par un trajet de décharge identique à celui de la charge. Certains matériaux présentent en effet des comportements élastiques non linéaires.

c) si à partir d'une contrainte suffisamment élevée (point A sur la courbe C) on effectue une décharge de l'échantillon, le trajet suivi lors de la décharge n'est plus identique au trajet suivi lors de la charge. En particulier, lorsque le déviateur appliqué redevient nul, il y a apparition d'une déformation résiduelle. C'est l'existence de cette déformation résiduelle qui traduit le fait que, lors du trajet OA, le comportement du sol n'est plus élastique même non linéaire. Lors de la décharge, la courbe effort - déformation est très approximativement une droite. Lors de la recharge et jusqu'au niveau de contrainte  $\sigma_A$  associé au point A, le trajet suivi est identique à celui suivi lors de la décharge. Le comportement du sol est de nouveau élastique linéaire. Cependant, alors que précédemment le domaine d'élasticité s'étendait jusqu'à la contrainte  $\sigma_p$ , le chargement antérieur a eu pour effet d'étendre ce domaine d'élasticité. En recharge les déformations restent élastiques jusqu'en A. On dit qu'il y a eu écrouissage du matériau. En A la déformation est donc la somme d'une déformation élastique  $A'A_1$ , récupérable lors d'une décharge, et d'une déformation irréversible OA' appelée déformation plastique. Le comportement du sol est dit élastoplastique.

Dans la réalité, même en décharge, le comportement du sol n'est pas élastique linéaire ; des déformations irréversibles apparaissent même pour des décharges partielles. C'est l'effet Bauschinger.

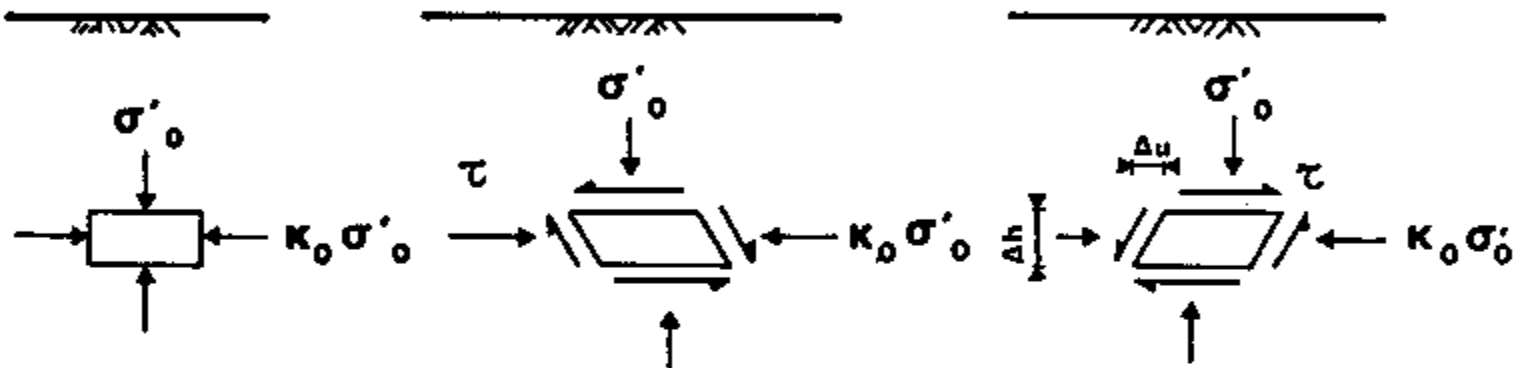
d) pour certains trajets de chargement (courbe C) la déformation devient très importante pour une valeur finie de la contrainte appliquée. Le sol atteint un état de rupture.

Les constatations qui viennent d'être mises en évidence sous chargement unidirectionnel se généralisent à des chargements plus complexes. Sous chargement quasi-statique monotone le comportement du sol est donc caractérisé par un domaine d'élasticité (domaine à l'intérieur duquel les déformations restent

élastiques), variable au cours du chargement, et au-delà duquel apparaissent des déformations plastiques irréversibles. Pour certains chemins de contrainte le sol peut atteindre un état de rupture.

### 3.2. Chargement cyclique

Il est d'usage dans les calculs de réponse dynamique d'un profil de sol ou dans les problèmes d'interaction sol - structure de considérer que le mouvement sismique a pour origine une onde de cisaillement se propageant verticalement. Dans ces conditions, un élément de sol pris à une profondeur  $h$  dans le profil est soumis au cycle de chargement représenté à la figure 3.

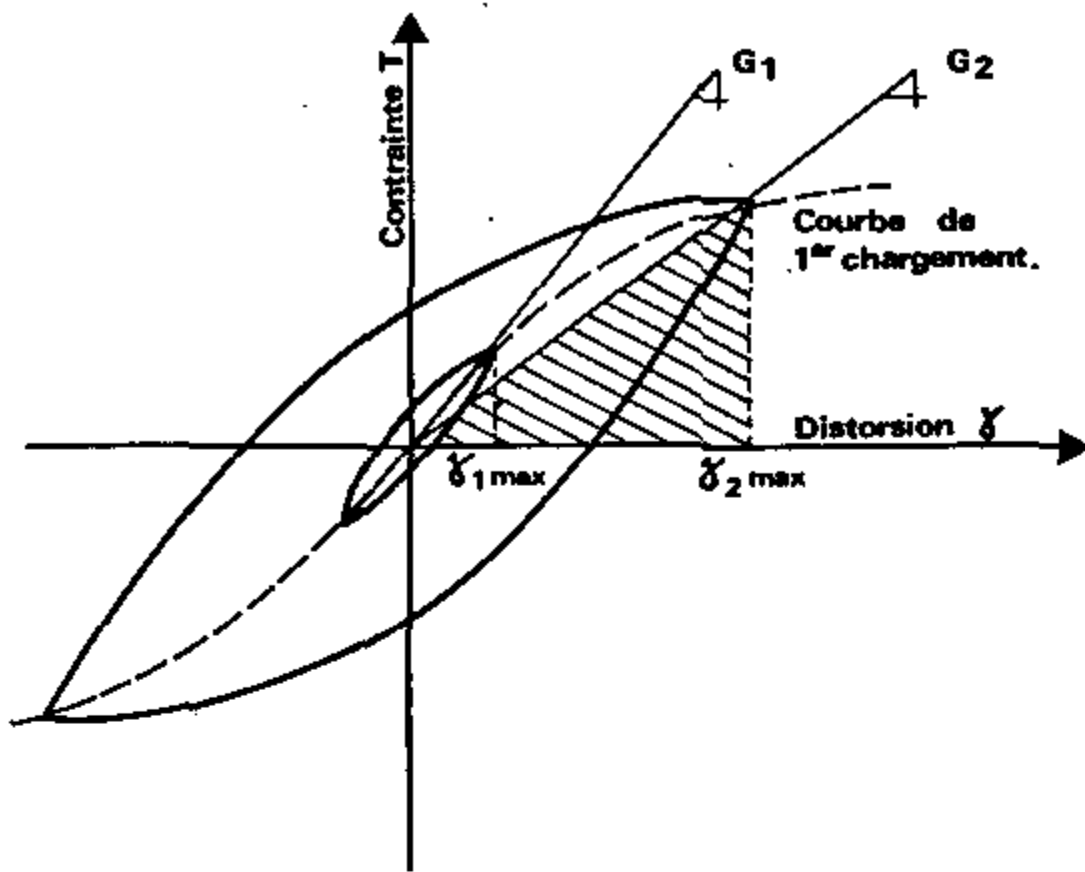


**Figure 3** Séquence de chargement idéalisée

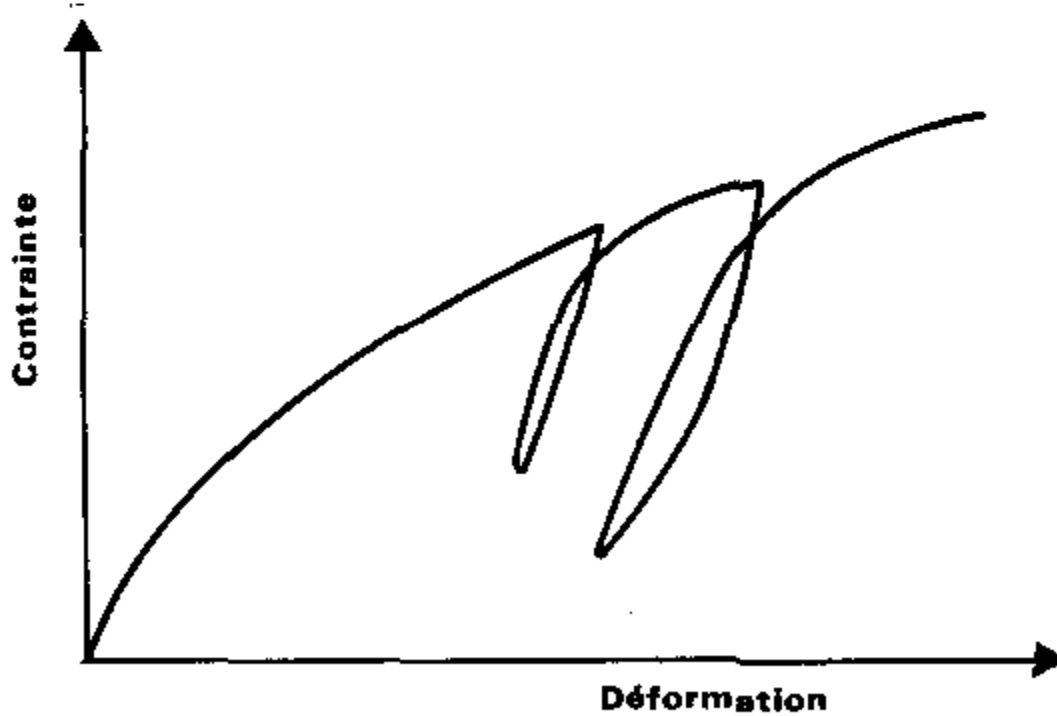
Initialement, dans le cas d'un profil de sol horizontal, l'élément est en équilibre sous les contraintes verticale effective  $\sigma'_v$  et horizontale effective  $\sigma'_h$ , égale à  $K_0 \sigma'_v$ .  $K_0$  est le coefficient de poussées des terres au repos, il est voisin de 0,5 pour les sols normalement consolidés et peut être supérieur à 1,0 dans les sols fortement surconsolidés. Le passage de l'onde de cisaillement se traduit par l'application sur les faces horizontales de l'élément de sol, et donc sur les faces verticales pour maintenir les conditions d'équilibre, d'une contrainte de cisaillement  $\tau(t)$ . Sous l'effet de cette contrainte l'échantillon subit une déformation de cisaillement simple qui, pour un matériau à comportement élastique, se traduirait par une variation de volume nulle. La déformation de cisaillement, également appelée distorsion, est définie par (figure 3) :

$$\gamma = \frac{\Delta u}{\Delta h} \quad (1)$$

Comme indiqué précédemment, on mesure les caractéristiques du matériau en essayant de reproduire au laboratoire, de la façon la plus fidèle possible, ce mode de sollicitation qui est uniaxial. L'enregistrement d'une courbe effort-déformation  $\tau = f(\gamma)$  est reproduit à la figure 4 pour un cycle de contraintes fermé. Un cycle fermé n'est pas nécessairement centré autour de l'origine (figure 5) mais par simplification on le supposera centré à l'origine. Les expériences montrent d'ailleurs que les observations faites pour ce cas restrictif sont généralisables à tout cycle de contrainte fermé [HARDIN - DRNEVICH, 1972a].



**Figure 4** Courbe effort - Déformation cyclique .



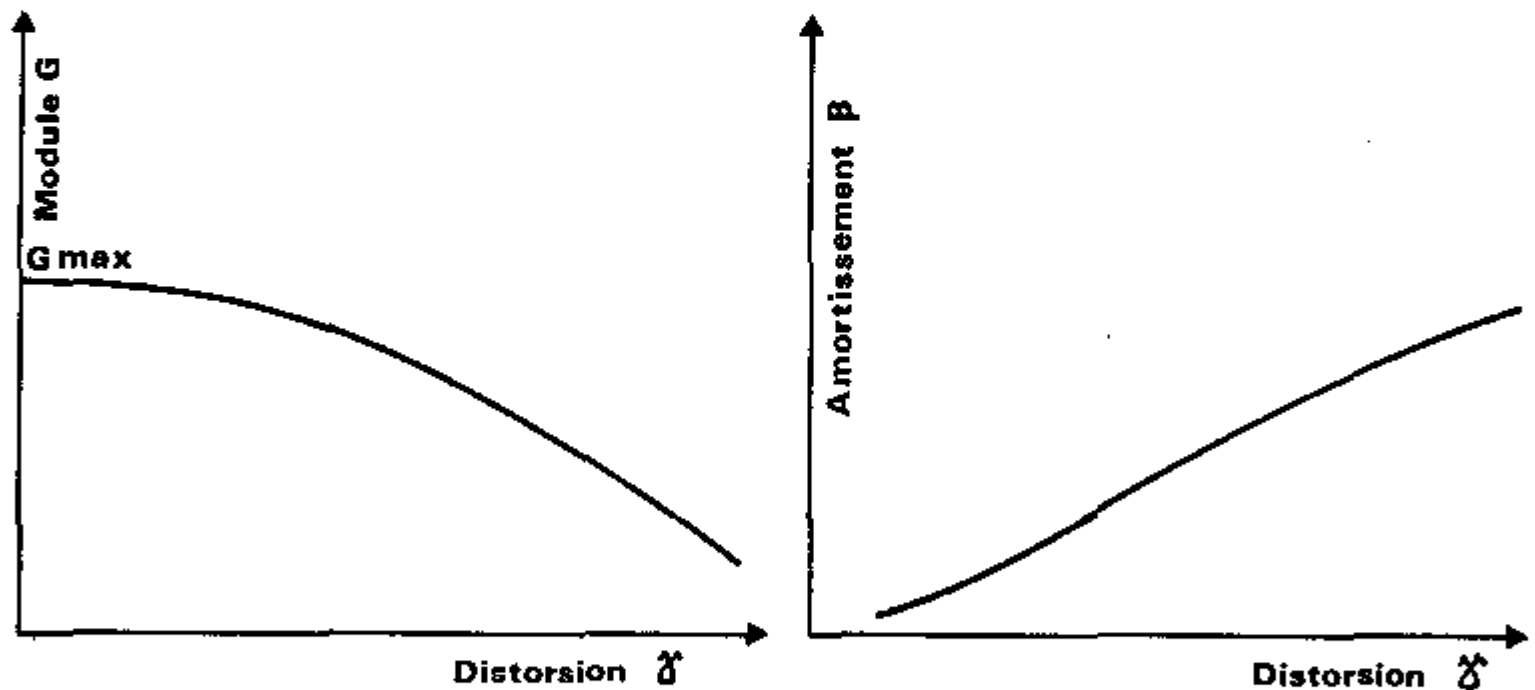
**Figure 5** Chargement cyclique fermé non centré à l'origine

La figure 4 montre que, pour un cycle fermé, le comportement du sol est caractérisé par une boucle appelée boucle d'hystérésis, dont la surface et l'inclinaison dépendent de l'amplitude de la déformation au cours du cycle. Plus cette dernière est grande, plus l'aire de la boucle est importante et plus celle-ci est inclinée sur l'horizontale. Par ailleurs, on constate expérimentalement que la forme de la boucle d'hystérésis n'est pas affectée par la vitesse d'application de la sollicitation.

Les extrémités des boucles, correspondant à des cycles d'amplitudes différentes, sont situées sur la courbe de premier chargement passant par l'origine. Il est commode et classique de définir cette boucle à l'aide de deux paramètres :

- le module sécant  $G_s$  qui est la pente de la droite joignant les extrémités de la boucle (ou l'origine à une extrémité dans le cas d'un cycle centré à l'origine) ;
- le coefficient d'amortissement  $\beta$ , sur lequel on reviendra au paragraphe suivant, qui est une mesure de l'aire de la boucle. Il caractérise l'énergie dissipée par le matériau lors d'un cycle.

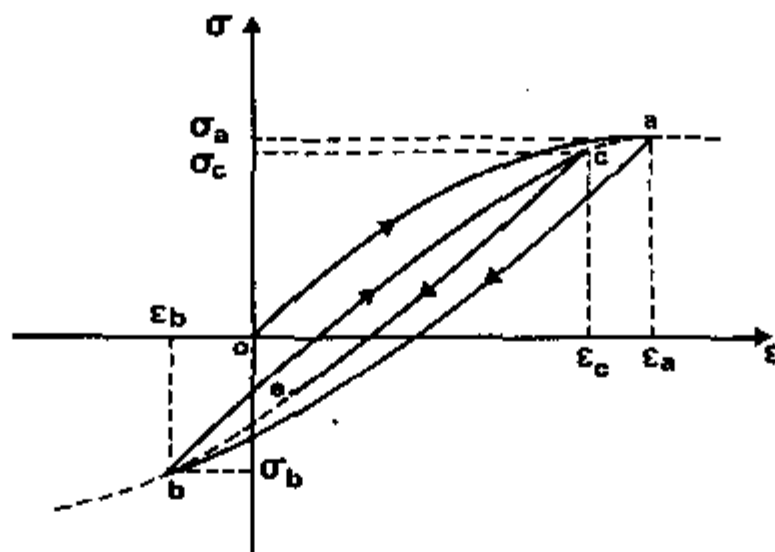
La dépendance de ces deux paramètres sur la déformation cyclique est alors mise en évidence sur la figure 6. La valeur maximale  $G_{max}$  du module est la pente de la tangente à l'origine à la courbe de premier chargement.



**Figure 6** Variations de  $G$  et  $\beta$  avec la déformation

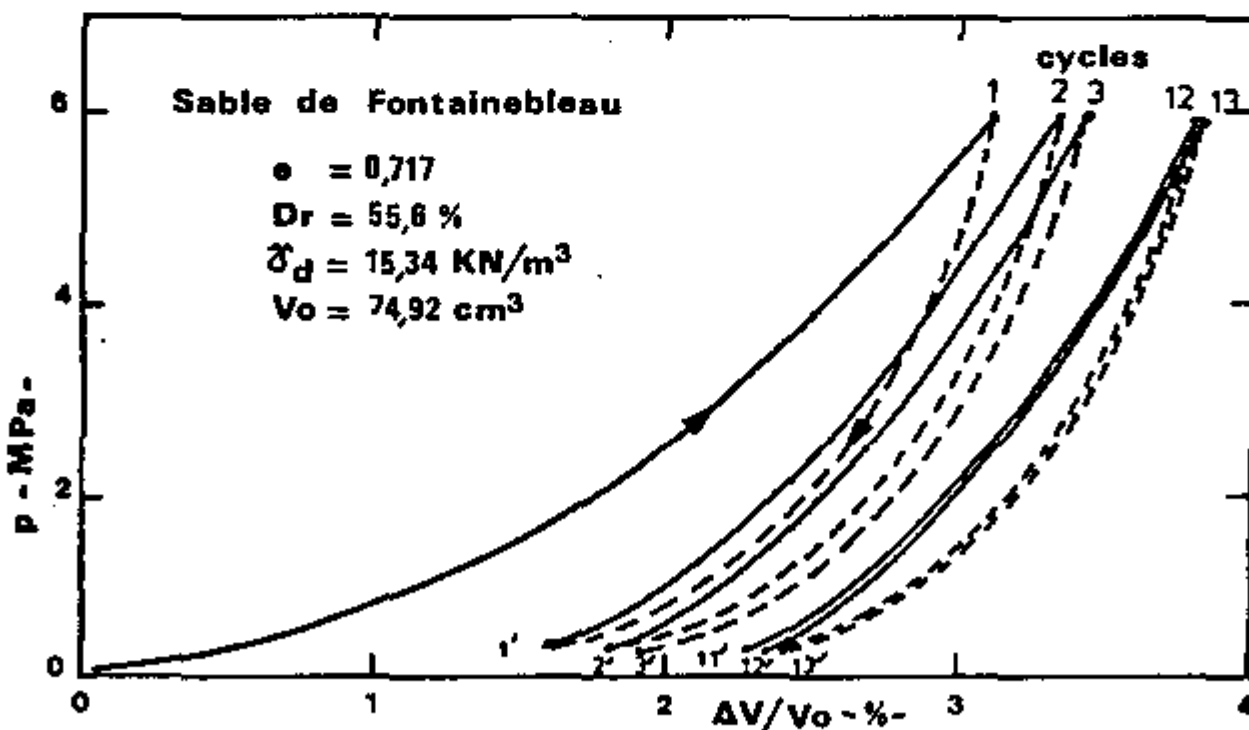
Dès que le chargement cyclique n'est plus fermé, le comportement devient plus complexe à décrire. Un exemple en est donné sur la figure 7. Jusqu'en  $b$ , le trajet suivi est identique à celui de la figure 4 (courbe de premier chargement puis courbe de décharge). Au point  $b$ , tel que  $\sigma_b < \sigma_a$ , le signe du chargement est de nouveau inversé ; le trajet suivi est donné par la courbe  $bc$  puis éventuellement par  $ce$  si le chargement est de nouveau inversé en  $c$ . Si au contraire le chargement est poursuivi au-delà de  $c$ , le trajet sera représenté par  $da$  puis, au-delà, suivra de nouveau la courbe de premier chargement.





**Figure 7** Chargement cyclique quelconque

Associées à ces déformations de cisaillement, des déformations volumiques prennent place (figure 8). Ces déformations volumiques, irréversibles, provoquent un durcissement du matériau. Ainsi, même pour des cycles fermés tous identiques, la boucle d'hystérésis obtenue lors du 4ème cycle de chargement est différente de celle obtenue lors du premier cycle. Cette dernière est moins inclinée sur l'horizontale et a une aire moins importante. Pour un sol peu perméable et saturé, on a noté que les déformations se produisent à volume constant, l'eau interstitielle n'ayant pas le temps de s'évacuer du squelette. La tendance à la variation de volume existe cependant et se traduit par une augmentation de la pression interstitielle donc par une diminution des contraintes effectives. Le comportement du sol, gouverné par ces dernières, est donc affecté.



**Figure 8** Déformations volumiques sous compressions isotropes cycliques (LUONG)

Pour les problèmes sismiques qui ne mettent en jeu qu'un nombre de cycles limité, et exception faite de ceux impliquant des phénomènes de rupture ou de grandes déformations, les variations volumiques restent limitées et sont généralement maximales lors du premier cycle de chargement. Pour la description expérimentale du comportement, évoquée précédemment, on s'affranchit de ce paramètre en mesurant les caractéristiques du sol obtenues après quelques cycles. Cet empirisme n'est, une fois encore, qu'un substitut à la loi de comportement qui se doit de tenir compte de ces phénomènes. On reviendra plus en détails sur ces problèmes de variation volumique sous chargement cyclique en abordant le problème de la rupture par liquéfaction des sables.

#### 4. NOTIONS D'AMORTISSEMENT

L'apparition d'une boucle d'hystérésis au cours d'un cycle fermé de chargement met en évidence une dissipation d'énergie dans le matériau. Le terme amortissement matériel est utilisé pour décrire le phénomène physique de conversion d'énergie cinétique et d'énergie potentielle (énergie de déformation) en chaleur. L'amortissement est une grandeur fondamentale dans l'étude des phénomènes vibratoires en particulier au voisinage de la résonance. C'est lui qui permet à un système physique, mis en vibration à une fréquence égale à sa fréquence de résonance, de maintenir une amplitude de déplacement limitée.

Parmi les matériaux présentant de l'amortissement, on peut distinguer ceux pour lesquels :

- l'énergie dissipée dépend de la vitesse de déformation. C'est en particulier le cas des matériaux visco-élastiques linéaires. Certains matériaux comme les polymères exhibent ce type de comportement à amortissement visqueux. Ce n'est pas le cas des sols pour lesquels l'expérience montre que l'énergie dissipée est essentiellement indépendante de la vitesse de déformation.

- l'énergie dissipée ne dépend pas de la vitesse de déformation. L'amortissement est quelquefois dit hystérétique. Ces matériaux sont caractérisés par des non-linéarités importantes à fort niveau de déformation. L'amortissement est attribué à des déformations plastiques au niveau des cristaux ou des grains constituant la structure. La plupart des métaux et des sols appartiennent à cette catégorie.

##### 4.1. Définitions des paramètres caractérisant l'amortissement

Deux grandeurs peuvent être utilisées pour caractériser l'amortissement d'un matériau :

- ⊕ l'énergie dissipée par cycle dans l'élément ;
- ⊕ le rapport de cette énergie à une énergie élastique de référence.

L'énergie dissipée par cycle peut s'exprimer soit à l'aide de l'énergie totale  $D_0$  (N-m/cycle) dissipée par le spécimen dans un cycle de sollicitation, soit à l'aide de l'énergie spécifique  $D$  (N-m/m<sup>3</sup>/cycle) dissipée par unité de volume en un point du matériau.  $D_0$  est la grandeur directement mesurable dans l'expérience

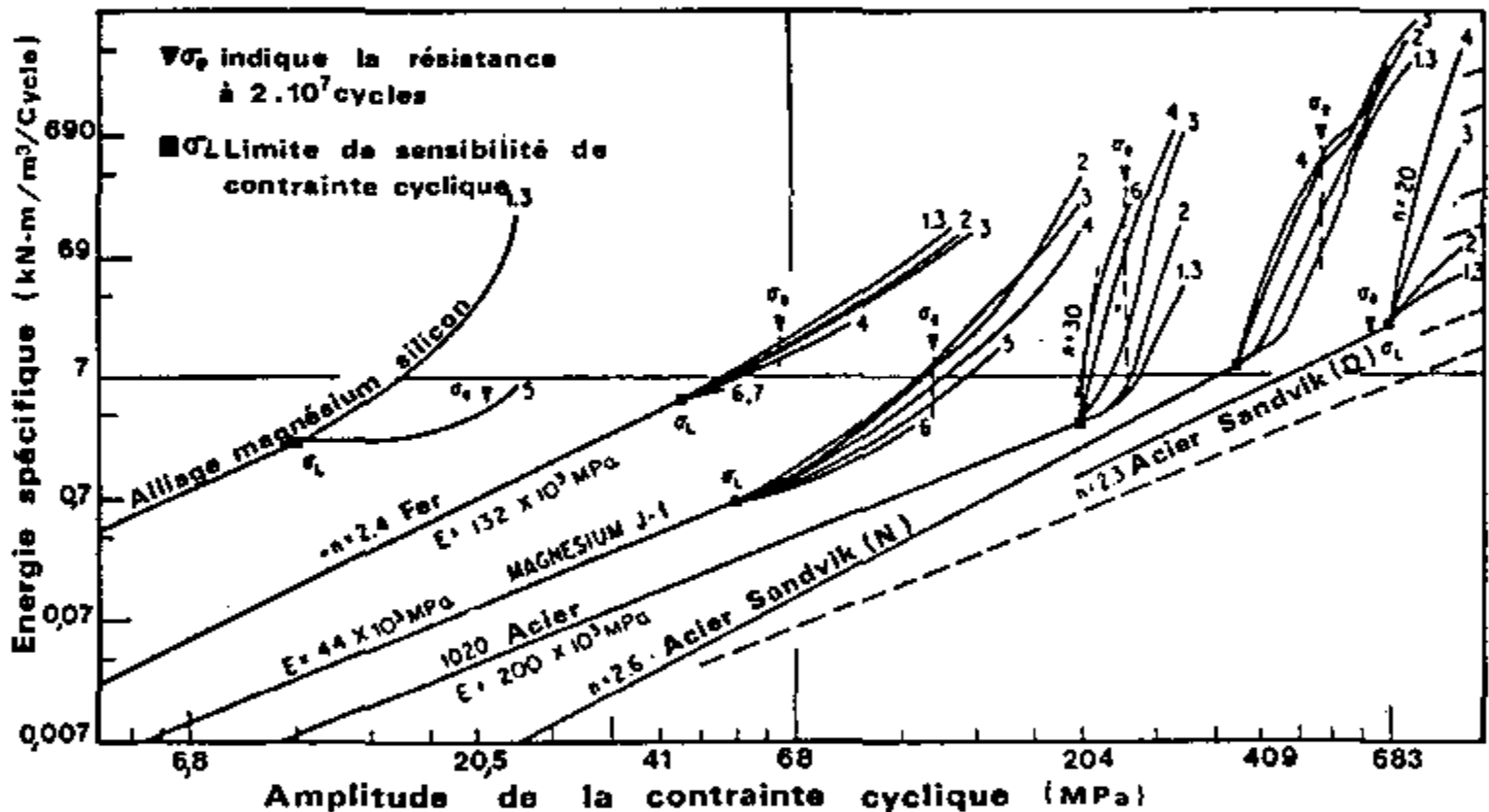
mais  $D$  est la grandeur fondamentale du point de vue du comportement. On a la relation évidente entre ces deux grandeurs :

$$D_0 = \iiint_V D(x,y,z) dx dy dz \quad (2)$$

Pour un échantillon dans lequel le champ de contraintes est uniforme :

$$D_0 = D.V \quad (3)$$

où  $V$  est le volume de l'échantillon.



**Figure 9** Energie spécifique dissipée en fonction de la contrainte cyclique et du nombre de cycles  $N$  (Une courbe marquée 3 correspond à  $10^3$  cycles)

L'expérience montre que pour beaucoup de matériaux, il n'existe pas de relation simple entre l'énergie spécifique dissipée  $D$  et la valeur de la contrainte cyclique  $\sigma_d$ . Cependant, pour des seuils de contrainte n'excédant pas 70 % de la limite de résistance sous chargement cyclique du matériau  $\sigma_e$ , on a une relation de la forme :

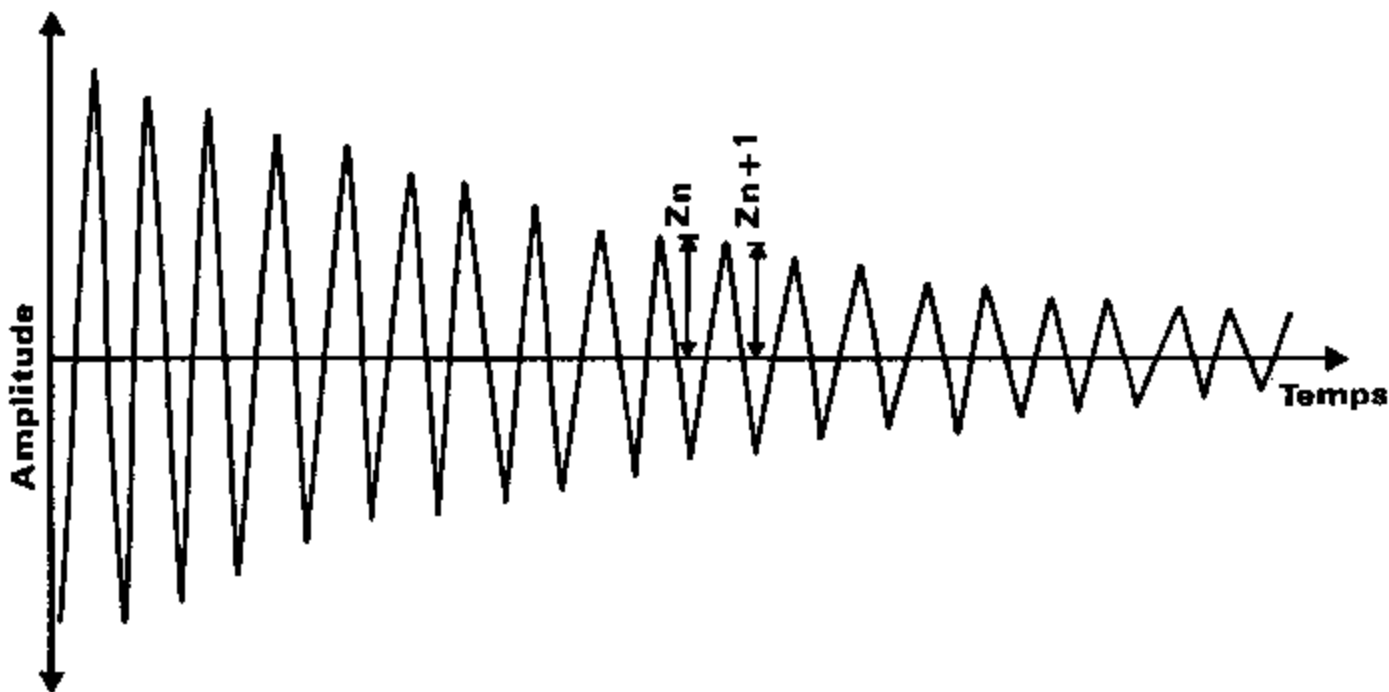
$$D = J \left[ \frac{\sigma_d}{\sigma_e} \right]^n \quad (4)$$

La figure 9 [GOODMAN, 1976] met en évidence une telle relation avec une valeur de  $n$  comprise entre 2.0 et 3.0.

Dans la pratique, on préfère exprimer l'amortissement matériel à l'aide d'une grandeur adimensionnelle obtenue en normant l'énergie dissipée par une énergie élastique de référence. Cependant, en raison de la complexité des mécanismes gouvernant l'amortissement matériel, l'utilisation d'un pourcentage d'amortissement ne produit pas tous les avantages qu'on pourrait attendre d'une grandeur adimensionnelle [GOODMAN, 1976]. Une des raisons de l'utilisation de telles grandeurs réside dans leur appréhension directe par certains essais. C'est en particulier le cas du décrement logarithmique  $\delta$ .

Par définition, le décrement logarithmique  $\delta$  est le logarithme du rapport de deux amplitudes consécutives d'un échantillon oscillant librement (figure 10).

$$\delta = \text{Ln} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (5)$$



**Figure 10** Amortissement des vibrations libres

D'autres coefficients permettent de définir de façon adimensionnelle l'amortissement matériel [LAZAN, 1968]. Parmi ceux-ci on distingue :

- le coefficient de perte, noté  $\eta$ , qui est par définition égal au rapport de l'énergie dissipée  $D$  au cours d'un cycle à  $2\pi$  fois l'énergie élastique emmagasinée

$$\eta = \frac{D}{2\pi W} \quad (6)$$

En se reportant à la figure 4, W est l'aire du triangle en grisé:

$$W = \frac{1}{2} G \gamma_m^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_m^2}{G} \quad (7)$$

d'où:

$$\eta = \frac{D G}{\pi \tau_m^2} = \frac{D}{\pi G \gamma_m^2} \quad (8)$$

- la capacité d'amortissement spécifique  $\chi$ , égale au rapport de l'énergie dissipée à l'énergie élastique emmagasinée

$$\chi = \frac{D}{W} \quad (9)$$

- le déphasage  $\phi$  qui représente l'angle formé par les vecteurs représentant la contrainte (la force) et la déformation (le déplacement) lors d'un mouvement sinusoïdal,

- le facteur de qualité Q qui mesure l'atténuation de l'amplitude d'ondes se propageant dans un milieu du fait de l'absorption d'énergie par amortissement matériel. Cette atténuation est à distinguer de celle résultant de la dispersion le long du front d'onde, appelée amortissement géométrique. On reviendra sur cette notion au chapitre V.

Tous les paramètres définis précédemment sont liés par les relations:

$$\eta = \frac{\delta}{\pi} = \frac{\chi}{2\pi} = \operatorname{tg} \phi = \frac{1}{Q} \quad (10)$$

#### 4.2. Matériaux à amortissement dépendant de la vitesse de déformation

Les matériaux de ce type ont une loi de comportement décrite par une fonctionnelle faisant intervenir le tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ , le tenseur des déformations  $\underline{\epsilon}$  et leurs dérivées par rapport au temps  $\dot{\underline{\sigma}}$  et  $\dot{\underline{\epsilon}}$ . Cette fonctionnelle peut ne pas être linéaire mais, en pratique, la plupart des modèles sont basés sur la théorie de la visco-élasticité linéaire qui a fait l'objet de développements très complets [MANDEL, 1966 ; SALENÇON, 1983]. Sous sollicitation harmonique, on rend compte du

comportement du matériau en introduisant des modules complexes de la forme (voir paragraphe 5.2.) :

$$G^* = G_1(\omega) + i G_2(\omega) \quad (11)$$

où  $G_1$  et  $G_2$  dépendent de  $\omega$ , pulsation de la force excitatrice.

L'expression ci-dessus, écrite pour le module de cisaillement, est également valable pour le module d'Young, le module de compressibilité volumétrique... correspondant à d'autres sollicitations. Elle traduit le fait que sous sollicitation harmonique, la contrainte peut être décomposée en une composante en phase avec la déformation ( $G_1(\omega)$ ) et une autre déphasée de  $90^\circ$  ( $G_2(\omega)$ ). Pour cette sollicitation la boucle d'hystérésis formée est elliptique. On montre aisément que pour un cycle d'amplitude maximale  $\gamma_m$  l'énergie spécifique dissipée vaut:

$$D = \pi G_2(\omega) \gamma_m^2 \quad (12)$$

$G_2$  dépendant de la pulsation  $\omega$ , donc de la vitesse de déformation, l'énergie spécifique dissipée est fonction de cette vitesse de déformation.

En rapprochant cette équation de la relation (4), on constate que pour les matériaux à amortissement dépendant de la vitesse de déformation,  $n = 2$ . Le déphasage  $\phi$  est donné par :

$$\text{tg } \phi = \frac{G_2(\omega)}{G_1(\omega)} \quad (13)$$

Du point de vue rhéologique, un matériau visco-élastique linéaire peut être représenté par un ressort et un amortisseur placés en série (modèle de Maxwell) ou en parallèle (modèle de Kelvin-Voigt). Dans ce cas  $G_2(\omega)$  est égal à  $C \cdot \omega$  où  $C$  est la caractéristique de l'amortisseur et,  $G_1(\omega)$  à  $G$ , la caractéristique du ressort. Une façon commode de caractériser l'amortissement d'un tel modèle est d'introduire la notion de pourcentage d'amortissement critique, souvent utilisée en dynamique des structures. Par définition le pourcentage d'amortissement critique vaut (cf. chapitre I, eq(4))

$$\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c p}{2 G_1} \quad (14)$$

où  $p$  est la pulsation propre du modèle.

D'après l'équation (12) et les relations (10), en se plaçant à la résonance,

c'est-à-dire dans une situation où la fréquence d'excitation  $\omega/2\pi$  est égale à la fréquence propre du modèle  $p/2\pi$ , on a la relation :

$$\beta = \frac{D}{4\pi W} = \frac{\eta}{2} \quad (15)$$

La dépendance du pourcentage d'amortissement critique sur la vitesse de déformation n'apparaît plus explicitement. Elle est en fait implicite dans la valeur de  $D$ . La relation (15) est la relation fondamentale qui sert de base au développement de modèles visco-élastiques linéaires équivalents caractérisés par un pourcentage d'amortissement critique  $\beta$  directement relié au coefficient de perte  $\eta$  du matériau. La nature de l'amortissement, visqueux ou autre, n'est plus précisée. Il est représenté par un amortissement linéaire visqueux équivalent. On verra que cette approche est très utilisée pour rendre compte de façon simple du comportement des sols sous chargement cyclique.

### 4.3. Matériau à amortissement indépendant de la vitesse de déformation

Les matériaux de ce type ont une loi de comportement dans laquelle le temps n'intervient pas. Sous chargement cyclique les boucles d'hystérésis présentent des extrémités pointues et, si l'effort appliqué redevient nul, il subsiste dans le matériau une déformation permanente.

L'énergie dissipée au cours d'un cycle prend la forme donnée par la relation (4) avec une valeur de  $n$  comprise entre 2 et 3 [GOODMAN, 1976]. Elle peut également s'exprimer à l'aide du coefficient de perte défini par la relation (6). D'un point de vue rhéologique le matériau peut être représenté par un assemblage de ressorts et de frotteurs (frottement de Coulomb) placés soit en série, soit en parallèle.

## 5. MODELES DE COMPORTEMENT

### 5.1. Modèle élastique

Il ressort des constatations expérimentales du paragraphe 3 que le sol ne peut être représenté par un modèle élastique, tout au moins sur une plage de déformations étendue. L'étude du comportement du sol à l'intérieur de son domaine d'élasticité est cependant importante car il existe une gamme de problèmes pour lesquels ce modèle est valable ; c'est le cas des vibrations des massifs de machines bien conditionnés, des sollicitations sismiques de faible amplitude comme celles engendrées lors des essais géophysiques ...

Dans le cas d'une sollicitation unidirectionnelle, la relation contrainte - déformation se réduit à une relation de proportionnalité dont la constante est un module de déformation. Pour la sollicitation de cisaillement simple (figure 3), cette relation s'écrit :

$$\tau = G \gamma \quad (16)$$

où G est le module de cisaillement.

Pour des sollicitations multidirectionnelles la loi de comportement s'écrit sous forme tensorielle :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (17)$$

$\underline{\underline{\Lambda}}$  est un tenseur du 4ème ordre qui dans le cas d'anisotropie le plus général comporte 36 composantes distinctes. Dans le cas du matériau isotrope, seules 2 composantes suffisent à le définir. Il est commode en dynamique des sols de retenir le module de cisaillement G et, soit le coefficient de Poisson  $\nu$ , soit le module de compressibilité volumétrique K.

Si le matériau est linéaire élastique, les modules G et K, ou le coefficient de Poisson, sont constants. Il y a identité entre le module sécant et le module tangent et la relation (16) peut s'écrire sous forme incrémentale. En fait, l'expérience montre que les modules tangents de cisaillement et volumique dépendent de la contrainte moyenne  $\sigma'_m = \sigma_{jj}/3$  [HARDIN - DRNEVICH, 1972 ; SEED - IDRIS, 1970]. On montre alors [LORET, 1980] qu'il n'est plus possible d'exprimer la loi de comportement (éq. 17) sous forme incrémentale en faisant dépendre les modules G et K de l'état de contrainte actuel. Cette formulation impliquerait une dissipation d'énergie et une déformation résiduelle non nulle sur certains trajets de contrainte fermés. Un tel comportement est dit hypo-élastique [HUECKEL-DRESCHER, 1975]. En imposant à la déformation élastique de dériver d'un potentiel et en supposant le coefficient de Poisson constant, LORET (1980) a proposé une loi de comportement élastique non linéaire sous la forme incrémentale

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \underline{\underline{\dot{\Lambda}}}^* : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad (18)$$

Des études paramétriques importantes [HARDIN - DRNEVICH, 1972 ; SEED - IDRIS, 1970] ont permis de mettre en évidence les paramètres principaux affectant la valeur du module de cisaillement G des sols. Ces paramètres sont :

- la compacité du sol, généralement traduite à l'aide de l'indice des vides e du matériau ;
- l'état de contrainte actuel auquel est soumis le matériau ;
- l'histoire des contraintes antérieures subies par le sol. Cette histoire est habituellement reflétée par un seul paramètre : le rapport de surconsolidation OCR, égal au rapport de la plus grande contrainte verticale supportée par le sol dans son histoire géologique à la contrainte verticale actuelle.

Basée sur les travaux de Hertz relatifs aux déformations de sphères élastiques en contact, la relation donnant le module de cisaillement G, noté désormais  $G_{\max}$  pour rappeler qu'il n'est applicable qu'aux faibles déformations, proposée par la plupart des auteurs pour les sols pulvérulents, est de la forme :



$$G_{\max} = K p_a F(e) \left[ \frac{\sigma'_m}{p_a} \right]^n \quad (19)$$

où K, n sont des constantes dépendant du matériau ; n est généralement voisin de 0,5 et K de 600 ;  $p_a$  est la pression atmosphérique et  $\sigma'_m$  la contrainte moyenne effective.

La fonction F (e) proposée par HARDIN (1978) a la forme ;

$$1/F(e) = 0.3 + 0.7 e^2 \quad , \quad 0.4 \leq e \leq 1.2 \quad (20)$$

Pour les argiles, la formulation proposée diffère suivant les auteurs. HARDIN et BLACK (1968) ont proposé d'après des essais sur échantillons remaniés ;

$$G_{\max} = K p_a (\text{OCR})^k F(e) \left[ \frac{\sigma'_m}{p_a} \right]^n \quad (21)$$

les fonctions et paramètres F(e), K, n,  $p_a$  ont les mêmes définitions et valeurs que dans l'équation (19). Le coefficient k, en exposant du rapport de surconsolidation, dépend de l'indice de plasticité du sol. Les valeurs proposées sont rassemblées dans le tableau I.

IP	k
0	0
20	0.18
40	0.30
60	0.41
80	0.48
>100	0.50

**Tableau I** : Valeurs de k [HARDIN - BLACK, 1968]

SEEM) et IDRISSE proposent une relation basée sur des essais sur échantillons intacts et des mesures géophysiques en place ;

$$G_{\max} = K C_u \quad (22)$$

où  $C_u$  est la cohésion non drainée de l'argile ; K varie de 1000 à 3000. La valeur de la cohésion  $C_u$  reflète l'histoire des contraintes du sol jusqu'à son état actuel

caractérisé par  $\sigma'_m$  ainsi que son état de compacité. Les équations (21) et (22) dépendent donc bien des mêmes paramètres. Seule la valeur de l'exposant  $n$  diffère. En effet  $C_u$  est sensiblement proportionnelle à  $\sigma'_m$  ( $n = 1$ ), alors que la valeur proposée dans la relation (21) est  $n = 0,5$ . Une valeur  $n$  proche de 1 a également été mesurée pour un sol normalement consolidé [PECKER - DUPAS, 1981].

Il faut noter que toutes les relations proposées ne font dépendre le module de cisaillement que du premier invariant du tenseur des contraintes. Comme cela a été indiqué précédemment cette formulation n'est pas, en théorie de l'élasticité, compatible avec un coefficient de Poisson constant.

## 5.2. Modèle viscoélastique linéaire

La formulation générale de la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire isotrope s'écrit [SALENÇON, 1980]:

$$\underline{\sigma} = \int_{t_0}^t \{ \lambda(\tau, t) [\text{trace } \underline{\dot{\epsilon}}(\tau)] \underline{1} + 2 \mu(\tau, t) \underline{\dot{\epsilon}}(\tau) \} d\tau \quad (23)^\dagger$$

où  $2\mu(t_0, t)$  et  $\lambda(t_0, t) + 2\mu(t_0, t)$  représentent les fonctions de relaxation du matériau en cisaillement simple et en extension simple. Dans le cas du matériau non vieillissant, ces fonctions sont invariantes par translation et par suite:

$$\lambda(t_0, \tau) = \lambda(\tau - t_0) \quad (24a)$$

$$\mu(t_0, \tau) = \mu(\tau - t_0) \quad (24b)$$

Pour une sollicitation harmonique  $\underline{\epsilon}(t) = \underline{\epsilon}^0 e^{i\omega t}$ , la loi de comportement (23) se met sous la forme :

$$\underline{\sigma} = \lambda^* (\text{trace } \underline{\epsilon}^0) \underline{1} + 2 \mu^* \underline{\epsilon}^0 \quad (25)$$

où  $\lambda^*$  et  $\mu^*$  sont des nombres complexes fonctions de  $\omega$ . L'équation (25) est analogue à la relation (11) utilisée précédemment.

†

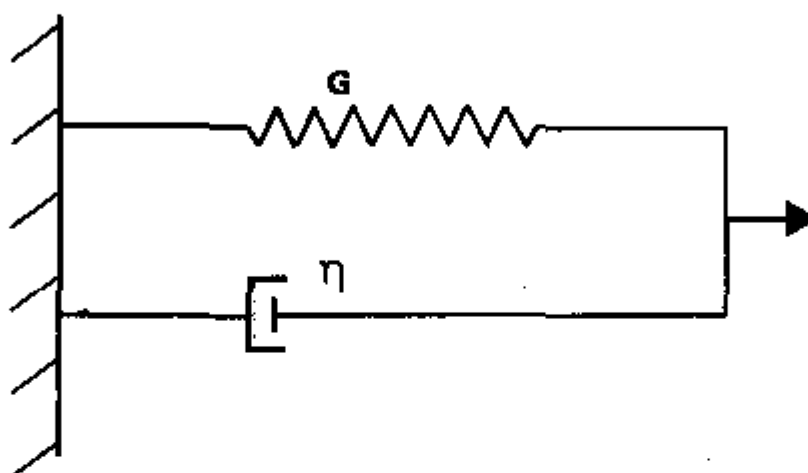
$$\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau = f(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Dans le cas du modèle de Kelvin-Voigt, dont la représentation rhéologique dans le cas unidimensionnel est donnée sur la figure 11, les paramètres  $\lambda^*$  et  $\mu^*$  ont pour expression :

$$\lambda^* = \lambda + i \omega \lambda' \quad (25a)$$

$$\mu^* = \mu + i \omega \mu' \quad (26b)$$

où  $\lambda$  et  $\mu = G$  (respectivement  $\lambda'$ ,  $\mu'$ ) sont les constantes d'élasticité (respectivement de viscosité).



**Figure 11** Modèle de KELVIN-VOIGT

### 5.2.1. Modèles viscoélastiques linéaires équivalents

Les modèles viscoélastiques faisant apparaître une boucle d'hystérésis sous chargement harmonique, il est tentant de représenter, pour ces sollicitations, le comportement réel du sol à l'aide d'un tel modèle. Pour cela on a recours à une procédure de linéarisation qui consiste à remplacer le modèle non linéaire par un modèle linéaire équivalent ayant des propriétés dissipatives plus ou moins équivalentes à celles du matériau réel. Ce type de linéarisation a été introduit par JACOBSEN (1930). De toute évidence, l'équivalence est fonction des caractéristiques du matériau et de la sollicitation. Dans la suite on se consacrera au cas de la sollicitation harmonique, base de la solution de beaucoup de problèmes dynamiques.

Dans la mesure où l'énergie dissipée au cours d'un cycle dépend dans le modèle viscoélastique de la fréquence de la sollicitation (équation 12), ce qui n'est pas le cas pour le matériau réel, il est nécessaire de choisir les paramètres du modèle fonction de la fréquence de façon à ce que les parties imaginaires de  $\lambda$  et  $\mu$  soient indépendantes de cette fréquence de sollicitation. Dans le cas du chargement cyclique unidimensionnel de la figure 4, pour le modèle de Kelvin-Voigt on doit alors avoir (éq. 26b) :

$$\omega \mu' = \text{constante} \quad (27)$$

Le module de cisaillement complexe  $\mu^* = G^*$  s'écrit :

$$G^* = G \left[ 1 + i \frac{\omega \mu'}{G} \right] \quad (28)$$

soit d'après (8) et (12)

$$G^* = G [ 1 + i \eta ] \quad (29)$$

Posant  $2\beta = \eta$  la relation (29) prend la forme :

$$G^* = G [ 1 + 2 i \beta ] \quad (30)$$

Rappelons que  $\eta$  représente le coefficient de perte du matériau et que pour les sols il est indépendant de la fréquence de la sollicitation. En rapprochant l'équation (30) de la relation (15) on constate que  $G^*$  représente la raideur complexe à résonance d'un oscillateur simple de raideur  $G$  et de pourcentage d'amortissement critique  $\beta$ . Il y a donc égalité entre l'énergie dissipée dans le matériau de raideur  $G$  et de coefficient de perte  $\eta$  et celle dissipée à résonance dans l'oscillateur simple de caractéristiques  $G$  et  $\beta = \eta/2$ . Cette remarque est particulièrement utile pour la mesure de  $\eta$ . Par extension, et bien que cela soit générateur d'une certaine confusion, le coefficient  $\beta$  de l'équation (30) est communément appelé pourcentage d'amortissement critique du sol. En choisissant pour module  $G$  du modèle linéaire équivalent le module sécant du matériau  $G_s$ , on obtient une forme possible de linéarisation du système. Cette linéarisation a été proposée par ROSENBLUETH et HERRERA (1964) et utilisée pour les sols par SCHNABEL et al (1972).

LYSMER (1975) a proposé une formulation différente du module de cisaillement complexe :

$$G^* = G_s [ 1 - 2 \beta^2 + 2 i \beta \sqrt{1 - \beta^2} ] = G e^{i\theta} \quad (31)$$

avec

$$\beta = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\eta}{2} \quad (32)$$

On montre aisément que si  $G$ ,  $\beta$  et  $p$  (module, pourcentage d'amortissement critique et pulsation propre) sont les caractéristiques de l'oscillateur, celui-ci a même réponse en termes d'amplification que le modèle défini par le module complexe de l'équation (31). L'équivalence est obtenue par minimisation de la différence entre les réponses du modèle linéaire équivalent et du modèle non linéaire.

L'énergie dissipée par le modèle :

$$D_{\text{modèle}} = 4 \pi W \beta \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - 2 \beta^2} \quad (33)$$

est légèrement différente de celle dissipée par le matériau :

$$D_{\text{matériau}} = 4 \pi W \beta \quad (34)$$

Pour les valeurs usuelles de  $\beta$  ( $< 20 \%$ ) l'écart entre les deux valeurs est d'au plus 6 %. Pour les faibles valeurs de  $\beta$  les relations (30) et (31) deviennent équivalentes.

D'autres méthodes de linéarisation sont possibles [HADJIAN, 1982] ; les deux modèles présentés ci-dessus sont les deux modèles linéaires équivalents les plus utilisés pour les sols.

Les résultats développés ci-dessus dans le cas de sollicitations unidirectionnelles se généralisent immédiatement aux cas de sollicitations harmoniques quelconques. La loi de comportement s'écrit sous une forme analogue à la loi de Hooke généralisée :

$$\underline{\epsilon} = \underline{\Lambda}^* : \underline{\sigma} \quad (35)$$

où le tenseur  $\Lambda^*$  est formé à l'aide des modules de cisaillement et volumétrique complexes. La loi de comportement donnée par l'équation (35) conduit aux mêmes solutions formelles que la loi de l'élasticité linéaire, d'où son attrait incontestable.

En résumé, le comportement non linéaire du sol a été approché par un modèle viscoélastique linéaire équivalent. L'équivalence est fonction des caractéristiques du matériau mais également de la sollicitation. Dans le cas présent elle a été développée pour des sollicitations harmoniques.

Les modèles de ce type sont employés de façon extensive dans la pratique courante. Utilisés en conjonction avec un processus itératif permettant de choisir des valeurs du module  $G$  et de l'amortissement  $\beta$  compatibles avec le niveau moyen de déformation induite (cf. chapitre V), ils fournissent des valeurs des accélérations et contraintes qui se comparent favorablement à celles obtenues à l'aide de modèles plus sophistiqués [MARTIN 1975, PECKER et al. 1984] ou à celles observées [VALERA et al. 1977]. Ces modèles ont par ailleurs le mérite de la simplicité ; ils ne nécessitent que la mesure de trois paramètres (un de plus que le modèle élastique) : module de cisaillement  $G$ , module volumétrique  $K$  et coefficient de perte  $\eta$  (égal à  $2\beta$ ). Le sol étant non linéaire, ces paramètres dépendent bien entendu de l'état de contrainte ou de déformation (figure 6). La principale

limitation de ces modèles est leur incapacité à fournir des valeurs correctes des déformations ou déplacements. En particulier les déformations rémanentes calculées par ce modèle sont nécessairement nulles.

Si une représentation plus fidèle du comportement du sol est nécessaire, plus particulièrement pour évaluer les déformations cycliques ou rémanentes, le recours aux modèles non linéaires est obligatoire.

### 5.2.2. Exemples de modèles viscoélastiques linéaires équivalents

En se fondant sur des résultats expérimentaux, divers auteurs ont proposé des courbes donnant la variation du module G (module sécant) et du pourcentage d'amortissement critique  $\beta$  pour le cas de sollicitations unidirectionnelles. Ces valeurs peuvent être utilisées dans des modèles viscoélastiques linéaires équivalents tels que ceux donnés par les équations (30) ou (31). SEED - IDRIS (1970) ont présenté des courbes expérimentales moyennes utilisables pour des sables ou des argiles. HARDIN - DRNEVICH (1972b) ont proposé les relations suivantes :

$$\frac{G}{G_{\max}} = \frac{1}{1 + \gamma_h} \quad (36)$$

$$\frac{\beta}{\beta_{\max}} = \left[ 1 - \frac{G}{G_{\max}} \right] = \frac{\gamma_h}{1 + \gamma_h} \quad (37)$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{\gamma_y} \left[ 1 + a e^{-b (\gamma/\gamma_y)} \right] \quad (38)$$

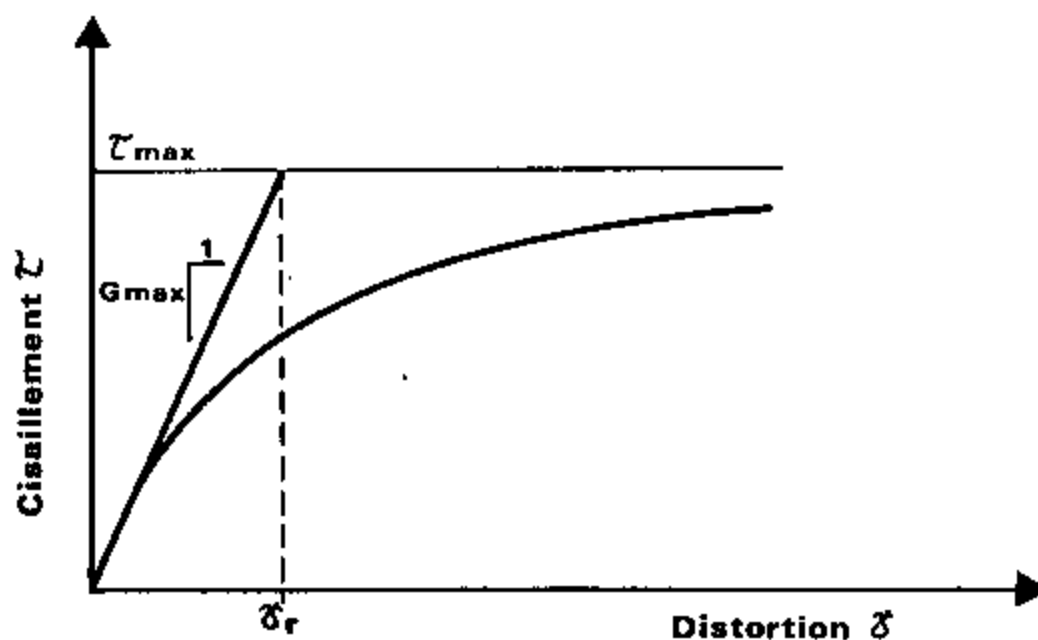
avec :

- $G_{\max}$  = module maximal correspondant au comportement élastique. Son expression est donnée par les équations (19) et (21) ;
- $\gamma$  = déformation de cisaillement ;
- $\gamma_y$  = déformation de référence égale à  $\tau_{\max}/G_{\max}$  où  $\tau_{\max}$  désigne la contrainte de cisaillement maximale à rupture de l'échantillon (figure 12) ;
- $\beta_{\max}$ , a, b, sont des paramètres expérimentaux dont les valeurs proposées par HARDIN - DRNEVICH sont rassemblées dans le tableau II.

On peut montrer que lorsque  $b = 0$  et pour des niveaux pas trop élevés de la contrainte cyclique, l'équation (37) permet d'exprimer l'énergie spécifique dissipée sous la forme de l'équation (4) avec  $n = 3$  et une constante J dépendant de  $G_{\max}$  et  $\tau_{\max}$ .

		a	b	$\beta_{\max}$ (%)
Sable propre sec	Module	- 0.5	0.16	33 - 1.5 log N
	Amortissement	$0.6 N^{-1/6} - 1$	$1 - N^{-1/12}$	
Sable saturé	Module	- 0.2 log N	0.16	28 - 1.5 log N
	Amortissement	$0.54 N^{-1/6} - 0.9$	$0.65 - 0.65 N^{-1/2}$	
Argile saturée	Module	$1 + 0.25 \log N$	1.3	$31 + 1.5 f^{1/2} - 1.5 \log N$ $- (3 + 0.03 f) \left[ \frac{\sigma'_m}{p_a} \right]^{1/2}$
	Amortissement	$1 + 0.2 f^{1/2}$	$0.2 f e^{-\sigma'_m/p_a} + 2.25 \frac{\sigma'_m}{p_a} + 0.3 \log N$	
f = fréquence - Hertz		N = nombre de cycles		
$\sigma'_m$ = contrainte moyenne effective		$p_a$ = pression atmosphérique		

**Tableau II** . Valeurs caractéristiques des paramètres a, b,  $\beta_{\max}$



**Figure 12** Définition des paramètres du modèle de HARDIN-DRNEVICH

### 5.3. Modèles non linéaires

L'objet de ce paragraphe n'est pas de faire la synthèse de tous les modèles non linéaires proposés pour décrire le comportement des sols. On se limitera aux modèles les plus couramment utilisés en se restreignant d'abord au cas, très utile dans la pratique, de sollicitations unidirectionnelles. Pour les sollicitations quelconques on n'envisagera que le cas des modèles construits dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité. Après un rappel de principes généraux inclus dans la formulation de tels modèles, on en présentera un exemple d'application.

#### 5.3.1. Modèles unidirectionnels

Les cas de chargements unidirectionnels se présentent dans beaucoup d'applications pratiques du génie parasismique (réponse d'une couche de sol horizontale à une onde SH, liquéfaction...). Il n'est donc pas inutile de dissocier la modélisation du comportement du sol pour ce type de sollicitations de celui plus général de sollicitations multiaxiales. Bien souvent les modèles proposés se restreignent à ce cas [JENNINGS, 1964 ; FINN et al. 1975 ; MARTIN, 1975...].

La formulation de la plupart des modèles unidirectionnels est purement empirique. On suppose généralement que le comportement du sol peut être décrit précisément à l'aide de fonctions mathématiques et de données expérimentales habituellement obtenues à partir d'essais monotones. Certaines règles sont alors postulées pour décrire le comportement du sol lors des cycles. Parmi celles-ci, les plus largement utilisées sont les lois de MASING (1936) qui postulent que :

- la non linéarité du sol est d'origine plastique;
- les courbes de décharge et recharge sont obtenues à partir de la courbe de premier chargement par translation de l'origine au point d'inversion du signe du chargement et dilatation par un facteur 2 des échelles horizontale et verticale.



De ces deux lois découle le fait que, sous chargement cyclique harmonique, l'amortissement matériel du sol est indépendant de la vitesse de chargement, ce qui est en accord avec les observations expérimentales.

\* La formulation mathématique de la courbe effort-déformation s'écrit alors, suivant que la déformation est exprimée en fonction de la contrainte ou vice versa :

$$\gamma = \gamma_c + \frac{\tau - \tau_c}{G_{\max}} \left[ 1 + H \left[ \frac{|\tau - \tau_c|}{n} \right] \right] \quad (39)$$

ou

$$\tau = \tau_c + G_{\max} (\gamma - \gamma_c) \left[ 1 - J \left[ \frac{|\gamma - \gamma_c|}{n} \right] \right] \quad (40)$$

les indices c désignent les valeurs de la contrainte et de la déformation atteintes lors du précédent changement de direction du chargement.  $G_{\max}$  représente le module de cisaillement ; H et J sont des fonctionnelles mathématiques à adapter aux résultats expérimentaux et n est un coefficient qui vaut 1 pour le chargement initial et 2 pour les décharges et recharges successives.

Les courbes de premier chargement permettant de déterminer les fonctionnelles H et J sont alors données par :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{\max}} \left[ 1 + H(|\tau|) \right] \quad (41)$$

ou

$$\tau = \gamma G_{\max} \left[ 1 - J(|\gamma|) \right] \quad (42)$$

Parmi les fonctionnelles couramment utilisées on ne citera que le modèle hyperbolique de KONDER - ZELASKO qui assimile la courbe de premier chargement à une hyperbole :

$$J(\gamma) = \frac{\gamma/\gamma_y}{1 + \gamma/\gamma_y} \quad (43)$$

où  $\gamma_y$  est une déformation de référence, et le modèle de RAMBERG - OSGOOD où H( $\tau$ ) est donné par :

$$H(\tau) = \alpha \left[ \frac{\tau}{\tau_y} \right]^{R-1} \quad (44)$$

$\tau_y$  étant une contrainte de référence et  $\alpha, R$  des paramètres expérimentaux. Notons que les équations (36) à (38) du modèle de HARDIN - DRNEVICH peuvent définir également une fonctionnelle  $J(\gamma)$ , proche de celle donnée par l'équation (43).

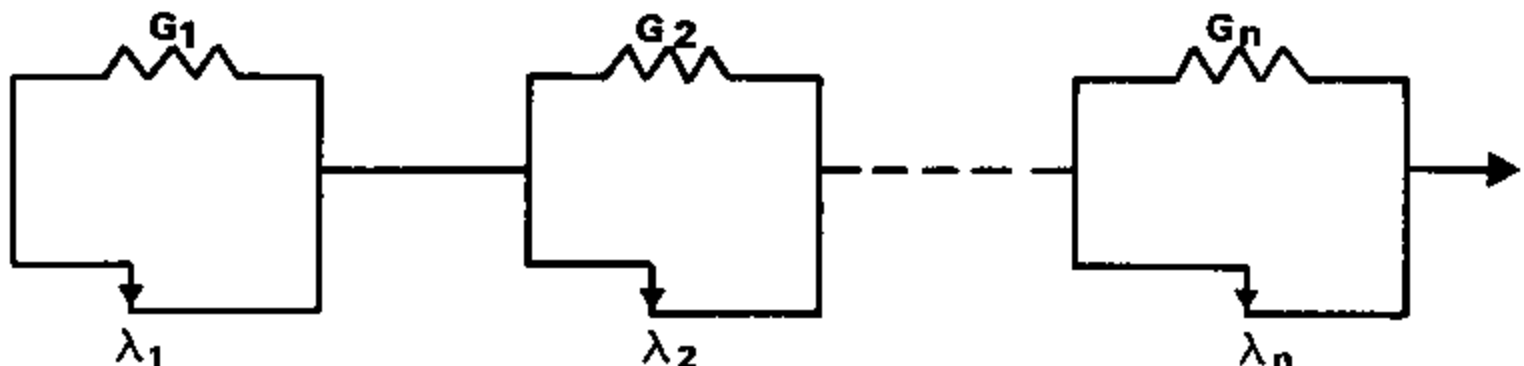
Les résultats expérimentaux disponibles montrent que, de façon générale, les lois de MASING, associées à une fonctionnelle  $J(\gamma)$  ou  $H(\tau)$  appropriée (modèle de RAMBERG-OSGOOD par exemple), permettent de représenter de façon très fidèle le comportement du sol sous chargement harmonique [PECKER-DUPAS, 1981 par exemple]. On peut cependant noter, bien que cela n'ait pas de conséquences pratiques importantes, que les lois de MASING tendent à surévaluer l'amortissement matériel à forte déformation.

Par contre des difficultés surgissent dans l'application de tels modèles à des chargements cycliques quelconques tels que celui de la figure 7 [PYKE, 1979]. Pour pallier ces difficultés, il est nécessaire d'adjoindre aux lois de MASING d'autres lois dont la nature physique n'apparaît pas clairement.

IWAN (1967), à partir de modèles rhéologiques constitués d'assemblages de ressorts et de frotteurs (figure 13), a proposé un modèle qui permet de rendre compte de sollicitations cycliques complexes analogues à celles de la figure 7. Deux formulations ont été proposées exprimant la contrainte en fonction de la déformation ou vice versa. Ce type de modèle reste d'utilisation simple et son implantation dans un programme de calcul numérique est relativement aisée [JOYNER-CHEN, 1975]. La courbe de premier chargement est donnée, pour l'une des formulations, par :

$$\gamma = \frac{1}{G_{\max}} \left[ \tau + \alpha \int_0^{\tau} (\tau - \tau^*) \Phi(\tau^*) d\tau^* \right] \quad (45)$$

Dans cette relation  $\alpha$  est une constante arbitraire. La signification physique de  $\Phi(\tau^*)$  est obtenue en considérant un assemblage (figure 13) comportant un grand nombre d'éléments dont les contraintes ultimes  $\tau_j^*$  ont pour distribution  $\Phi(\tau^*)$ . Le nombre d'éléments ayant une contrainte ultime comprise entre  $\tau^*$  et  $\tau^* + d\tau^*$  est alors  $\Phi(\tau^*) d\tau^*$ . La fonction de distribution  $\Phi(\tau^*)$  peut théoriquement dépendre du nombre de cycles, de la contrainte maximale ou de tout autre variable permettant de rendre compte de l'effet de durcissement (ou de radoucissement) lié aux déformations volumiques (paragraphe 2.2).



**Figure 13** Modèle plastique (Iwan 1967)

Le comportement du sol lors d'un cycle quelconque est complètement décrit en identifiant, et en gardant en mémoire pour chaque inversion de la direction de sollicitation, la fraction d'éléments "bloqués" et la fraction d'éléments "en rupture" dans un sens ou dans l'autre ; il suffit alors d'examiner lors du trajet suivant ce qu'il advient séparément à chacun de ces groupes. Par exemple pour le trajet bc de la figure 7, la formulation devient ( $|\gamma_c| < |\gamma_a|$ ) :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} + \frac{\alpha}{G} \left[ \int_{(\tau_a - \tau_b)/z}^{\tau_a} (\tau_a - \tau^*) \phi(\tau^*) d\tau^* + \int_{(\tau - \tau_b)/z}^{(\tau_a - \tau_b)/z} (\tau_b + \tau^*) \phi(\tau^*) d\tau^* + \int_0^{(\tau - \tau_b)/z} (\tau - \tau^*) \phi(\tau^*) d\tau^* \right] \quad (46)$$

IWAN a montré que pour un cycle fermé, le modèle obéit aux lois de MASING. Tout en gardant une signification physique simple, il permet la description de sollicitations plus complexes sans nécessiter l'adjonction de lois supplémentaires. Sa généralisation aux sollicitations multiaxiales peut être faite dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité avec écrouissage cinématique [IWAN, 1967].

La fonction de distribution  $\phi(\tau)$  peut être déterminée à partir des données expérimentales: courbe de premier chargement ou énergie dissipée lors d'un cycle fermé d'amplitude  $\tau_m$  :

$$\alpha \phi(\tau) = G \frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} \quad (47)$$

ou

$$\alpha \phi(\tau_m) = \frac{G}{4\tau_m} \frac{d^2 W(\tau_m)}{d\tau_m^2} \quad (48)$$

Ainsi en reprenant la formulation de RAMBERG-OSGOOD pour l'introduire dans le modèle de IWAN, on aurait:

$$\Phi(\tau) = \frac{R(R-1)}{\tau_y} \left[ \frac{\tau}{\tau_y} \right]^{R-2} \quad (49)$$

### 5.3.2. Caractérisation d'un modèle élastoplastique. Rappels

La description sommaire d'un modèle élastoplastique donnée ci-dessous ne se veut pas très générale. Pour une étude plus complète de ces modèles, on pourra se reporter à SALENÇON (1974) et SALENÇON-HALPHEN (1980).

Dans ce type de modèles, la déformation totale subie par un élément de matière est décomposée en la somme d'une déformation élastique  $\underline{\epsilon}^e$  et d'une déformation plastique  $\underline{\epsilon}^p$ :

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^p \quad (50)$$

La détermination de la déformation élastique a été traitée précédemment (paragraphe 5.1) et on ne s'attachera dans ce paragraphe qu'à la détermination de la déformation plastique. On a vu, lors de la description des observations expérimentales, que cette déformation n'apparaissait qu'au-delà d'un certain seuil. Les deux problèmes à résoudre pour préciser la valeur de la déformation plastique sont donc :

- i : à quel moment y a-t-il apparition de déformations plastiques ?  
C'est la détermination du critère ou *fonction de charge*.
- ii : quelle est l'amplitude et la direction de cette déformation ?  
C'est la détermination de la *règle d'écoulement*.

A ces deux problèmes s'ajoute celui de l'évolution du critère au cours de l'histoire du chargement. On a vu en effet qu'il y avait, au cours du chargement, modification du domaine d'élasticité du matériau du fait de l'écrouissage. La description complète du modèle nécessite la connaissance de cette *loi d'écrouissage*.

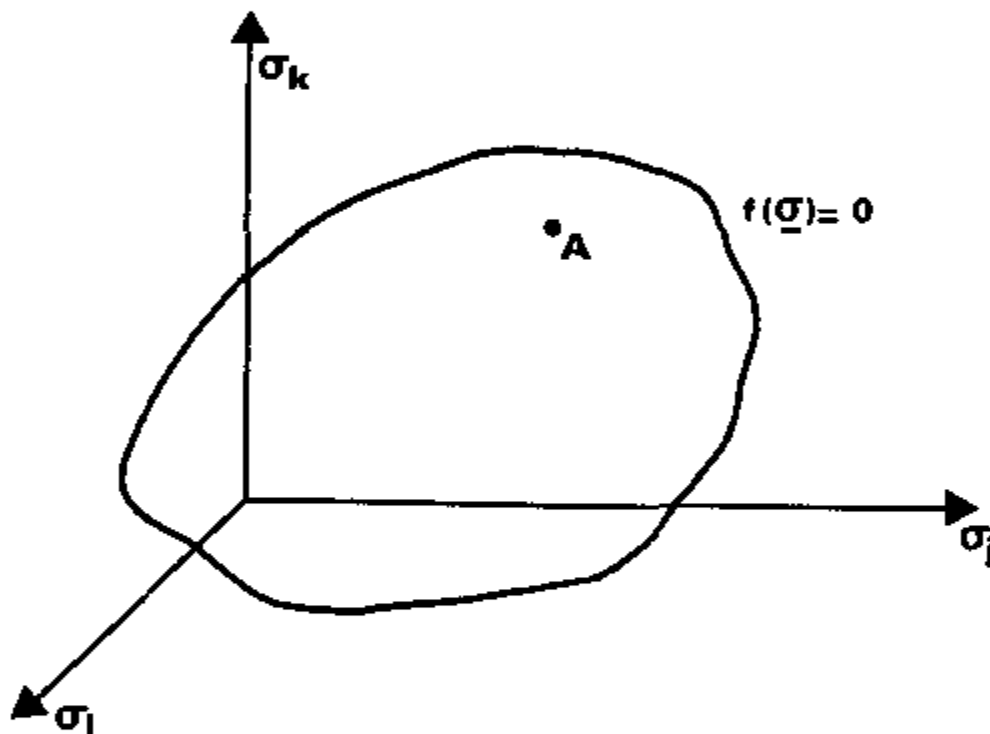
#### 5.3.2.1. Fonction de charge

La fonction de charge, ou critère, est une fonction de l'état des contraintes. Il est commode, et utile, de la représenter comme une surface limitant un domaine convexe dans l'espace des contraintes. Si le point représentatif de l'état des contraintes est situé à l'intérieur du domaine limité par la surface  $f(\underline{\sigma}) < 0$  (point A de la figure 14), les déformations sont élastiques. Lorsque le point atteint la surface, les déformations plastiques apparaissent. Dans le cas d'un matériau écrouissable, la fonction de charge dépend non seulement de l'état des contraintes  $\underline{\sigma}$  mais également de l'histoire antérieure des chargements. On rend compte de cette dépendance à l'aide d'un certain nombre de variables "cachées", appelées paramètres d'écrouissage, qui peuvent être soit des grandeurs scalaires  $q$ , soit des grandeurs tensorielles  $\underline{\alpha}$ . Le critère s'écrit alors sous la forme générale :

$$f(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q) = 0$$

(51)

L'état d'érouissage du matériau n'évolue que lorsqu'il y a évolution de la déformation plastique, c'est-à-dire uniquement lorsque le point représentatif de l'état des contraintes atteint la fonction de charge. Dans le cas où les paramètres d'érouissage sont caractérisés par une grandeur scalaire, le domaine d'élasticité se transforme par homotétie de centre O (figure 15a). On dit qu'il y a érouissage isotrope [TAYLOR-QUINNEY, 1931]. Dans le cas où ils sont caractérisés par un paramètre tensoriel, les frontières successives du domaine d'élasticité se déduisent de la frontière initiale par translation dans l'espace des contraintes (figure 15b). On dit qu'il y a érouissage cinématique [PRAGER, 1958]. Il est également possible d'avoir à la fois érouissage isotrope et érouissage cinématique ; il y a alors érouissage combiné. L'érouissage cinématique présente un effet Bauschinger que ne présente pas l'érouissage isotrope.



**Figure 14** Fonction de charge

Les fonctions de charge les plus couramment employées sont celles de TRESCA ou VON MISES.

Pour le critère de Tresca, le domaine d'élasticité du matériau, supposé isotrope, est limité dans l'espace des contraintes par un prisme hexagonal régulier d'axe (1,1,1). Dans sa forme la plus simple, ce critère s'écrit :

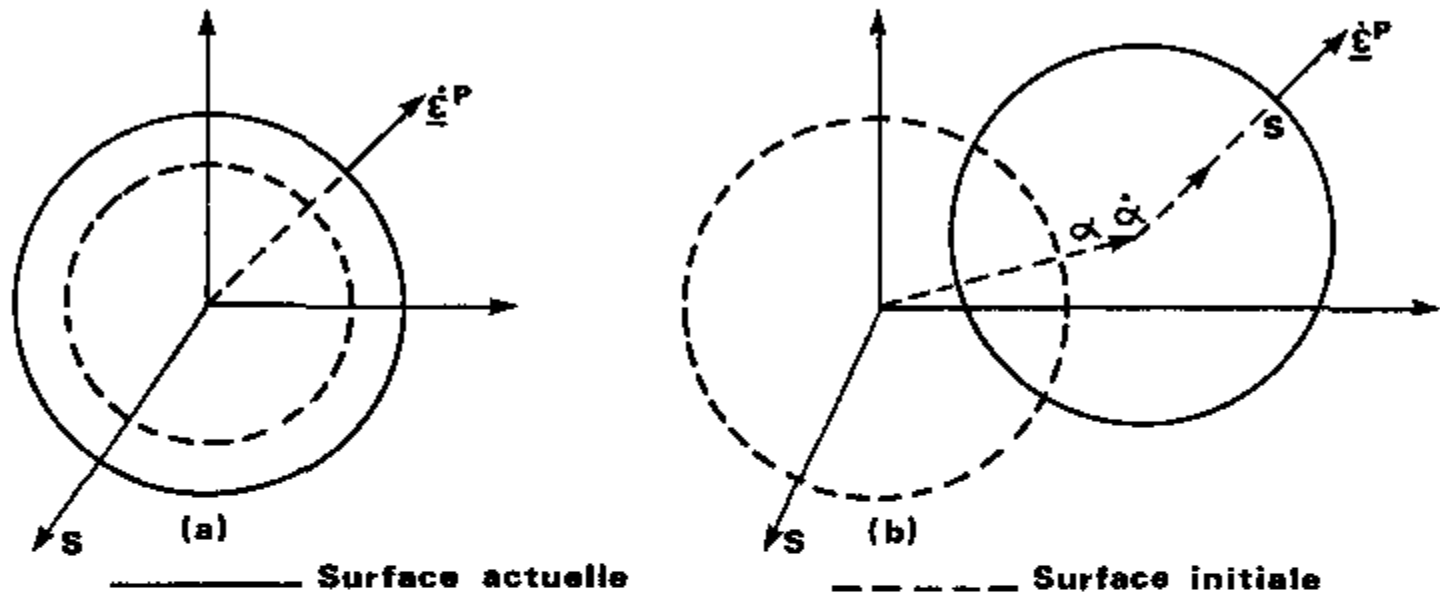
$$f(\underline{\sigma}) = \sup \left[ \sigma_i - \sigma_j - \sigma_0 \right] \quad (52)$$

où  $\sigma_i$  ( $i=1,3$ ) sont les contraintes principales. En faisant dépendre  $\sigma_0$  d'un

paramètre scalaire  $q$  on obtient un écrouissage isotrope. L'écrouissage combiné s'obtient en écrivant la fonction de charge sous la forme :

$$f(\underline{\sigma}) = \sup \left[ (\underline{\sigma} - \underline{\alpha})_i - (\underline{\sigma} - \underline{\alpha})_j - \sigma_0(q) \right] \quad (53)$$

Le critère de Tresca défini ci-dessus est indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes ; il ne dépend que de la partie déviatorique.



**Figure 15 Surfaces de charge**  
 (a) Ecrouissage isotrope  
 (b) Ecrouissage cinématique

Le critère de Von Mises, également indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes, correspond à un domaine d'élasticité cylindrique dans l'espace des contraintes. Pour le matériau isotrope, l'axe du cylindre est la trisectrice (1,1,1). Appelant  $s_{ij}$  les composantes de la partie déviatorique du tenseur des contraintes, la fonction de charge s'écrit dans le cas le plus général de l'écrouissage combiné :

$$f(\underline{\sigma}) = \left[ \frac{1}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ji} - \alpha_{ji}) \right]^{1/2} - k(q) \quad (54)$$

Les fonctions de charge définies par les critères de Tresca ou de Von Mises sont "ouvertes" dans la direction des pressions isotropes ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). Les déformations sous compression isotrope sont purement élastiques, ce qui est en contradiction avec l'expérience. Il est donc nécessaire de limiter, dans la direction des compressions isotropes, la fonction de charge. Cette limitation de la fonction de charge a donné naissance aux "cap-models" du type Cam-Clay ou autres. On pourra se reporter à HARDIN (1978) pour une description de différentes

fonctions de charge de ce type. Un exemple en sera donné au paragraphe 5.4.

Il existe d'autres types de critère, tels que celui de Drucker-Prager ou les critères de type courbe intrinsèque (Mohr-Coulomb), souvent utilisés pour les sols. Ces critères correspondent en fait à des critères de rupture et non à des critères de limite d'élasticité susceptibles d'intervenir dans la formulation d'un comportement élastoplastique avec écrouissage. On pourra se reporter à SALENÇON-HALPHEN (1980) pour une présentation de ces critères.

### 5.3.2.2. Loi d'écoulement

Elle donne la direction et l'amplitude de la déformation plastique  $\underline{\dot{\epsilon}}^P$ . Pour que cette déformation soit non nulle, il faut que le point représentatif de l'état des contraintes soit sur la fonction de charge  $f$ , et que l'incrément de contrainte soit dirigé vers l'extérieur du domaine limité par  $f$ , c'est-à-dire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \geq 0 \end{array} \right. \quad (55)$$

Nota : La formulation précédente suppose que la surface  $f$  est régulière. Dans le cas d'une surface de charge présentant des points singuliers (critère de Tresca), il est possible de donner une présentation plus générale des résultats de ce paragraphe permettant d'inclure les points singuliers [SALENÇON-HALPHEN, 1980].

Dans le cas d'un matériau obéissant au principe du travail maximal [HILL, 1950], on peut montrer que la vitesse de déformation plastique est nécessairement de la forme :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (56)$$

où  $\dot{\lambda}$  est un scalaire positif ou nul qui n'est défini que dans le cas où les relations (55) sont vérifiées. La vitesse de déformation plastique est donc coaxiale à la normale extérieure à la fonction de charge. Il faut noter que, dans la relation (56),  $\underline{\dot{\epsilon}}^P$  ne représente pas la dérivée par rapport au temps, qui n'intervient pas dans la loi de comportement, mais désigne un incrément de déformation que l'on aurait pu noter  $d\underline{\epsilon}^P$ . Il en résulte que  $\dot{\lambda}$  est nécessairement de la forme :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \quad (57)$$

où  $H$  est un scalaire positif appelé module d'écrouissage. La loi d'écoulement est dans ce cas dite associée.

Dans le cas le plus général où le matériau n'obéit pas au principe du travail maximal, on généralise les résultats précédents en écrivant la déformation plastique sous la forme :

$$\underline{\dot{\epsilon}}^P = \frac{1}{H(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q)} \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} ; \underline{\dot{\sigma}} \right) \underline{P}(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q) \quad (58)$$

où  $\underline{P}$  est un tenseur du second ordre donnant la direction de la déformation plastique. On peut interpréter l'équation précédente en considérant que la déformation plastique est, non plus normale à la fonction de charge, mais à une surface, appelée potentiel plastique, dont la normale extérieure est donnée par le tenseur  $\underline{P}$ . La loi d'écoulement est dite non associée.

En combinant et inversant les relations (17), (50) et (58), on montre que la loi de comportement, dans l'hypothèse des petites déformations, s'écrit pour le matériau élastoplastique :

$$\underline{\dot{\sigma}} = \underline{C} : \underline{\dot{\epsilon}} \quad (59)$$

où  $\underline{C}$  est donné par :

$$\underline{C} = \underline{E} - \frac{(\underline{E} : \underline{P}) \left( \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} ; \underline{E} \right)}{H + \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} ; \underline{E} : \underline{P}} \quad (60)$$

$\underline{E}$  est le tenseur d'élasticité, inverse du tenseur  $\underline{A}$  de l'équation (17).

### 5.3.2.3. Loi d'évolution des paramètres d'écrouissage

Une définition complète de la loi de comportement nécessite la connaissance de la loi d'évolution des paramètres d'écrouissage lors de l'apparition des déformations plastiques. Les paramètres d'écrouissage peuvent dépendre d'une grandeur scalaire ou d'une grandeur tensorielle. La déformation plastique  $\underline{\epsilon}^P$  peut tenir lieu de paramètre d'écrouissage scalaire ainsi que les grandeurs suivantes :

$$\underline{\epsilon}^P = \int_0^t \left[ \frac{2}{3} \underline{d}^{P} ; \underline{d}^{P} \right]^{1/2} dt \quad (61a)$$

$$w^P = \int_0^t \underline{\sigma} : \underline{\dot{\epsilon}}^P dt \quad (61b)$$



$$\epsilon_v^P = \int_0^t \epsilon_{ii}^P dt \quad (61c)$$

La première expression constitue une mesure invariante de la déformation de cisaillement plastique totale dans laquelle  $\underline{d}^P$  est la vitesse de déformation déviatorique :  $\underline{d}^P = \underline{\dot{\epsilon}}^P - (1/3) (\underline{\dot{\epsilon}} : \underline{\dot{\epsilon}}) \underline{1}$ . La deuxième expression est le travail plastique dépensé au cours de la sollicitation et la troisième représente la déformation volumique plastique.

Le loi d'écrouissage peut, compte tenu du fait que la vitesse d'écrouissage n'est non nulle qu'à la charge, s'exprimer sous la forme :

$$\underline{\dot{\alpha}} = \dot{\lambda} \underline{b} (\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q) \quad (62a)$$

$$\dot{q} = \dot{\lambda} \phi (\underline{\sigma}, \underline{\alpha}, q) \quad (62b)$$

En particulier, la loi d'écrouissage cinématique de Prager s'écrit :

$$\underline{\dot{\alpha}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (63)$$

et celle de Ziegler :

$$\underline{\dot{\alpha}} = \dot{\lambda} (\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) \quad (64)$$

Les expressions (63) et (64) constituent deux formes possibles de loi d'écrouissage. On se reportera à PREVOST (1978) et MROZ-ZARKA (1979) pour d'autres expressions de loi d'écrouissage. Les équations (51), (56) ou (58) et (62) permettent de déterminer la valeur de la déformation plastique. La valeur de  $\lambda$  est obtenue à l'aide de l'équation de compatibilité :

$$df(\underline{\sigma}, \underline{\alpha}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} = 0 \quad (65)$$

### 5.3.3. Un exemple de modèle élastoplastique pour sollicitations cycliques

On a noté que le modèle de IWAN, présenté pour les sollicitations unidirectionnelles, peut être généralisé dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité

aux sollicitations multiaxiales. Le modèle proposé par PREVOST (1978, 1980) constitue une généralisation de ce modèle. Il s'agit d'un modèle élasto-plastique, avec écrouissage anisotrope, écrit en contraintes effectives. Les paramètres nécessaires à la caractérisation du modèle peuvent être obtenus à partir d'essais de laboratoire standards (compression et extension triaxiale, cisaillement cyclique). Testé pour des sollicitations différentes de celles ayant servi à l'obtenir, il conduit à des prévisions en bon accord avec les résultats expérimentaux. On peut donc considérer que ce modèle répond à tous les critères d'un "bon modèle", énumérés au paragraphe 2.

La fonction de charge est dérivée du critère de Von Mises (éq.54) et s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = \frac{3}{2} (\underline{s} - \underline{\alpha}) : (\underline{s} - \underline{\alpha}) + C^2 (p' - \beta)^2 - k^2 \quad (66)$$

où  $\underline{s}$  représente la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$ ,  $p'$  représente la contrainte moyenne effective = trace ( $\underline{\sigma}$ )/3 ;  $\underline{\alpha}$  et  $\beta$  sont les coordonnées du centre de la surface de charge dans le plan déviatorique des contraintes et le long de l'axe hydrostatique ;  $k$  est la taille de la surface de charge. Une valeur de  $C$  nulle conduit au critère de Von Mises ; une valeur non nulle permet de limiter la surface de charge dans la direction des compressions isotropes. La position initiale et la taille de la surface de charge reflètent l'histoire des sollicitations antérieures du matériau. Si les axes coïncident avec les axes principaux d'anisotropie du matériau  $\alpha_{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . Si l'anisotropie du matériau présente une symétrie de révolution autour d'un axe (cas de la plupart des dépôts géologiques),  $\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\alpha_{11}/2 = -\alpha/3$ . Si  $\alpha = 0$  le matériau est isotrope. Dans le cas d'une anisotropie de révolution, la trace de la surface de charge dans le plan ( $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$ ) est une ellipse.

La loi d'écoulement est du type non associée. Le vecteur des vitesses de déformation plastique est normal à la projection de la surface de charge sur le plan déviatorique. En reprenant les notations de l'équation (58) et en décomposant  $\underline{P}$  et  $\underline{Q} = \partial f / \partial \underline{\sigma}$  en leurs composantes sphériques et déviatoriques :

$$\underline{Q} = \underline{Q}' + \underline{Q}'' \underline{1} \quad (67)$$

$$\underline{P} = \underline{P}' + \underline{P}'' \underline{1} \quad (68)$$

On a :

$$\underline{P}' = \underline{Q}' \quad (69)$$

$$P'' = Q'' + \bar{A} \quad (70)$$

avec

$$\bar{A} = \begin{cases} \frac{J_3'}{\underline{Q}' : \underline{Q}'} a & \text{si } \underline{Q}' : \underline{Q}' \neq 0 \\ 0 & \text{si } \underline{Q}' : \underline{Q}' = 0 \end{cases} \quad (71)$$

$J_3'$  est le troisième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques  $\underline{s}$  et  $a$  est une caractéristique du matériau ; lorsque  $a = 0$ , la loi d'écoulement est associée.

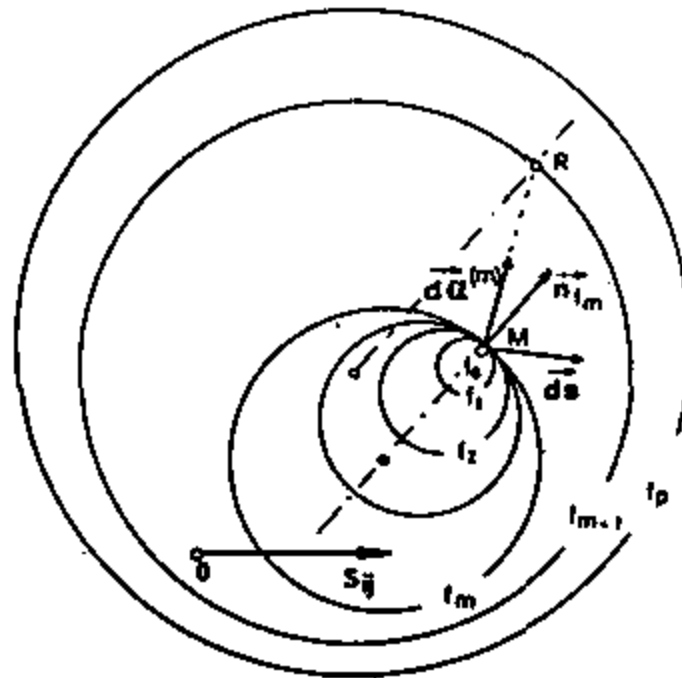
Pour permettre l'ajustement de la loi d'écrouissage aux données expérimentales, le concept de surfaces de charge multiples est utilisé. Dans cette théorie (MROZ, 1967), un champ de modules plastiques est défini dans l'espace des contraintes par un ensemble de surfaces de charges  $f_i$  incluses les unes dans les autres ;  $k^{(1)} < k^{(2)} \dots < k^{(P)}$ . Un module plastique  $H'_i$  constant est attaché à chacune des surfaces de charge :

$$H'_i = h'_i + \frac{\text{trace } \underline{Q}}{(\frac{1}{3} \underline{Q}' : \underline{Q}')^{1/2}} B'_i \quad (72)$$

où  $h'_i$  est le module de cisaillement plastique ( $\underline{Q}' = (1/3)\text{trace } \underline{Q} = 0$ ) et  $h'_i + B'_i$  est le module plastique volumétrique ( $\underline{Q}' = 0$ ).

A l'intérieur de la surface  $f_i$  le comportement du sol est élastique. La surface extérieure  $f_p$  représente la surface limite, également appelée surface de consolidation ou surface volumétrique. Sur cette surface, et sur elle seule, le module plastique  $H'_p$  peut être négatif. Lorsque  $H'_p$  est positif le matériau est stable ; si l'incrément de contrainte  $\underline{\dot{\sigma}}$  est dirigé vers l'extérieur de  $f_p$ , la surface de charge augmente de taille. Si  $H'_p$  est négatif, l'incrément de contrainte est dirigé vers l'intérieur de  $f_p$  et les déformations plastiques provoquent une contraction de  $f_p$ . L'état critique est défini par les points où  $H'_p = 0$  [SCHOFIELD-WROTH, 1978]. Ils séparent les régions de la surface de consolidation où le comportement du sol est contractant ( $H'_p > 0$ ) de celui où il est dilatant.

Lors de l'écoulement plastique, les surfaces de charge changent de taille et de position en étant entraînées par le point représentatif de l'état de contrainte. Lorsque ce point atteint la surface  $f_i$  toutes les surfaces intérieures ( $f_1, \dots, f_{i-1}$ ) ont été translattées et sont tangentes entre elles et à  $f_i$  au point M (figure 16). Si un incrément de contrainte est appliqué tel que  $\underline{Q}' : \underline{\dot{\sigma}} > 0$ , l'incrément de déformation plastique est donné par l'équation (58) où  $H = H'_i$  est le module plastique (éq. 72) attaché à la surface  $f_i$ . Si au contraire l'incrément de contrainte est tel que  $\underline{Q}' : \underline{\dot{\sigma}} < 0$ , le point M quitte  $f_i$  et se déplace à l'intérieur de  $f_i$  ; le comportement est élastique jusqu'à ce que le point M rencontre de nouveau la surface  $f_i$ .



**Figure 16** Modèle à surfaces de charge multiples

La translation des surfaces  $f_1 \dots f_i$  vers la surface  $f_{i+1}$  doit avoir lieu suivant une direction  $\underline{\mu}$  pour que les surfaces de charges ne se chevauchent pas au point de contact. La direction  $\underline{\mu}$  doit être telle que le point de contact R sur  $f_{i+1}$  ait la même normale que le point M sur  $f_i$  (figure 16). La traduction mathématique de cette condition de non chevauchement au cours du déplacement de  $f_i$  [PREVOST, 1978] conduit à une relation de compatibilité entre les évolutions des paramètres d'écroutissage ( $\underline{\alpha}, \beta$ ) de la surface  $f_i$  et de la surface  $f_{i+1}$ . Sur la surface  $f_i$  à laquelle est attachée le point M représentatif de l'état de contraintes actuel, la loi d'écroutissage peut être choisie quelconque. Dans le modèle de Prevost cette loi a pour expression :

$$\dot{\underline{\alpha}}^{(i)} = \lambda \underline{\mu}' \quad (73)$$

$$\dot{\beta}^{(i)} = \dot{\beta}' - \frac{2 k^{(i)} \dot{k}^{(i)} Q''^{(i)}}{Q^{(i)} ; Q^{(i)}} \quad (74)$$

où  $\underline{\mu}'$  est la projection de  $\underline{\mu}$  sur le sous espace déviatorique. La valeur de  $\lambda$  est obtenue à partir de l'équation de compatibilité (paragraphe 5.3.2.3).

Les tailles  $k^{(i)}$  et positions ( $\underline{\alpha}^{(i)}, \beta^{(i)}$ ) des surfaces de charge  $f_i$  sont fonction de la déformation volumique  $\epsilon_V^P$  (éq 61) :

$$y = y_0 \exp(\kappa \epsilon_V^P) \quad (75)$$

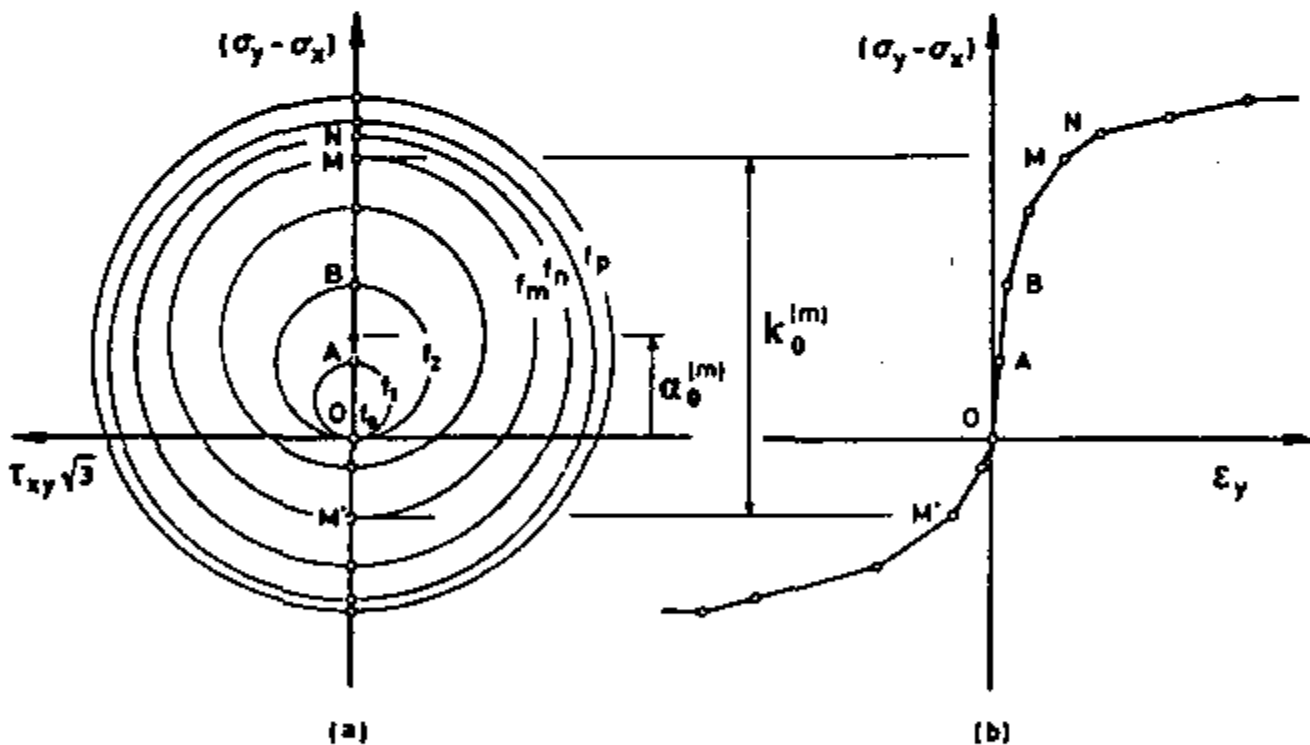
où  $y = k(i), \alpha(i), \beta(i)$  et  $\kappa$  est la pente de la droite critique dans le plan  $(\epsilon_y^p, p')$ . Les modules élastiques et plastiques dépendent de la contrainte moyenne effective  $p'$  :

$$x = x_0 \left[ \frac{p'}{p_0} \right]^n \quad (76)$$

où  $x = B, G, H'_i$ .

Une définition complète du modèle nécessite donc la détermination :

- des paramètres d'élasticité. L'élasticité étant supposée isotrope, ces derniers se réduisent aux modules de cisaillement  $G$  et de compressibilité volumétrique  $B$  ;
- des positions et tailles initiales des surfaces de charge ainsi que des modules de déformation plastique attachés à ces surfaces ;
- de la modification des tailles des surfaces de charge lorsque la déformation plastique évolue (éq. 75).



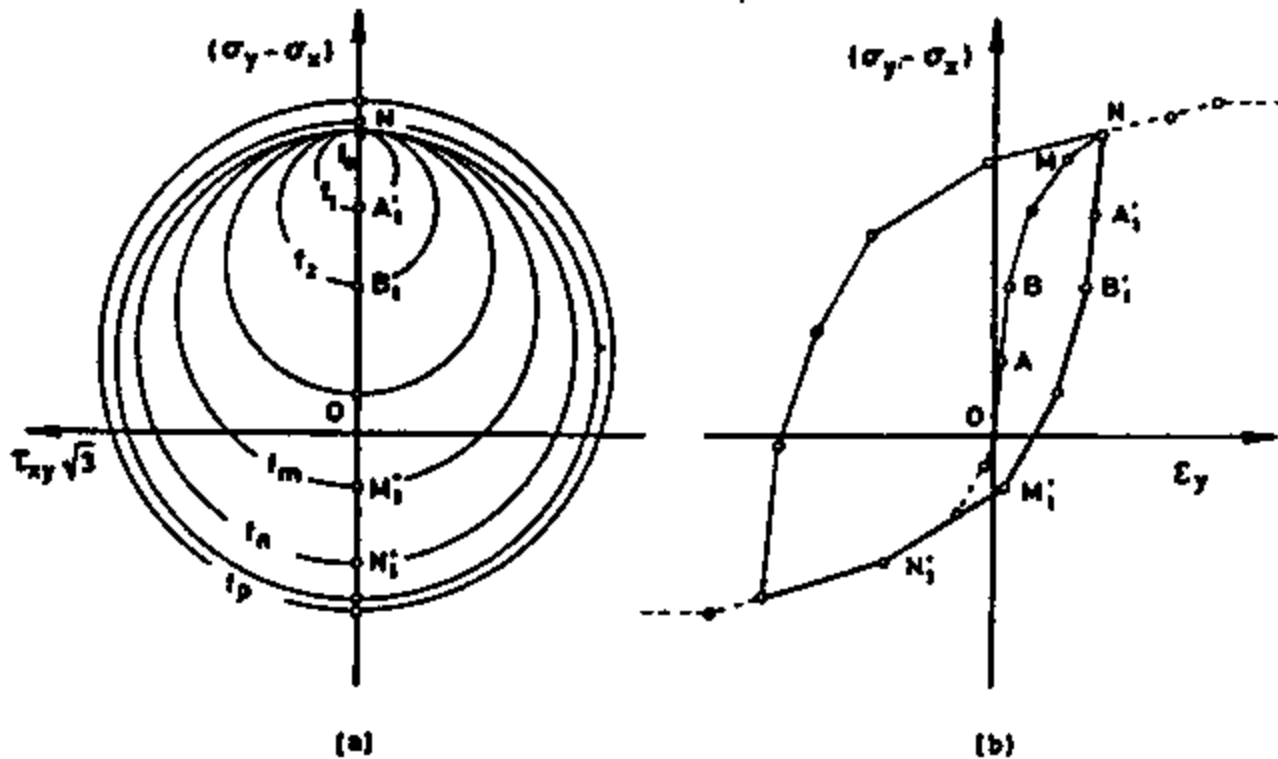
**Figure 17** Essai de compression triaxiale monotone

Pour saisir le mécanisme du modèle, examinons le cas d'un chargement cyclique obtenu par compression-extension axiale d'une éprouvette cylindrique. Si le matériau présente une anisotropie initiale à symétrie de révolution autour de l'axe  $y$ , les surfaces de charge ont pour projection, sur le plan déviatorique, des cercles centrés sur l'axe  $Oy$  (figure 17a). Pour simplifier la présentation, on considérera une surface de charge de Von Mises ( $C=0$  dans l'équation 66) ; le cas

$C \neq 0$  nécessite simplement quelques calculs algébriques supplémentaires (cf. Prevost, 1980). Lors du chargement, le point représentatif de l'état de contrainte se déplace sur l'axe  $\sigma_y$ . La courbe effort-déformation (figure 17b) est linéarisée par morceaux et la position et taille initiales de la surface de charge  $f_m$  sont obtenues à partir des points M et M' correspondant à des modules de déformation (pente du segment)  $H_m$  égaux. Le module de déformation plastique  $H'_m$  attaché à la surface  $f_m$  est alors donné par :

$$\frac{1}{H_m} = \frac{1}{H'_m} + \frac{1}{2G} \quad (77)$$

où  $G$  est le module de cisaillement élastique représenté par la pente à l'origine  $OA$ .



**Figure 18** Essai de chargement cyclique au triaxial

Pour un chargement cyclique, le point représentatif de l'état de contraintes translate les surfaces de charge vers le bas (figure 18). Les variations de contrainte le long des segments  $NA_i$  et  $OA$ ,  $A_i B_i$  et  $AB \dots$  résultent des variations de taille  $k^{(m)}(\epsilon_y)$  des surfaces de charge. Pour un écrouissage purement cinématique on aurait  $NA_i = 2k^{(1)}$ ,  $A_i B_i = 2k^{(2)}$  ... Dans ce dernier cas, le modèle de Prevost est équivalent, pour les chargements unidirectionnels, au modèle de IWAN constitué d'un nombre fini d'éléments rhéologiques rassemblant un ressort et un frotteur ; l'activation de la surface de charge  $f_i$  correspond à la mise en rupture de l'élément  $i$ .

## 6. CONCLUSIONS

S'il est certain que les modèles tels que celui présenté ci-dessus représentent un progrès fondamental dans l'appréhension du comportement des sols sous chargement cyclique, leur mise en oeuvre pour les applications pratiques reste extrêmement limitée. Pour ces dernières, le modèle viscoélastique linéaire équivalent, voire le modèle de Iwan pour les applications unidimensionnelles, sont les plus couramment employés. La description du comportement non linéaire hystérétique du sol à l'aide du modèle viscoélastique linéaire équivalent relève essentiellement de l'approche expérimentale évoquée au paragraphe 2. La description à l'aide d'un modèle élastoplastique fait par contre intervenir la notion de loi de comportement.

Il ne faut pas perdre de vue que des modèles permettant de décrire le comportement des sols peuvent être construits en dehors du cadre de la théorie de l'élastoplasticité. C'est le cas du modèle endochronique de BAZANT-KRIZEK (1976) ou du modèle énergétique de NEMAT-NASSER-SHOKOOH (1977). Ces modèles ne présentent cependant pas les mêmes interprétations physiques simples que les modèles élastoplastiques. Par ailleurs, le modèle de Prevost ne constitue pas le seul modèle de comportement de sol construit dans le cadre de la théorie de l'élastoplasticité (HARDIN, 1978 ; SANDLER-DIMAGGIO, 1976 ; DAFALIAS et al, 1980). Son originalité et sa grande souplesse résident dans l'utilisation de surfaces de charge multiples par opposition aux modèles à deux surfaces ; noyau élastique et surface de consolidation.