



## I. Introduction

La rhéologie est une étude du comportement d'un matériau en fonction du temps. C'est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière. En d'autres termes la mesure caractérise la comparaison aux modèles pour pouvoir décrire un comportement et prédire le niveau de déformation pour une contrainte donnée.

Un matériau est le résultat d'une synthèse entre la mise en œuvre, la microstructure, les propriétés intrinsèques et la performance comme le montre la figure.1.

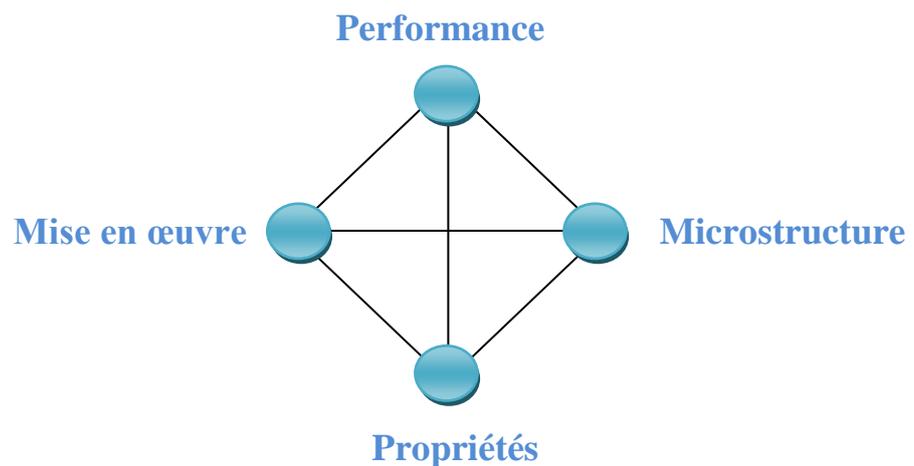


Figure. 1. Résultat d'une synthèse d'un matériau

## II. L'importance des propriétés mécaniques d'un matériau

Les propriétés mécaniques des matériaux sont essentielles pour la fabrication des structures et des ouvrages en génie civil plus particulièrement en géotechnique.

## III. Les principaux types de comportement mécanique

Les propriétés mécaniques sont caractérisées par des essais simples et faciles dans les laboratoires : ces essais sont normalisés et les essais rhéologiques courants sont

- a) L'écoulement (contrainte / vitesse constante)  
Une courbe d'écoulement est un graphe de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement. Les différents types sont : l'épaississant, le Newtonien, le fluidifiant, le plastique ainsi que le Bingham.
- b) Fluage statique et relaxation de contrainte  
La contrainte est exprimée en fonction du temps de part son fluage, sa recouvrance et sa déformation.
- c) L'oscillation (dynamique) est représentée par la contrainte de cisaillement et la déformation de cisaillement à 100% élastique en contrainte et déformation de phase et à 100% visqueux en déphasage 90° entre contrainte et déformation.

I.



## Introduction

La rhéologie est une étude du comportement d'un matériau en fonction du temps. C'est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière. En d'autres termes la mesure caractérise la comparaison aux modèles pour pouvoir décrire un comportement et prédire le niveau de déformation pour une contrainte donnée.

Un matériau est le résultat d'une synthèse entre la mise en œuvre, la microstructure, les propriétés intrinsèques et la performance comme le montre la figure.1.

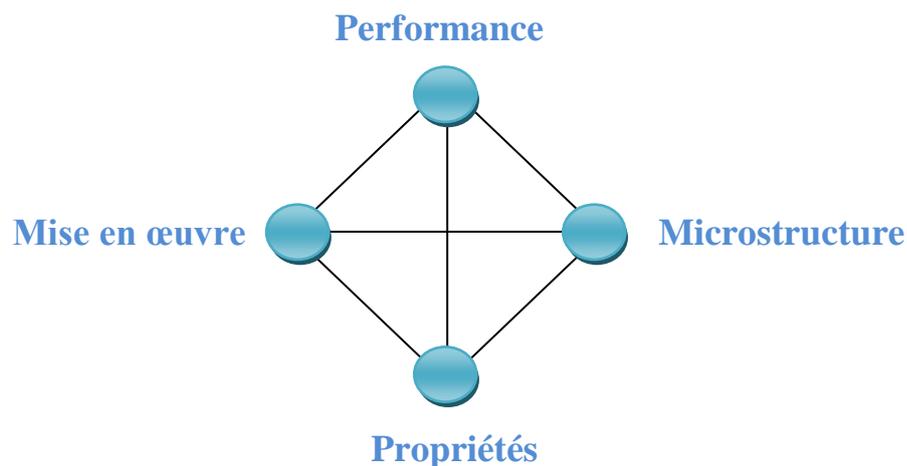


Figure. 1. Résultat d'une synthèse d'un matériau

## II. L'importance des propriétés mécaniques d'un matériau

Les propriétés mécaniques des matériaux sont essentielles pour la fabrication des structures et des ouvrages en génie civil plus particulièrement en géotechnique.

## III. Les principaux types de comportement mécanique

Les propriétés mécaniques sont caractérisées par des essais simples et faciles dans les laboratoires : ces essais sont normalisés et les essais rhéologiques courants sont

- a) L'écoulement (contrainte / vitesse constante)  
Une courbe d'écoulement est un graphe de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement. Les différents types sont : l'épaississant, le Newtonien, le fluidifiant, le plastique ainsi que le Bingham.
- b) Fluage statique et relaxation de contrainte  
La contrainte est exprimée en fonction du temps de part son fluage, sa recouvrance et sa déformation.
- c) L'oscillation (dynamique) est représentée par la contrainte de cisaillement et la déformation de cisaillement à 100% élastique en contrainte et déformation de phase et à 100% visqueux en déphasage  $90^\circ$  entre contrainte et déformation.



Par ailleurs, les lois de comportement sont tensorielles et leur détermination complète exige bien d'autres essais.

Par exemple, un essai de traction ou de compression est susceptible de mettre en évidence trois stades comme le montre la figure.2. Le premier stade du comportement est élastique **OA**, aucune déformation résiduelle n'existant plus après décharge (c'est-à-dire aux petites déformations, il existe une réversibilité totale). Un deuxième stade de déformation plastique **AB**, caractérisé par une déformation résiduelle irréversible après décharge, l'ensemble du comportement étant complètement indépendant du temps de la vitesse de chargement notamment. Enfin, un troisième stade **BC** de rupture, il convient de noter que dans bien des cas, le temps intervient, la vitesse de sollicitation venant modifier la courbe, un arrêt à contrainte constante étant accompagné par une déformation progressive appelé fluage ; un arrêt à déformation constante accompagnée d'une relaxation de la contrainte. Les matériaux ne présentent pas tous les deux premiers stades et la rupture finale **C** peut intervenir plus au moins tôt et notamment avant le point **B**

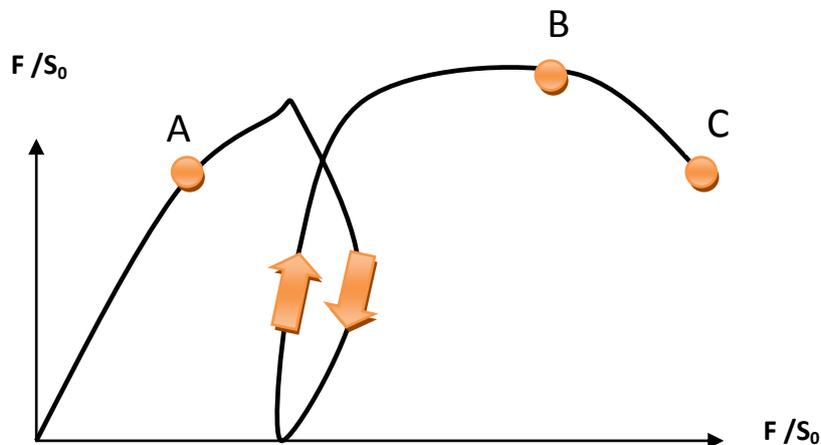
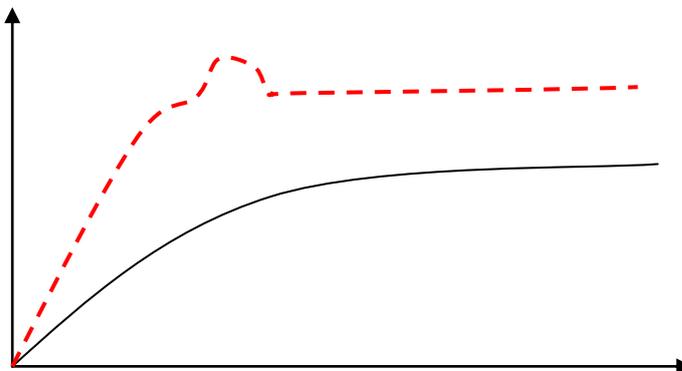


Figure. 2 Schéma d'une courbe de traction.

La réponse en compression est plus généralement dans un état de contrainte autre que la traction simple. Elle peut être très différente de celle obtenue en traction.





#### IV. Les modes de ruines

Les modes de ruine d'une structure dépendent des sollicitations mécaniques, thermiques etc ... qu'elle subit par défauts et qu'elle est susceptible de contenir ainsi que des propriétés du matériau. Ils comprennent les phénomènes qui sont des instabilités résultant d'une diminution d'énergie sous faible perturbation des conditions aux limites.

Les phénomènes de rupture proviennent d'un endommagement du matériau, c'est-à-dire de l'apparition de nouvelles surfaces à l'échelle des atomes comme le montre la figure. 3,(passage de la macrostructure à la microstructure) ces endommagements appartiennent à trois types élémentaires : les clivages, les glissements avec formation de marches superficielles, les cavitations par diffusion de lacunes. Ce dernier mécanisme ne peut intervenir qu'à des températures suffisantes ; il est capital en fluage à haute température.

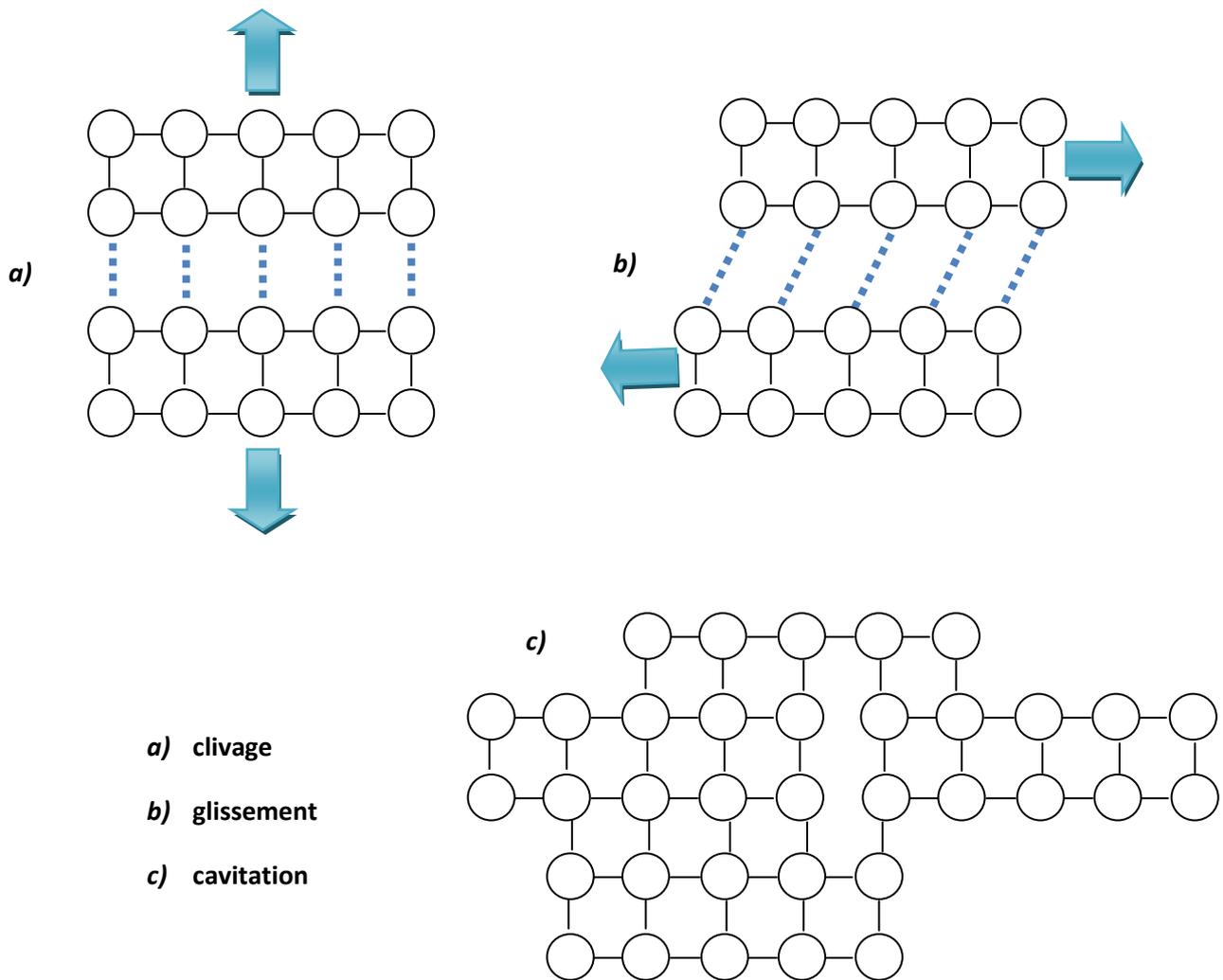


Figure. 3 Les endommagements à l'échelle microstructure.



## V. Généralités sur les lois de comportement

### V.1. Modélisation

La modélisation est une étape nécessaire et importante dans le génie civil car elle permet de connaître le calcul prévisionnel de la réponse du comportement mécanique des structures et de favoriser le développement de nouveaux matériaux ainsi que leur amélioration, en précisant le lien entre caractéristiques microstructurales et comportement macroscopique ; elle vise l'établissement de lois de comportement réalistes et fiables.

Deux grands types de modélisation sont envisageables :

- L'une est de nature phénoménologique et inductive : elle procède de l'expérimentation macroscopique et d'identification paramétrique dans un cadre de formulation thermodynamique.
- La seconde varie est bien sur, plus complexe, moins établi et moins pratique, mais en revanche plus riche et mieux fondée physiquement.

#### V.1.1. Lois de comportement – grandes classe de comportement

Les seules équations générales (conservation de la masse, la quantité de mouvement, de l'énergie.....) ne suffisent pas pour déterminer les champs de contraintes ou déplacement dans une structure : il faut y ajouter les lois physiques reliant, pour le matériau constitutif de la structure, les variables dynamiques (contrainte...) et géométriques et cinématiques (déformations, vitesse de déformation.....).

Donc il faut résoudre ce problème en recourant à des géométries très simples et des sollicitations particulières permettant de déduire les variables mécaniques locales des grandeurs globales quel que soit le comportement.

On peut distinguer sur la forme des relations (charge / déformation). Trois grandes classes de comportement :

- L'élasticité** : Elle se manifeste par un retrait, au moins partiel de la déformation lorsque l'on supprime la charge. On parle d'élasticité parfois lorsque la déformation est entièrement réversible et qu'il existe une relation biunivoque  $f(Q, q)=0$  entre les paramètres de charge et de déformation.....
- La viscosité** : Elle se manifeste par une sensibilité de la réponse à une sollicitation donnée à la vitesse de sollicitation. La résistance visqueuse à l'écoulement.
- La plasticité** : Elle se manifeste par l'apparition de déformation irréversible (permanentes) lorsque la charge est suffisante (au delà d'un seuil de plasticité). Généralement, ce seuil évolue avec l'écoulement plastique : C'est le phénomène d'écrouissage, s'il reste constant, on parle de plasticité parfaite. Lorsque de plus la déformation avant écoulement plastique est négligée, il s'agit d'un comportement rigide parfaitement plastique.

Ces trois comportements élémentaires peuvent se combiner de plusieurs façons :

**Viscoélasticité, élastoplasticité, viscoplasticité**, voire même **élastoviscoplasticité** on peut les analyser qualitativement par des assemblages en série ou parallèle des modèles rhéologique élémentaire précédents



- d) L'endommagement :** C'est l'altération progressive des propriétés mécaniques qui accompagne, généralement pour d'assez grandes déformations ou sous sollicitations cycliques.

## VI. Anisotropie

Les comportements mécaniques sont généralement anisotropes (dépendance de la réponse vis-à-vis de la direction de sollicitation). Propriété découlant de la constitution anisotrope du matériau.

L'origine physique de l'anisotropie du comportement mécanique d'un matériau ne peut se déterminer sans l'analyse de l'hétérogénéité de sa microstructure. Si l'on décompose celle-ci en élément homogènes, l'anisotropie macroscopique résulte d'une *anisotropie élémentaire*, qui est celle des éléments homogènes de la microstructure, et d'une *anisotropie d'organisation*, attachée à l'agencement spatial de ces éléments homogènes, ainsi que la composition de ces deux formes d'anisotropie.

L'anisotropie élémentaire est déterminée par l'anisotropie des mécanismes de déformation, elle-même liée à l'anisotropie de la structure interne des éléments (mais non entièrement déterminée par elle : l'élasticité d'un cristal-cubique- de tungstène ou celle d'un cristal-hexagonal- de magnésium sont pratiquement isotropes, du fait des propriétés de leurs liaisons chimiques et de leur énergie de cohésion) :

- e) **Elasticité :** L'anisotropie des liaisons interatomiques, dépendant des structures atomiques, moléculaires, électroniques.....se traduit par celle des molécules et des complaisances d'élasticité ( $C_{ijkl}, S_{ijkl}$ ) : ainsi le module de Young d'un cristal dépend de l'orientation de l'axe de traction par rapport réseau cristallin.
- f) **Viscosité :** Anisotropie des mouvements réversible d'impuretés ( atomes de C dans un alliage fer – carbone....) ou des défauts d'empilement cristallin, du glissement relatif des chaînes polymériques.... se traduisant dans celle des viscosité  $\eta_{ijkl}$ .
- g) **Plasticité :** Anisotropie du glissement cristallographique, ne pouvant se réaliser que sur certains plans et/ou certaines directions cristallographiquement déterminées ; anisotropie de l'écroutissage à travers celle des interactions entre famille de défauts ou entre systèmes de glissement, anisotropie de maclage ou de la diffusion...

L'anisotropie d'organisation résulte de l'hétérogénéité de la microstructure. On peut en distinguer de diverses sortes :

- Anisotropie de forme (ou morphologique) : influence de la forme des grains cristallins, des inclusions, des cavités, des domaines de phase... dont l'écart à l'isotropie (forme sphérique) détermine une contribution spécifique à l'anisotropie résultante ;
- Anisotropie d'orientation (n'existe que dans la mesure où les éléments ont eux-mêmes un comportement anisotrope ou une forme non sphérique) : distribution non isotrope



des orientations cristallographique (textures), orientations préférentielles d'inclusions, de pores, de microfissures....

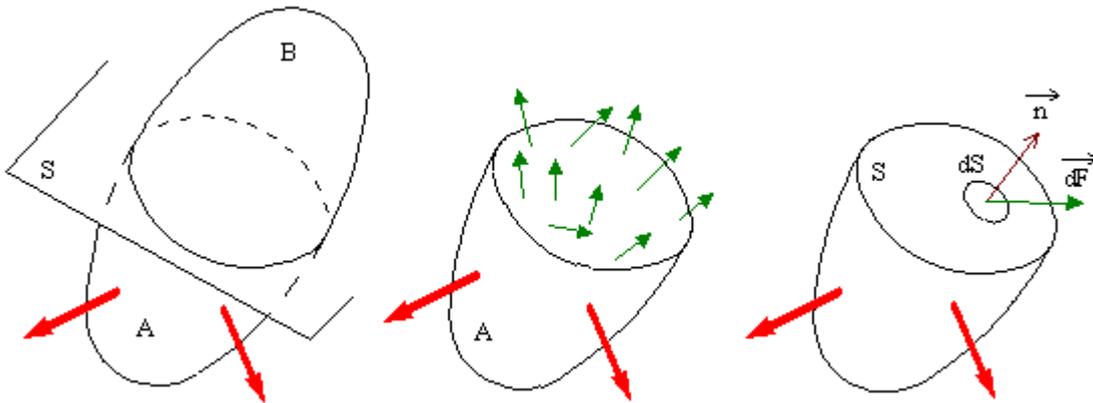
- Anisotropie de répartition : liée à la distribution spatiales des éléments de la microstructure (bande s'une phase dans l'autre, structures lamellaires, composites orientée, alignement ou ségrégation d'inclusions...)

Il faut y ajouter des mécanismes spécifiques de déformation' liée à l'organisation relative des éléments : glissement au joint de grains, décohésion aux interfaces, délaminage de stratifiés...

## VII. Contraintes autour d'un point

### VII.1 Définitions

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une coupure du solide, par une surface S, deux parties A et B.



La partie A, par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures sur la coupure.

Soit un point M de S. et  $\vec{n}$  un élément infinitésimal de la surface S, entourant de M et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire perpendiculaire en M à S et dirigé vers la partie A

Nous appellerons facette  $\vec{n}$  en M cet élément de surface.

Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur cette facette, on appelle contrainte en M et dans la direction  $\vec{n}$ , la quantité :

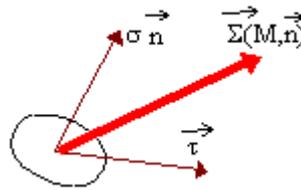
$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$$

On a :  $\vec{\Sigma}(M, -\vec{n}) = -\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  (égalité de l'action et de la réaction)

Le vecteur de contrainte peut être décomposé en sa composante suivant et sa projection sur la facette :



$$\vec{\Sigma}(M, -\vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$



On a donc :

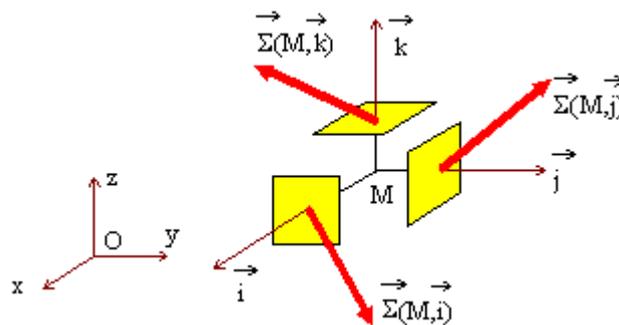
$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{\Sigma}(M, \vec{n})$$

$\sigma$  : est la contrainte normale et  $\vec{\tau}$  est le vecteur de cisaillement.

## VII.2. Etat de contrainte en un point

### a) Définition

Les vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associés au repère orthonormé  $\{O, xyz\}$  définissant en un point M du solide trois facettes perpendiculaires entre elles.



Les contraintes qui s'exercent sur chacune de ces faces sont définies par leurs composantes dans le repère  $\{O, xyz\}$  :

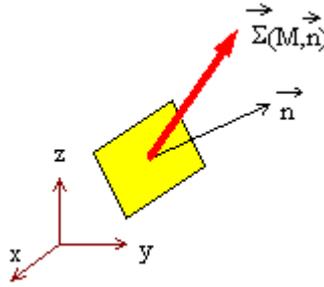
Facette  $\vec{i}$  (ou facette x) : 
$$\vec{\Sigma}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}$$

Facette  $\vec{j}$  (ou facette y) : 
$$\vec{\Sigma}(M, \vec{j}) = \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k}$$

Facette  $\vec{k}$  (ou facette z) : 
$$\vec{\Sigma}(M, \vec{k}) = \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$$

### b) Contrainte sur une facette quelconque : tenseur des contraintes

Considérons la facette  $\vec{n}$  en M. soit a, b et c les cosinus directeurs de  $\vec{n}$



La contrainte sur la facette  $\vec{n}$  est égale à :

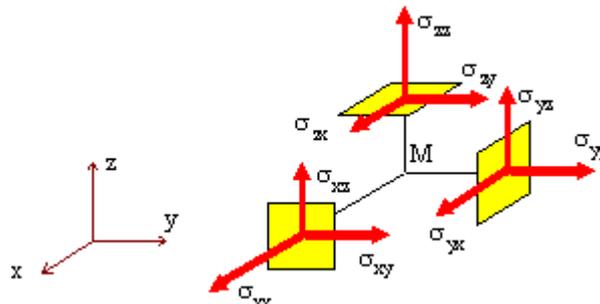
$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = a\vec{\Sigma}(M, \vec{i}) + b\vec{\Sigma}(M, \vec{j}) + c\vec{\Sigma}(M, \vec{k}) = \Sigma(M) \vec{n}$$

Sous forme matricielle :

$$[\Sigma(M, \vec{n})] = [\Sigma(M)][n]$$

Où  $M$ , est appelé tenseur des contraintes en  $M$ , et a pour expression :

$$[\Sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \vec{\Sigma}(M, \vec{i}) \\ \rightarrow \vec{\Sigma}(M, \vec{j}) \\ \rightarrow \vec{\Sigma}(M, \vec{k}) \end{matrix}$$



Composantes du tenseur des contraintes.

### c) Réciprocité des contraintes tangentielles

On a les relations suivantes :  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ , et  $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ .

### d) Etat de contrainte en un point

La distribution des contraintes autour d'un point  $M$  est entièrement définie par la donnée :

-du repère  $\{M, xyz\}$ .



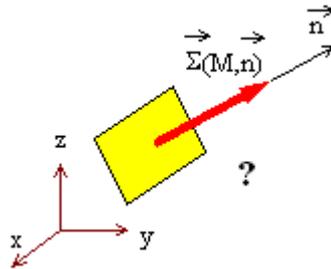
-des six quantités :  $(\sigma_{xx}\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yy}\sigma_{yz}\sigma_{zz})$

Nous appellerons cet ensemble état de contrainte en M.

**e) Contrainte normale dans une direction quelconque**

$$\sigma = \vec{n} \vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = [\vec{n}]^T [\Sigma(M)] [\vec{n}] = a^2\sigma_{xx} + b^2\sigma_{yy} + c^2\sigma_{zz} + 2ab\sigma_{xy} + 2ac\sigma_{xz} + 2bc\sigma_{yz}$$

**VII.3. Forces et contraintes principales**



Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur de contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  satisfait à la relation :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = [\Sigma(M)]\vec{n} = \sigma \vec{n}$$

Soit sous forme matricielle :

$$[\Sigma(M)] [\vec{n}] = \sigma [\vec{n}]$$

$\sigma$  est alors valeur propre du tenseur des contraintes et  $\vec{n}$  est le vecteur propre associé.

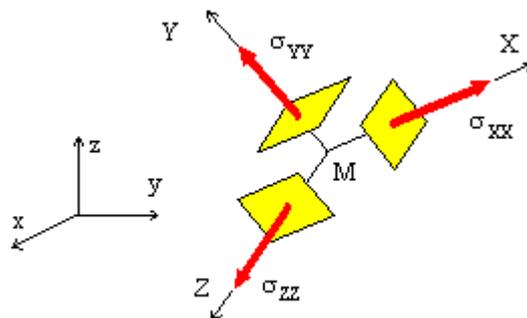
$\Sigma(M)$  est une matrice symétrique à coefficient réels. Elle a trois valeurs propres réelles. Si les trois valeurs sont distinctes, les vecteurs propres associés sont perpendiculaires entre eux.

Il existe donc en M un repère orthonormé  $\{M, X Y Z\}$  tel que sur les facettes X, Y et Z le vecteur cisaillement est nul.

Soit  $(\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz})$  les contraintes normales associées.

Dans le repère  $\{M, X Y Z\}$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\Sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$





Les facette X, Y et Z sont appelées faces principales.

Les quantités  $(\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz})$  sont les contraintes principales.

Dans le repère principale  $\{M, X Y Z\}$ , le vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  a pour expression :

$$\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \begin{bmatrix} \Sigma_X \\ \Sigma_Y \\ \Sigma_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sigma_{xx} \\ b \sigma_{yy} \\ c \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Où a, b et c sont des composantes de  $\vec{n}$

De la formule précédente et de la relation  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , on déduit :

$$\frac{\Sigma_X^2}{\sigma_{xx}^2} + \frac{\Sigma_Y^2}{\sigma_{yy}^2} + \frac{\Sigma_Z^2}{\sigma_{zz}^2} = 1$$

Quand  $\vec{n}$  varie, l'extrémité du vecteur  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  se déplace sur l'ellipsoïde d'axes  $(\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz})$  appelé ellipsoïde de Lamé.

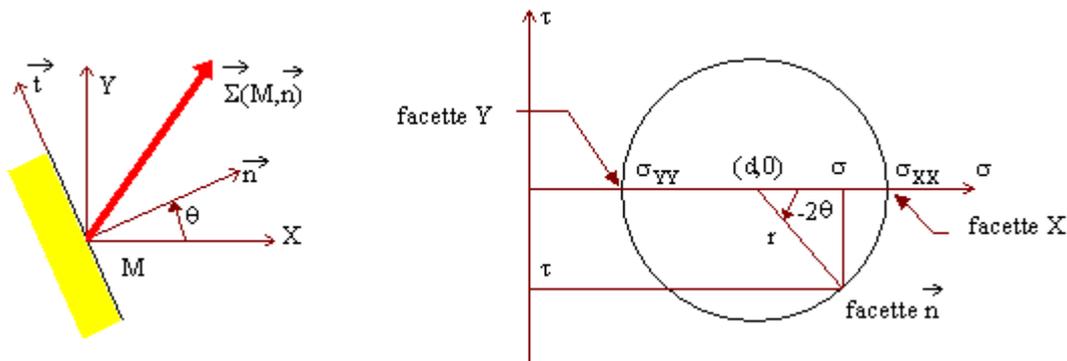
#### VII.4. Cercle de Mohr des contraintes

En M, prenons comme repère, les axes principaux X, Y et Z. considérons la famille de facette passant par la direction Z. Soit  $\vec{n} (a, b, 0)$ , une de ces facettes. Sur cette facette, le vecteur contrainte est égale à :

$$\begin{bmatrix} a \sigma_{xx} \\ b \sigma_{yy} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec  $a^2 + b^2 = 1$

Le vecteur de contrainte  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n})$  est donc situé dans le plan  $\{M, X Y\}$ .



Soit  $\vec{t}$  le vecteur unitaire, situé dans le plan  $\{m, x y\}$  et faisant avec  $\vec{n}$  un angle égale à  $\pi/2$ .

Projetons le vecteur de contrainte sur les axes  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  :  $\vec{\Sigma}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$



Si nous appelons  $\theta$  l'angle que fait  $\vec{n}$  avec la direction principale X,  $\sigma$  et  $\tau$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau = r \sin(-2\theta) \end{cases}$$

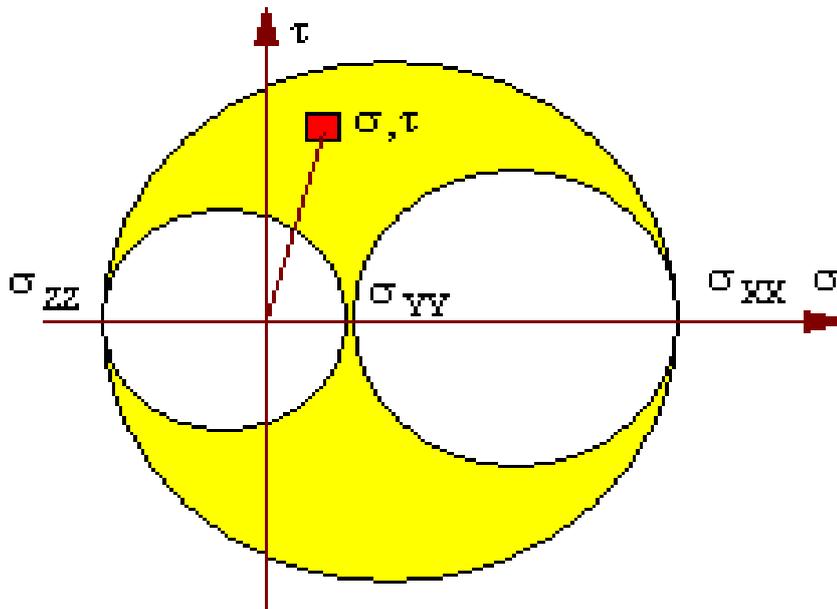
Avec  $d = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  et  $r = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$

A chaque facette  $\vec{n}$ , nous pouvons donc associer un point m dans le repère  $(\sigma, \tau)$  orthonormé. Lorsque  $\theta$  varie, ce point décrit le rayon  $r$  et centre  $(0, d)$ .

**Remarque :** si la facette  $\vec{n}$  fait un angle  $\theta$  avec la facette X, son point représentatif sur le cercle de Mohr fait un angle  $-2\theta$  avec le point représentatif de la facette X.

Les trois directions principales nous permettent de construire trois cercles.

Le point représentatif  $(\sigma, \tau = \|\vec{\tau}\|)$  d'une facette quelconque en M reste à l'intérieur du domaine limité par les trois cercles.



Cercle de Mohr en M



**1- Etat de contraintes particulier**

Etats de contrainte	Tenseur de contraintes $[\Sigma(M)]$	Cercle de Mohr des contraintes
Etat de contrainte uni axial : traction ou compression	$\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
Etat de cisaillement simple	<p>Dans le repère <math>\{M, xyz\}</math> :</p> $\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>Dans le repère <math>\{M, XYZ\}</math> :</p> $\begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
Etat de contrainte isotrope	<p>Quelque soit le repère :</p> $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$	
Etat de contrainte plan	<p>Dans le repère <math>\{M, xyz\}</math> :</p> $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	<p>L'axe z est donc direction principale et la contrainte principale correspondante est nulle.</p>



## 2- Equations d'équilibre

### 2.1 Forces de volume

Soit  $\vec{f}$ , de composantes  $(f_x, f_y, f_z)$ , la force par unité de volume appliquée au point M du solide. Les équations d'équilibre en M s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

### 2.2. Forces de surface

Considérons en M, une facette  $\vec{n}$  appartenant à la frontière d'un solide. Soit a, b et c les cosinus directeurs de  $\vec{n}$ . Soit  $\vec{p}$  de composantes  $(p_x, p_y, p_z)$  la force par unité de surface, qui s'exerce sur la facette.

Les équations d'équilibres en M s'écrivent  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{p}$  soit :

$$\begin{cases} a\sigma_{xx} + b\sigma_{xy} + c\sigma_{xz} = p_x \\ a\sigma_{yx} + b\sigma_{yy} + c\sigma_{yz} = p_y \\ a\sigma_{zx} + b\sigma_{zy} + c\sigma_{zz} = p_z \end{cases}$$

## VIII. Déformation autour d'un point

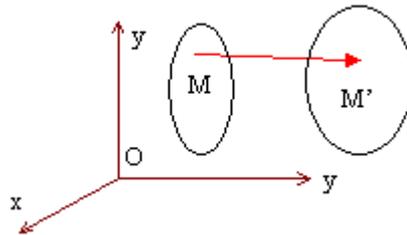
Sous l'action des forces extérieures, le solide se déforme. Il en résulte pour tous les points du solide un déplacement que nous supposons petit.

### Définitions

Soit  $\{O, x, y, z\}$  un repère orthonormé fixe.

#### 1. Vecteur déplacement

Considérons un point M du solide. Au cours de la mise en charge, le point M vient en M'.

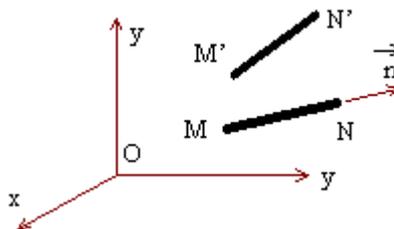


On appelle vecteur déplacement du point M le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  de composantes :

$$\begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$$

## 2. Allongement unitaire

Considérons deux points M et N du solide voisins l'un de l'autre. Au cours de la mise en charge, le point M vient en M' et le point N en N'. Soit  $\vec{n}$  le vecteur unitaire lié à la direction MN.



On appelle allongement unitaire en M et dans la direction  $\vec{n}$ , la quantité :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = \lim_{N \rightarrow M} \frac{M'N' - MN}{MN}$$

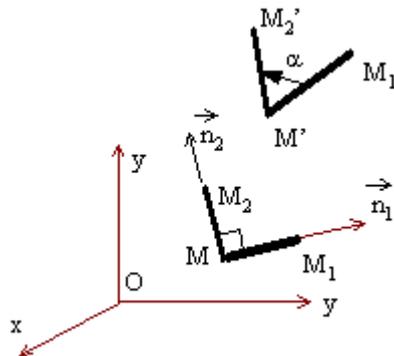
**Remarque :** si  $x, y$  et  $z$  sont les composantes du vecteur  $\overrightarrow{MM'}$ , les composantes du vecteur  $\overrightarrow{M'N'}$  sont égales à :



$$\begin{bmatrix} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \\ \Delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \Delta z \\ \Delta z + \frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z \end{bmatrix}$$

### 3. Glissement ou déformation angulaire

Soit deux points  $M_1$  et  $M_2$  voisins de  $M$  ( $MM_1 = MM_2 = d$ ) et tels que les directions  $\overrightarrow{MM_1}$  et  $\overrightarrow{MM_2}$  soient orthogonales. Appelons  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  les vecteurs unitaires associés aux directions  $\overrightarrow{MM_1}$  et  $\overrightarrow{MM_2}$ .



Au cours de la mise en charge les points  $M$ ,  $M_1$  et  $M_2$  viennent respectivement en  $M'$ ,  $M_1'$  et  $M_2'$ . Soit l'angle que font entre eux les deux vecteurs  $\overrightarrow{MM_1'}$  et  $\overrightarrow{MM_2'}$ .

On appelle glissement en  $M$  et dans les directions  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$ , la quantité :

$$\varepsilon(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \lim_{d \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

## IX. Etat de déformation en un point

### 1. Préliminaires

Soit en  $M$ , les vecteurs unitaires  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  associé au repère orthonormé  $\{O, x, y, z\}$ . Nous noterons :



$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon(M, \vec{i}), \varepsilon_{yy} = \varepsilon(M, \vec{j}), \varepsilon_{zz} = \varepsilon(M, \vec{k}) \\ \gamma_{xy} = \gamma(M, \vec{i}, \vec{j}), \gamma_{yz} = \gamma(M, \vec{j}, \vec{k}), \gamma_{xz} = \gamma(M, \vec{i}, \vec{k}) \end{cases}$$

Ces grandeurs sont égales à :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

## 2. Etat de déformation en un point

La distribution des déformations autour d'un point M est entièrement définie par la donnée des six quantités :  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$

Nous appellerons cet ensemble état de déformation en M.

## 3. Allongement unitaire dans une direction quelconque

Soit en M un vecteur unitaire  $\vec{n}_1$  de cosinus directeur a, b et c. L'allongement unitaire en M dans la direction  $\vec{n}_1$  est égal à :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) = a^2\varepsilon_{xx} + b^2\varepsilon_{yy} + c^2\varepsilon_{zz} + ab\gamma_{xy} + ac\gamma_{xz} + bc\gamma_{yz} = [\mathbf{n}]^T[\mathbf{E}(M)][\mathbf{n}]$$

Où le tenseur des déformations  $[\mathbf{E}(M)]$  est égal à :

$$[\mathbf{E}(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

## X. Faces principales

En M, dans le repère principal {M, X Y Z}, on a :  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0$

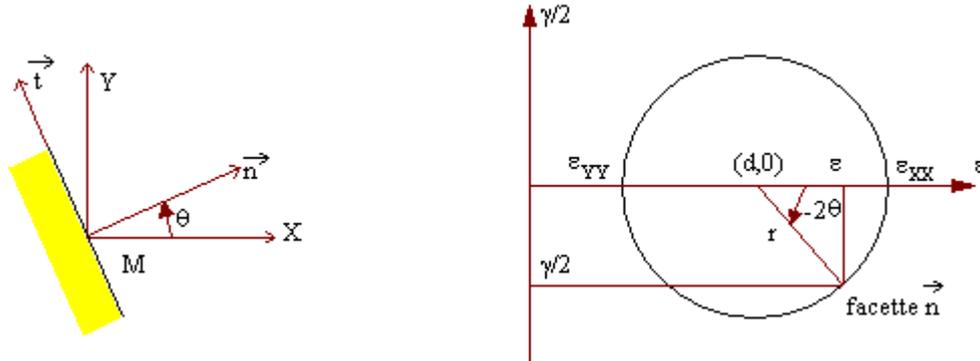
Les quantités  $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz})$  sont appelées **déformations principales**.

### X.1. Cercles de Mohr des déformations

En M, prenons comme repère, les axes principaux X, Y et Z. considérons la famille de facette passant par la direction Z. Soit  $\vec{n}(a, b, 0)$ , une facette appartenant à cette



famille et  $\vec{t}$  le vecteur unitaire, situé dans le plan  $\{M, X, Y\}$  et faisant avec  $\vec{n}$  un angle égal à  $\pi/2$ .



A chaque facette  $\vec{n}$ , nous pouvons associer deux quantités  $\varepsilon$  et  $\gamma$  définies par :

$$\varepsilon(M, \vec{n}) \text{ et } \gamma(M, \vec{n}, \vec{t})$$

Si nous appelons  $\theta$  l'angle que fait  $\vec{n}$  avec la direction principale X,  $\varepsilon$  et  $\gamma$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon(\theta) = d + r \cos(-2\theta) \\ \gamma/2 = r \sin(-2\theta) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } d = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \text{ et } r = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})$$

A chaque facette  $\vec{n}$ , nous pouvons associer un point  $(\varepsilon, \gamma/2)$  dans un repère orthonormé. Lorsque  $\theta$  varie, ce point décrit le cercle de rayon  $r$  et centre  $(0, d)$ .

## XI. Lois de comportement

### I. Bases expérimentales

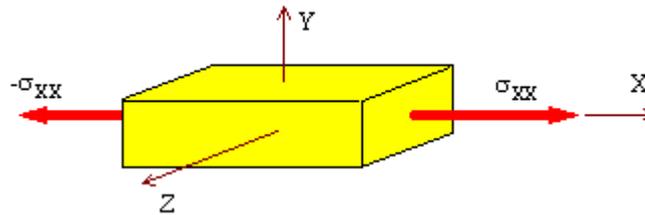
Considérons une barre de section droite constante et rectangulaire. L'axe X est la ligne moyenne de la barre. Soit O un point quelconque du solide. La barre, constituée d'un matériau homogène et isotrope est soumise suivant l'axe X à un effort de traction uniformément réparti à chaque extrémité.

Le repère orthonormé  $\{O, X, Y, Z\}$  est le repère principal en O.

Faisons croître la force de traction à partir de 0. L'expérience montre que :



## 2. Loi de Hooke



On a :

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx}$$

Où E est le module d'élasticité longitudinal (module d' Young) du matériau.

## 3. Coefficient de Poisson

L'allongement de la barre suivant la direction x, s'accompagne d'une contraction suivant les directions y et z :

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{xx}$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau ( $0 < \nu < 0.5$ ).

### a) Notations

L'état de contrainte en un point sera représenté par un vecteur à six composantes  $[\sigma]$  défini par :

$$[\sigma]^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}]$$

L'état de déformation en un point sera représenté par un vecteur à six composantes  $[\varepsilon]$  défini par :

$$[\varepsilon]^T = [\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \varepsilon_{xy} \varepsilon_{xz} \varepsilon_{yz}]$$

## XI.I Loi de comportement

Le vecteur des contraintes  $[\sigma]$  et le vecteur des déformations  $[\varepsilon]$  sont liés par la relation :

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] + [\sigma_{TH}]$$

La matrice [D] des coefficients élastiques est égale à :



$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \lambda = \frac{Ev}{(1+v)+(1-2v)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+v)} \end{cases}$$

Où E et  $\nu$  sont respectivement le **module d'Young** et le **coefficient de Poisson** du matériau.

$\lambda$  Et  $\mu$  sont les **coefficients de Lamé**.

**Remarque :** Le module de glissement G est égal à  $\mu$ .

$[\sigma_{TH}]$  Représente les contraintes d'origine thermique et est égal à :

$$[\sigma_{TH}] = -\frac{E\alpha(T - T_0)}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique et  $T_0$  la température de référence.

### a) Déformation volumique

Soit V, un élément de volume infiniment petit entourant le point M. Au cours de la déformation V augmente de dV. On appelle déformation volumique la quantité :

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \frac{(1 - 2\nu)}{E}$$



### **b) Anisotropie**

Les propriétés physiques des monocristaux de certains matériaux varient selon la direction cristallographique dans laquelle les mesures sont prises. Par exemple, le module d'élasticité, la dilatabilité, la conduction électrique, l'indice de réfraction, etc., peuvent prendre des valeurs différentes si la direction est (100) ou (111). Le caractère directionnel des propriétés, ou anisotropie, est associé à la variation de l'espacement atomique ou ionique en fonction de la direction cristallographique. Les matériaux dont les propriétés mesurées sont indépendantes de la direction de la mesure sont dits isotropes. La portée et l'ampleur des effets anisotropes dans les matériaux cristallins sont fonction de la symétrie de la structure cristalline :

Le degré de l'anisotropie augmente à mesure que décroît la symétrie structurale. Ainsi, les structures tricliniques sont fortement anisotropes, en général.

### **c) Comportement**

Terme (souvent synonyme de tenue) désignant de façon générale et principalement les réactions mécaniques (contraintes, déplacements, déformations) d'un matériau ou d'un corps placé dans des conditions ou un environnement particulier, ou bien soumis à des sollicitations déterminées (par exemple : comportement en fatigue mécanique ou thermique, comportement aux chocs thermique, etc.).

### **d) Loi de comportement**

Les lois de comportement sont les lois mathématiques liant les contraintes et les déformations internes d'un matériau et permettant de quantifier son comportement. Dans le domaine élastique des matériaux les lois de comportements sont linéaires ou relativement simple d'emploi pour les calculs. Elles s'écrivent alors sous forme matricielle. Dans le cas des matériaux homogènes isotropes élastiques, les lois de comportement dépendent de deux paramètres ou coefficients indépendants (coefficient de Lamé, habituellement noté  $\lambda$  et  $\mu$ ). Dans le cas des matériaux homogènes anisotropes élastiques, ces mêmes lois dépendent au plus de 21 paramètres ou coefficients indépendants (rigidités et /ou souplesses). Ces paramètres ou coefficients définissant les lois de comportements des matériaux sont déduits des constantes physiques classiques mesurables sur éprouvettes ou échantillons, telles que module d'Young ou de Colomb, nombre de Poisson, coefficient de Chentsov ou de Lekhnitsk. Les matériaux composites



## II. Comportement élastique

### II.1 Déformation élastique

En physique, l'**élasticité** est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La **déformation élastique** est une **déformation réversible**. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus.

Les raisons physiques du comportement élastique peuvent être quelque peu différentes d'un matériau à un autre. Pour les métaux, le treillis atomique change de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système retourne à son état original où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et autres polymères l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère lorsque les forces sont appliquées.

L'élasticité **linéaire** concerne les *petites* déformations proportionnelles à la sollicitation. Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion.

Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient **non linéaire** pour certains matériaux. Pour d'autres, la fracture ou le fluage interviennent.

La notion d'élasticité n'est pas spécifique à la mécanique des milieux continus et en physique, d'une manière générale, on parle d'interaction élastique lorsqu'il y a la conservation d'une grandeur. Par exemple, dans un choc élastique, les objets s'échangent leur énergie cinétique, mais il n'y a pas de perte par frottement ou par déformation résiduelle (de fait, la déformation est élastique). Dans le cas de l'interaction d'un atome avec un rayonnement électromagnétique, on parle de diffusion élastique lorsque le rayonnement conserve la même longueur d'onde (diffusion Rayleigh).

La déformation élastique est un domaine important de la mécanique des milieux continus (MMC) et de la thermodynamique (compression des gaz).

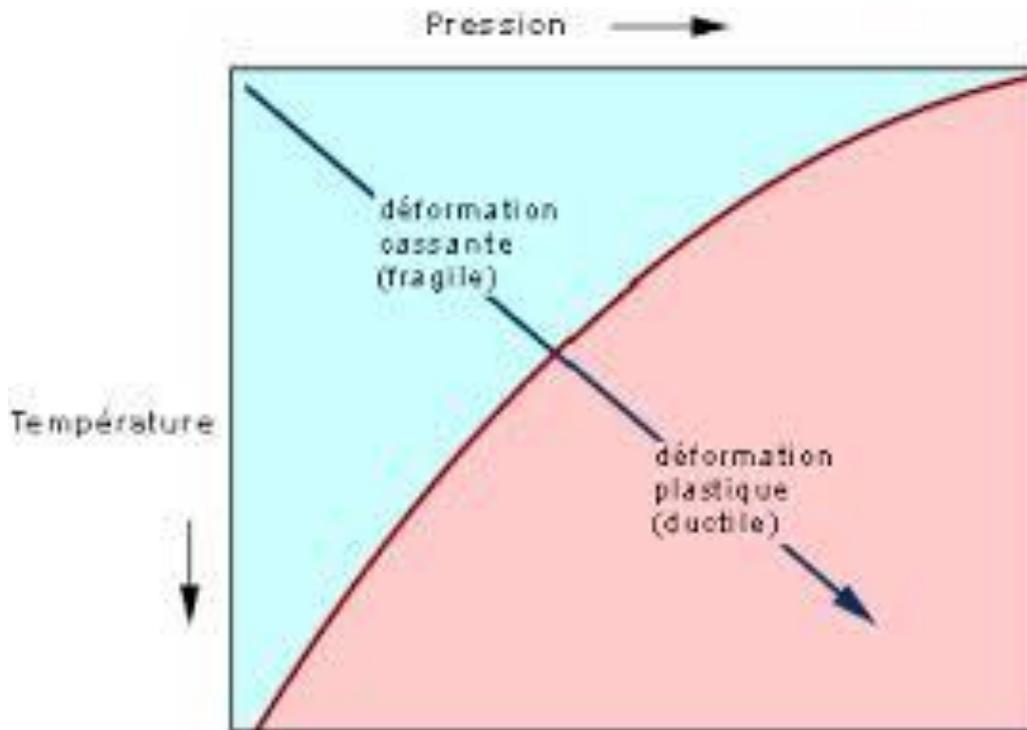
### II.2 Limite d'élasticité

La déformation élastique intervient pour les faibles sollicitations. Si l'on augmente les sollicitations, on change le mode de déformation :

- rupture (endommagement) pour les matériaux dits « fragiles » :
- déformation plastique (irréversible et non linéaire) puis rupture pour les matériaux dits « ductiles » ;



- éventuellement fluage pour les matériaux ductiles si la vitesse de déformation est lente ou la température élevée.



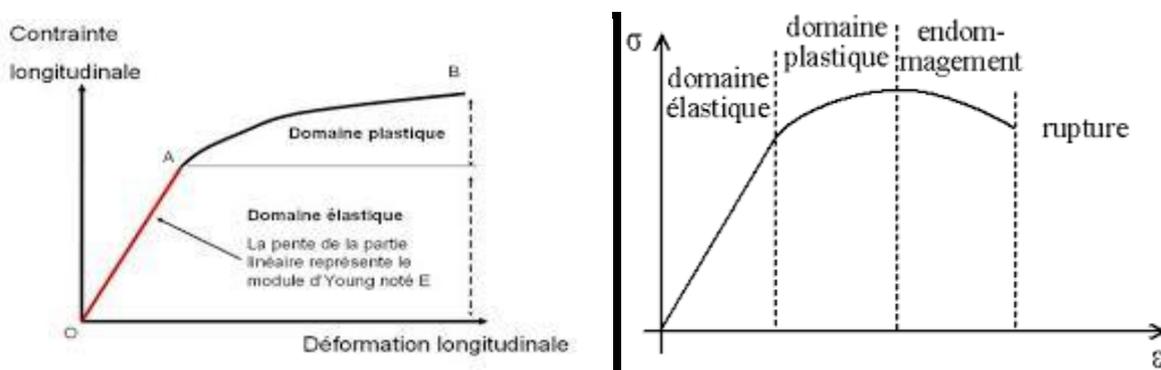
La contrainte délimitant le domaine élastique des autres domaines est appelée **limite d'élasticité** (*yield strength*).

Critère de von Mises

### Coefficient de Poisson

#### Contrainte et déformation :

On utilise deux modèles de déformation élastique : la **traction-compression** et le **cisaillement**. La flexion peut se modéliser selon les cas comme une traction-compression ou comme un cisaillement, la torsion se modélise comme un cisaillement.





## II.3 Traction-compression uniaxiale

Prenons le cas de la traction ou de la compression d'une pièce cylindrique ou parallélépipédique selon son axe. La traction-compression correspond à des forces s'exerçant perpendiculairement aux sections de ces pièces ; elle est dite uniaxiale car les côtés de la pièce ne sont pas contraints, toutes les forces sont sur un même axe.

### II.3.1 Allongement dans l'axe

En prenant des pièces de différentes dimensions, on remarque que pour une force donnée :

- l'allongement  $\Delta l$  est proportionnel à la longueur initiale  $l_0$  du cylindre ; ceci se conçoit bien : si l'on met deux ressorts identiques bout-à-bout, le premier ressort transmet intégralement la force au second ressort, les deux s'allongent donc de la même quantité, donc si avec un ressort on a un allongement  $\Delta l_1$ , avec deux ressorts l'allongement total est  $2\Delta l_1$  ;
- l'allongement  $\Delta l$  est inversement proportionnel à la section du cylindre ; on conçoit également aisément que si l'on met deux ressorts identiques en parallèle, chaque ressort exercera la moitié de la force de traction, l'allongement final sera donc  $\Delta l/2$  ; si l'on double la section de la pièce, c'est comme si l'on mettait deux pièces côte-à-côte.

Si l'on veut caractériser le matériau en faisant abstraction de la forme de la pièce et de ses dimensions, on définit donc :

- l'**allongement relatif** ou **déformation** (*strain*), noté  $\varepsilon$

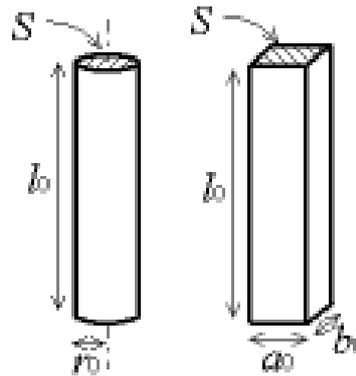
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

$\varepsilon$  est sans dimension, on l'exprime parfois en % ( $100 \times \Delta l / l_0$ )

- la **contrainte** (*stress*), notée  $\sigma$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$\sigma$  est homogène à une pression ; du fait des valeurs énormes mises en jeu, on l'exprime généralement en mégapascal (MPa).



La loi élastique s'écrit alors :

$$\sigma = E \varepsilon$$

C'est la **loi de Hooke** ;  $E$  est le **module de Young** (*Young's modulus*), qui est une caractéristique du matériau.  $E$  est également homogène à une pression, du fait des valeurs très élevées qu'il prend, il est généralement exprimé en gigapascal (GPa).

On voit aisément que la densité d'énergie de déformation  $w$ , c'est-à-dire l'énergie élastique divisée par le volume de la pièce, vaut :

$$w = 1/2 \cdot \sigma \cdot \varepsilon = 1/2 \cdot E \varepsilon^2$$

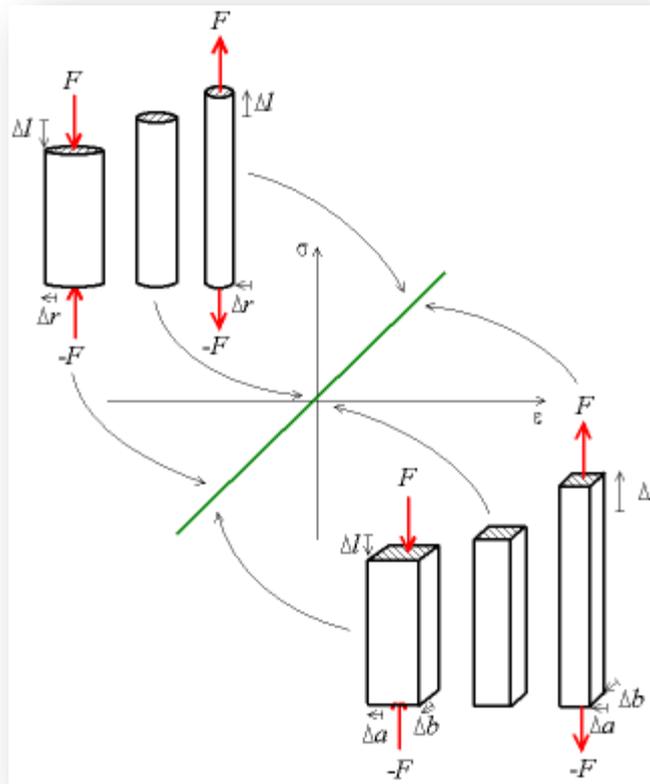
Lorsque l'on exerce une traction ou une compression, on constate que la largeur de la pièce varie également, à l'inverse de l'allongement. La variation relative de dimension est proportionnelle à l'allongement relatif  $\varepsilon$ , le coefficient de proportionnalité s'appelle le **coefficient de Poisson** ou **rapport de Poisson** (*Poisson's ratio*). Il est noté  $\nu$  et est sans unité :

- pour un cylindre :

$$\frac{\Delta r}{r_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \cdot \varepsilon$$

- pour un parallélépipède rectangle :

$$\frac{\Delta a}{a_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \cdot \varepsilon$$



$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = -\nu \cdot \varepsilon$$

Considérons le volume de la pièce. Pour une pièce cylindrique, on a :

$$V = l \times \pi r^2$$

Pour des petites variations, on a donc :

$$\Delta V/V_0 = \Delta l/l_0 + 2 \cdot \Delta r/r_0$$

(développement limité au premier ordre), soit :

$$\Delta V/V_0 = (1 - 2\nu) \cdot \varepsilon$$

De même pour une pièce parallélépipédique, on a :

$$V = l \times a \times b$$

$$\Delta V/V_0 = \Delta l/l_0 + \Delta a/a_0 + \Delta b/b_0$$

donc de même :

$$\Delta V/V_0 = (1 - 2\nu) \cdot \varepsilon$$



On voit donc que :

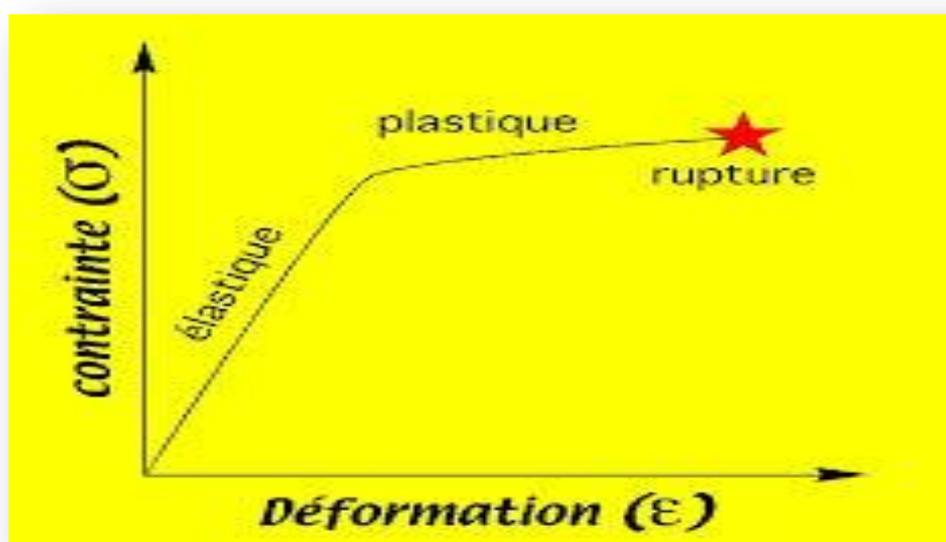
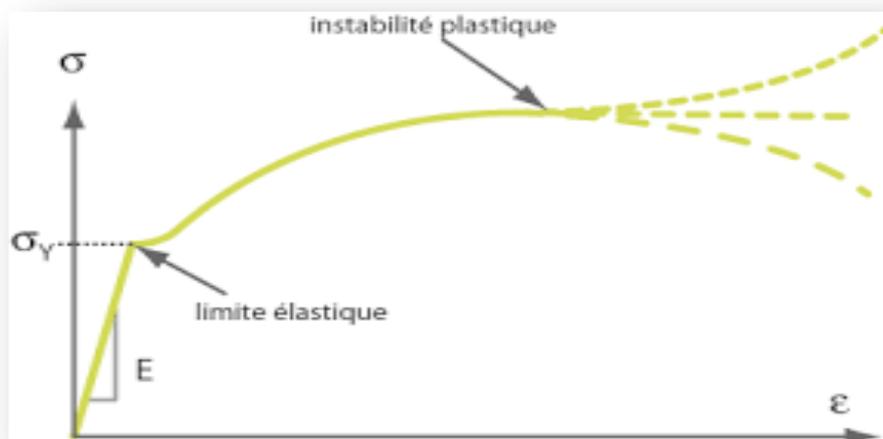
si  $\nu > 0,5$  le volume diminue en traction et augmente en compression (cas exceptionnel) ;

si  $\nu < 0,5$  le volume augmente en traction et diminue en compression (comportement le plus général).

Pour un acier,  $\nu$  vaut environ 0,3, on est donc dans le second cas.

Si maintenant on maintient la largeur constante — par exemple on effectue une compression mais la pièce est dans une gaine ultra-rigide et ne peut pas s'étendre —, alors, la déformation n'est plus uniaxiale, la gaine exerce une pression (une contrainte) sur les côtés de la pièce. Il faut alors utiliser un autre coefficient élastique, noté  $C_{11}$ , différent de  $E$  :

$$\sigma = C_{11} \cdot \varepsilon$$



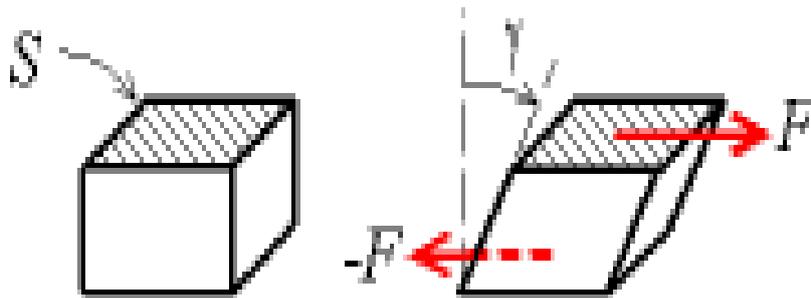


### II.3.2 Cisaillement

Si l'on considère un parallélépipède rectangle, le cisaillement est une variation de l'angle, qui n'est plus droit. Cela correspond à des forces s'exerçant parallèlement à la face.

On définit de même la contrainte comme étant la force divisée par la surface sur laquelle elle s'exerce ; cette contrainte est appelée **cission** (toujours exprimée en MPa) et est notée  $\tau$ .

La déformation est l'écart à l'angle droit  $\gamma$ , appelé **cisaillement**, exprimé en radian.



On a toujours une loi linéaire :

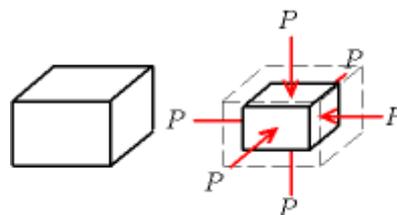
$$\tau = G \cdot \gamma$$

où  $G$  est le **module de cisaillement** ou **module de Coulomb**, généralement exprimé en GPa. Dans le cas d'un milieu isotrope, le module de cisaillement est lié au module d'Young et au coefficient de Poisson par la relation suivante :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### II.3.3 Compression isostatique

Une compression isostatique est l'exercice d'une pression isotrope, c'est-à-dire qui a la même valeur dans toutes les directions. Si l'on désigne par  $V$  le volume de l'objet, la variation de volume relative est proportionnelle à la variation de la pression  $P$  :



$$\Delta P = -K \cdot \frac{\Delta V}{V_0}$$



où  $K$  est le **module d'élasticité à la compression isostatique**<sup>1</sup> (*bulk modulus* en anglais). On remarque que  $K$  est l'inverse du coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  défini en thermodynamique par :

$$\frac{1}{K} = \chi_T = -\frac{1}{V} \cdot \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$K$  est aussi homogène à une pression et est généralement exprimé en gigapascal (GPa). On a :

matériau	$K$
acier	160 GPa
eau	2,2 GPa
air	0,000 1 GPa <sup>2</sup>

Dans le cas d'un milieu isotrope, le module d'élasticité isostatique  $K$ , le module de Young  $E$  et le module de cisaillement  $G$  sont liés par la relation suivante :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}$$

#### a) Cas des grandes déformations

La définition que l'on a prise de  $\varepsilon$  dépend du trajet suivi. Considérons une déformation finale de  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Si l'on fait la déformation en une étape, la longueur finale est

$$l = l_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

Si par contre on déforme d'abord de  $\varepsilon_1$ , on a une première longueur

$$l = l_0(1 + \varepsilon_1)$$

qui devient la longueur initiale pour l'étape suivante, donc lorsque l'on rajoute une déformation  $\varepsilon_2$ , on obtient

$$l = l_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$$

En développant cette dernière formule, on voit que les deux sont équivalentes si

$$\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \ll \varepsilon_2$$

soit, de manière synthétique, si

$$\varepsilon^2 \ll \varepsilon, \text{ soit } \varepsilon \ll 1 ;$$



C'est l'hypothèse des **petites déformations**.

Pour les grandes déformations, on peut utiliser une autre définition de  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right)$$

on voit que si  $l$  et  $l_0$  sont proches, le développement limité de cette formule redonne la définition de  $\varepsilon$  des petites déformations

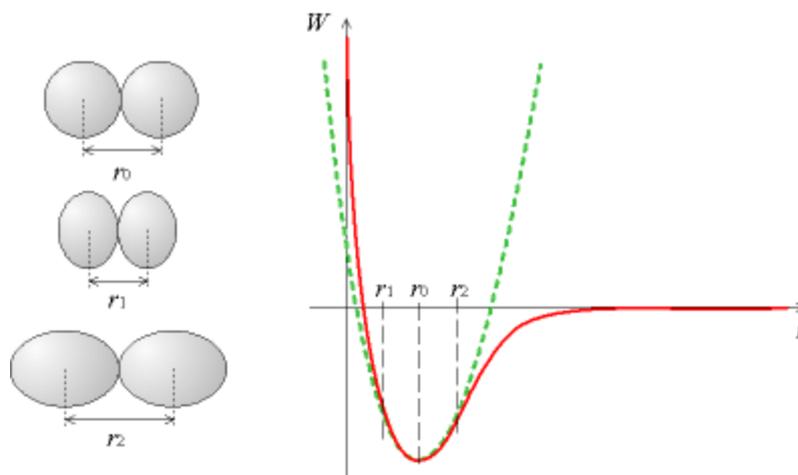
### b) Pourquoi les lois sont-elles linéaires ?

De manière générale, toute loi peut localement (c'est-à-dire pour de petites variations) se remplacer par un développement limité du premier ordre, ou « approximation linéaire », à condition que la tangente de la loi ne soit pas horizontale autour du point considéré. Les lois élastiques sont donc des approximations linéaires du comportement réel, plus complexe.

Plus précisément, l'explication de la linéarité se trouve dans la forme du potentiel interatomique  $W(r)$ , où  $r$  est la distance entre deux atomes.

À une température de 0 K, la distance entre deux atomes est  $r_0$ . Si l'on s'éloigne un peu de cette valeur, l'énergie  $W$  augmente ; on peut localement approcher la loi de  $W$  par une parabole (il s'agit en fait d'un développement limité au second ordre), on peut donc écrire :

$$W(r) = W_0 + k \cdot (r - r_0)^2.$$

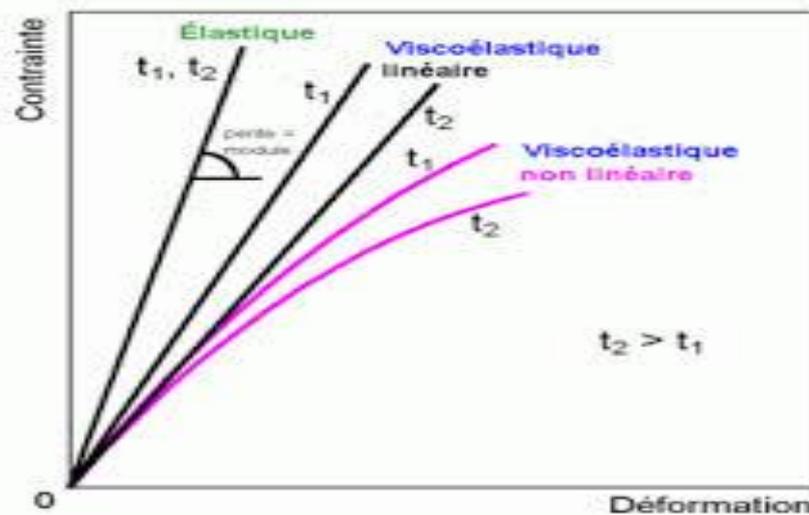


La force étant la dérivée de l'énergie potentielle, on voit que les atomes sont soumis à une force de rappel (qui tend à faire revenir à  $r_0$ ) qui vaut :

$$F = 2k \cdot (r - r_0)$$



qui est bien une loi linéaire.



### c) Déformations complexes :

Nous avons vu jusqu'ici des exemples de déformation très simples : traction uniaxiale, cisaillement, compression isostatique, sur un parallélépipède rectangle. Les applications réelles correspondent à des pièces et des sollicitations plus complexes, nécessitant de décrire la déformation et les contraintes par des matrices, des tenseurs, voir les articles :

- Tenseur des déformations
- Tenseur des contraintes

### Cas des gaz

Un gaz est constitué de molécules qui volent et s'entrechoquent. Elles se cognent également aux parois du récipient contenant le gaz, ce qui crée la pression. L'énergie cinétique moyenne d'une molécule est proportionnelle à la température absolue (en kelvins) :

$$E_c = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

$k$  étant la constante de Boltzmann.

La pression du gaz sur les parois dépend donc du nombre de chocs par seconde et de la force de chaque choc, cette force dépendant de l'énergie cinétique. Si l'on diminue le volume de l'enveloppe en maintenant la température constante (compression isotherme), on augmente la fréquence des chocs donc la pression. À l'inverse, si l'on agrandit l'enveloppe, on diminue la



fréquence des chocs, et donc on diminue la pression. Ceci se retrouve dans les lois de comportement des gaz, par exemple dans la loi des gaz parfaits, la pression est inversement proportionnelle au volume :

$$P \propto \frac{1}{V}$$

(la constante de proportionnalité vaut  $nRT$  où  $n$  est la quantité de gaz et  $R$  est la constante des gaz parfaits). Si l'on prend un cylindre de section  $S$  constante et de longueur  $l$  variable par l'action d'un piston, on a

$$F = P \cdot S = \frac{A}{l}$$

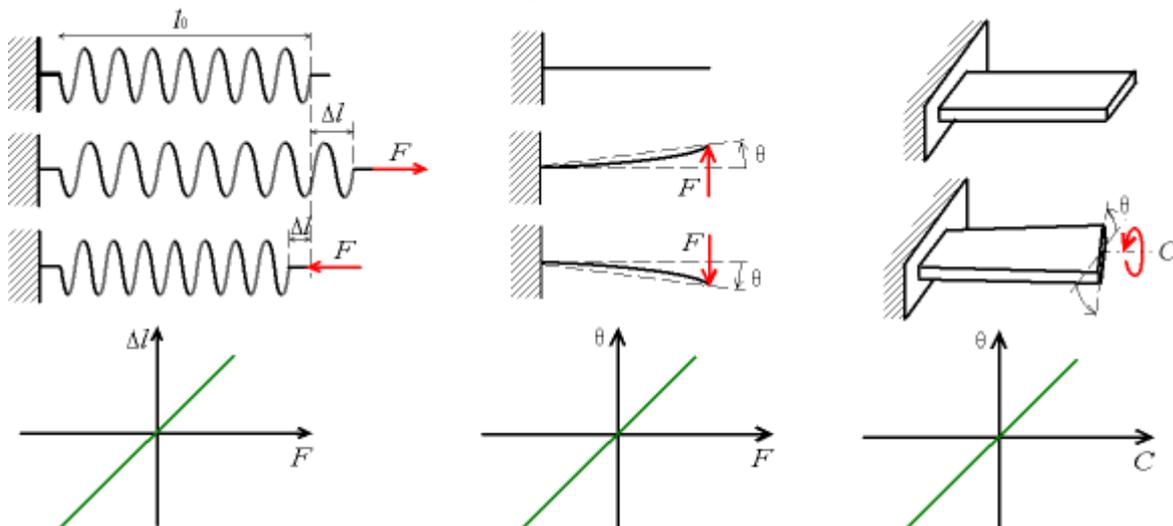
soit pour de petites variations (développement limité de la fonction  $\frac{1}{l}$  autour de  $l_0$ ) :

$$\Delta F \simeq -\frac{A}{l_0^2} \cdot (l - l_0)$$

qui est une loi linéaire (ou plutôt affine) en  $l$ .

On a bien un comportement élastique pour les gaz isothermes soumis à de faibles variations de volume.

### Exemple des ressorts



Le cas le plus simple de déformation élastique est celui des ressorts.



Trois exemples de ressorts : ressort à spires non-jointives sollicité selon son axe (fig. de gauche), ressort à lame sollicité en flexion (au centre), ressort à lame sollicité en torsion (à droite)

Sur les dessins, nous n'avons pas représenté la réaction du support auquel est accroché le ressort. Mais il faut bien voir que **la déformation résulte de l'application de deux actions mécaniques opposées** (forces et/ou couples) ; s'il n'y a qu'une seule force, en application du principe fondamental de la dynamique, la force accélère le ressort sans provoquer de déformation, on se ramène à la mécanique du point.

Lorsque les lois de déformation sont linéaires, le coefficient de proportionnalité est appelé **raideur** du ressort et est noté  $k$  :

- $F = k_1 \cdot \Delta l$  pour une traction-compression ;
- $F = k_2 \cdot \theta$  pour une flexion ;
- $C = k_3 \cdot \theta$  pour une torsion.

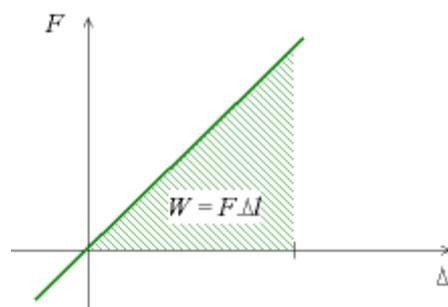
On remarque que les coefficients  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  ne sont pas homogènes (ils n'ont pas la même dimension). L'angle  $\theta$  doit être exprimé en radians.

Dans le cas d'un ressort à spires non-jointives, l'énergie de déformation élastique  $W$  est le travail de la force :

$$W = \int_0^{\Delta l} F \cdot dl$$

C'est donc la surface du triangle délimité par la droite dans le graphique  $(\Delta l, F)$ , soit

$$W = 1/2 k_1 \Delta l^2 = 1/2 \cdot F \cdot \Delta l$$

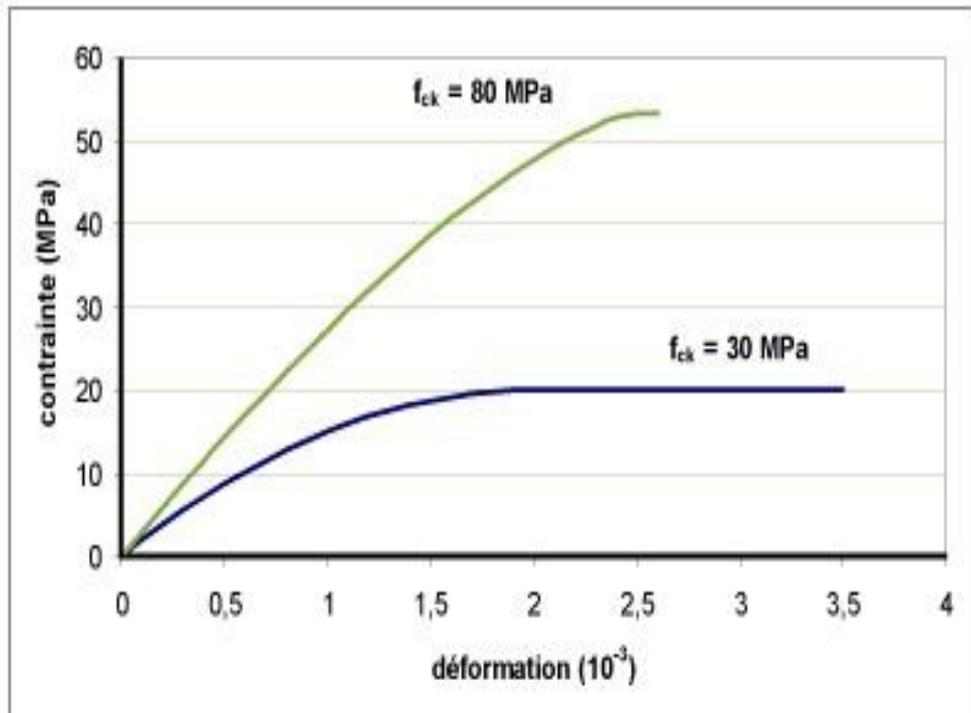


*Illustration graphique de l'énergie de déformation élastique dans le cas d'un ressort à spires non-jointives*

sur la première figure, nous avons utilisé un graphique montrant la déformation en fonction de la force, par exemple  $(F, \Delta l)$ . Sur la deuxième figure, nous avons inversé les axes et représenté la force en fonction de la déformation  $(\Delta l, F)$ . Si la première représentation nous semble plus intuitive (on se représente la force comme la cause de la déformation), les deux sont



équivalentes. C'est de fait la seconde,  $(\Delta l, F)$ , qui est la plus utilisée, les essais de traction se faisant à déformation imposée croissante (voir l'explication dans essais mécaniques).





### III. COMPORTEMENT PLASTIQUE

#### III.I Introduction

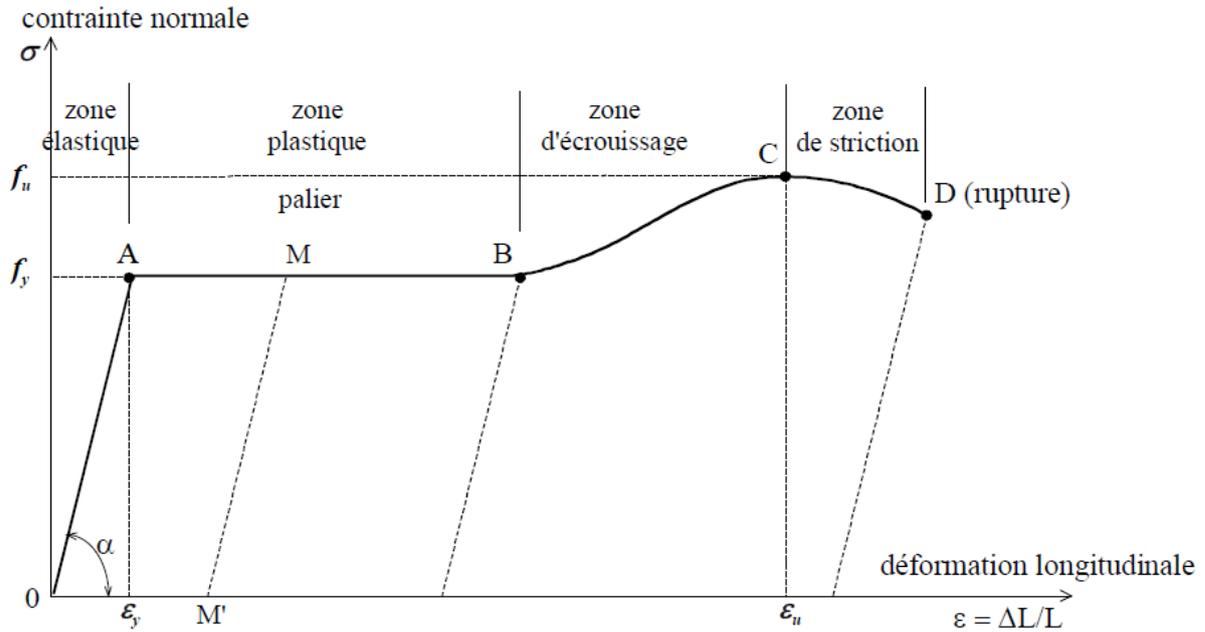
- Les premiers travaux traitant de la théorie de plasticité se rapportent aux années soixante-dix du XIX siècle et sont liés aux noms de saint-Venant et M.Iavy.
- Au début du vingtième siècle un critère de résistance a été proposé par V.Mises (1913), en plus de celui de Tresca (1864), qui sont employés encore à nos jours. La possibilité de formation de rotule plastique dans les barres fléchies a été introduite, en Hongrie par Kazinky (1914) qui arriva à la conclusion que la ruine ne se produisait pas avant que suffisamment de sections ne soient plastifiées pour former un mécanisme (poutres bi-encastées), la même notion a été introduite en Hollande par Kist (1917).
- A partir des années vingt du vingtième siècle, la théorie de la plasticité s'est développée dans plusieurs pays, en particulier en Allemagne par Maier-Leibnitz (1927). A la même époque on assistait également aux premières recherches expérimentales réalisées sur des portiques, Baker et Roderick (entre 1936 et 1939), et à la publication de certains principes théoriques de calcul plastique, Van Der Broek (1940).
- D'autres travaux importants furent réalisés par des auteurs bien connus : Baker, Hill, Horne, Heyman, Foulkes et Neal en Grande Bretagne.
- Il faut noter également les théorèmes fondamentaux en plasticité énoncés par Gvozdev en URSS (1938) et indépendamment par Horne (1950), Greenberg et Prager (1952).
- A partir des années soixante-dix du siècle en cours des programmes de calcul par ordinateur pour l'analyse et le dimensionnement plastique des structures ont été établis par Brozzetti et Lescouarch (France).

Actuellement, en Algérie, le calcul plastique des structures n'est pas appliqué, contrairement à la plus part des pays.

Dans le présent cours, nous donnons un exposé général des méthodes d'analyse et de dimensionnement des structures avec un certain nombre d'exemples et d'exercices.

#### III.II. Essai de traction

Il est pratiqué sur une éprouvette normalisée (norme NF-A 03101), soumise à un effort de traction progressif, croissant de zéro jusqu'à la rupture. On enregistre l'allongement de l'éprouvette en fonction de l'effort de traction appliqué. Pour un acier doux, on obtient un diagramme contrainte / déformation comparable à la figure suivante :



Ce diagramme se décompose en 4 phases :

- **phase OA : zone linéaire ou rectiligne**, pour laquelle les allongements sont proportionnels aux efforts appliqués. **C'est la zone élastique**, qui est réversible, car si l'effort de traction est supprimé, l'éprouvette revient à sa longueur initiale ( $\Delta L / L = 0$ ), il ne reste aucune déformation permanente. Le matériau ne se souvient plus du chargement précédent. C'est dans cette phase élastique que doivent demeurer les matériaux de nos constructions sous les actions réelles (à l'ELS) **Cette zone est régie par la loi de Hooke**

$$\sigma = E \varepsilon .$$

La loi de comportement est linéaire. Le principe de superposition est applicable.

Pour y y

$$\sigma = f \varepsilon = \varepsilon$$

- **phase AB : ce palier horizontal traduit un allongement sous charge constante**. Il y a écoulement du matériau. **C'est la zone plastique. La contrainte reste constante :**

$$f \text{ cte } y \sigma = = .$$

Les déformations sont importantes Si, à partir d'un point M situé sur le palier, on supprime l'effort de traction, le déchargement se fait selon une droite MM' parallèle à OA et l'éprouvette conserve une déformation rémanente (résiduelle) OM'. **Plus ce palier est étendu, plus le matériau est dit ductile (au sens de non fragile). C'est une qualité principale pour un matériau de construction.**



• **phase BC** : la charge croît à nouveau avec la déformation, de manière non proportionnelle, jusqu'au point C. C'est la **phase d'écroutissement**.

• **phase CD** : la déformation augmente et la charge est décroissante car il se produit une diminution de section en un point de l'éprouvette. C'est la phase de striction. Elle se termine par la rupture de l'éprouvette (point D)

Ce diagramme permet de déterminer :

- la limite d'élasticité  $y_f$  qui est la contrainte au-delà de laquelle :
  - Il n'y a plus proportionnalité entre contrainte et déformation
  - Il subsiste des déformations permanentes après déchargement.

Les anciennes normes faisaient référence à la limite élastique conventionnelle à 0,2% (correspond à une déformation rémanente de 0,2%) alors que les nouvelles normes font référence à la limite supérieure d'écoulement

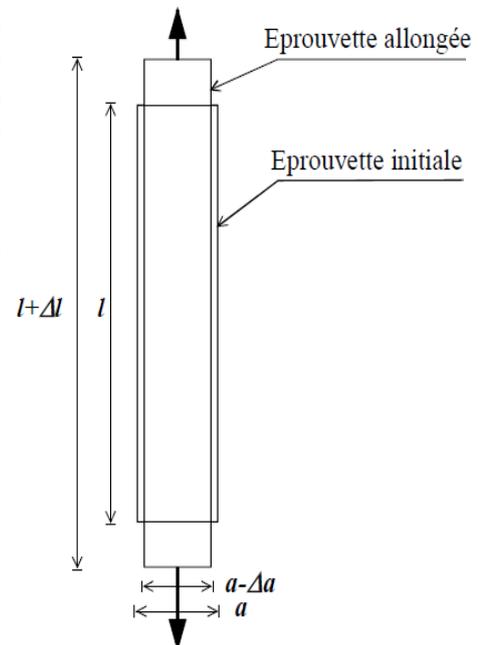
- la contrainte de rupture  $f_u$ , qui correspond au point C,
- le module d'élasticité longitudinale, ou module d'Young  $E : E = \tan \alpha$
- l'allongement à rupture  $\varepsilon_u$
- le coefficient de Poisson  $\nu : \frac{\Delta a}{a} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$

$$\nu = 0,25 \text{ à } 0,30 .$$

$l$  longueur initiale de l'éprouvette

$a$  dimension transversale de l'éprouvette

Le signe  $-$  traduit que l'allongement de l'éprouvette,  $\Delta l > 0$ , s'accompagne d'une contraction latérale  $\Delta a < 0$ .



### III.III Critères de plasticité

#### III.III.1 Critères de plasticité (ou d'écoulement)

Un critère de plasticité est une relation  $(\sigma, c) = 0$  entre les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma, i$  agissant sur un élément du matériau et un ou plusieurs paramètres  $C$  définissant l'état actuel de cet élément (ex : Ecroutissement). Cette relation est telle que :

$(\sigma, c) < 0$ , L'élément a un comportement élastique (À l'intérieur du domaine élastique).

$(\sigma, c) = 0$ , L'élément est plastifié (sur la frontière). (Surface d'écoulement). , On ne peut pas avoir cette situation (À l'extérieur du domaine élastique).

La fonction  $f$  est appelée aussi Fonction de charge du matériau, Le critère de plasticité étant alors la condition  $f=0$ .

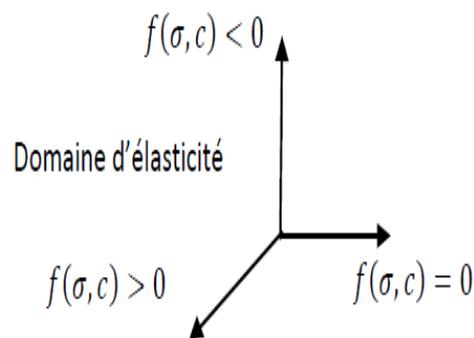
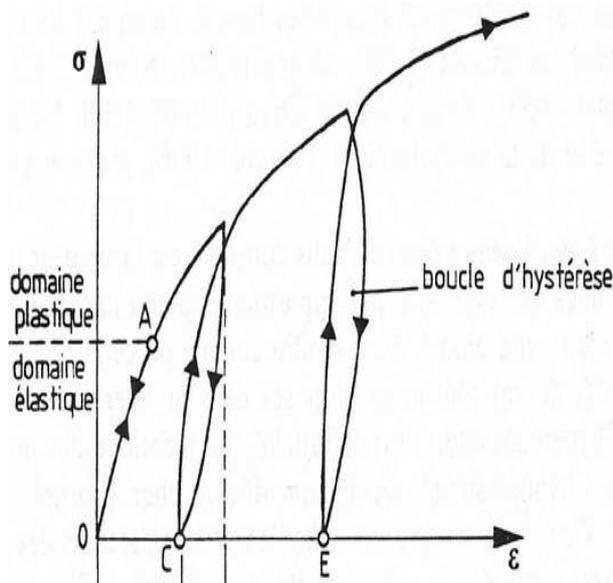


Les critères que nous allons présenter sont utilisés couramment pour les métaux, le béton, les sols. Ces critères sont déduits à partir d'essais. Il n'a jamais été démontré par la théorie que tel matériau doit répondre à tel critère particulier, d'équation donnée.

### III.III.2 Les principaux critères

- pour les matériaux homogènes isotropes : Von Mises (1910), Tresca (1870)
- pour les matériaux orthotropes : Hill (1950)
- pour les sols : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager (1950)

Ces critères sont anciens, ils restent cependant largement utilisés car les méthodes d'identification des paramètres caractérisant le comportement élasto-plastique ont fait leurs preuves pour ces critères. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'élaborer des critères modélisant mieux le comportement des matériaux. Cependant il reste toujours la difficulté de définir des processus expérimentaux simples et fiables permettant d'identifier les paramètres du modèle que l'on veut utiliser.



### III.III.3 Critère de Von Mises

L'expérience montre que pour les métaux, tout état de contraintes *hydrostatique* est admissible, c'est-à-dire qu'il appartient au domaine d'élasticité, autrement dit quelque soit la charge, il n'y a pas de déformations plastiques. Par conséquent, le domaine d'élasticité est représenté par un ouvert non borné d'axe (1, 1, 1) dans l'espace des contraintes principales  $\mathfrak{R}^3$ .

Il s'avère donc que l'expression du critère  $f_0(\bar{\sigma})$  doit être indépendante de la partie sphérique



du tenseur des contraintes. Pour exprimer le critère, nous utilisons donc le tenseur déviateur des contraintes.

$$\bar{\bar{\sigma}}_d = \bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{1}} \leftarrow \text{partie sphérique}$$

et sa partie sphérique est notée  $\bar{\bar{\sigma}}_s$ <sup>13</sup>. Le critère de Von Mises est la forme la plus simple utilisant le premier invariant non nul du déviateur des contraintes  $I_2'(\bar{\bar{\sigma}}_d) = \text{tr}(\bar{\bar{\sigma}}_d^2) = \bar{\bar{\sigma}}_d : \bar{\bar{\sigma}}_d$ . Soit la fonction de charge  $f_0(\bar{\bar{\sigma}}) = \bar{\bar{\sigma}}_d : \bar{\bar{\sigma}}_d - k^2$ . Plaçons-nous dans le cas d'un essai de traction :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\bar{\sigma}}_d = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

d'où  $f_0(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{2}{3}\sigma^2 - k^2$ ,  $k$  apparaît comme  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$ , avec  $\sigma_0$  limite élastique en traction. En pratique, la définition du domaine d'élasticité utilisant le critère de Von Mises est la suivante :

$$\left\{ \bar{\bar{\sigma}}; \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\bar{\sigma}}_d : \bar{\bar{\sigma}}_d} - \sigma_s \leq 0 \right\}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}}_d = \bar{\bar{\sigma}}$$



La fonction de charge s'écrit  $f_0(\bar{\sigma}) = \sqrt{3\tau^2} - \sigma_s$ . La limite d'élasticité en cisaillement simple pour le critère de Von Mises est donc définie par  $\sigma_s/\sqrt{3}$ . Exprimons la fonction de charge initiale  $f_0(\bar{\sigma})$  dans  $\mathfrak{R}^3$ , espace des contraintes principales :

d'où :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad \text{et} \quad f_0(\bar{\sigma}) = \sigma_{VM} - \sigma_s$$

La représentation graphique de la fonction de charge initiale dans l'espace des contraintes principales  $\mathfrak{R}^3$  est une surface cylindrique non bornée d'axe  $(1, 1, 1)$  de rayon  $\sqrt{2}\sigma_s$  comme indiqué sur la figure 66(a).

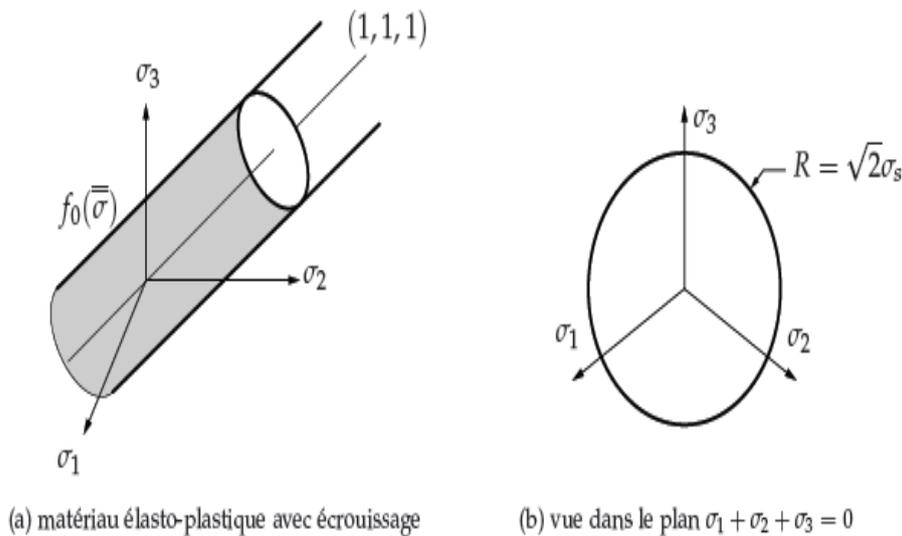


Fig. 66: fonction de charge initiale dans l'espace des contraintes principales pour le critère de Von Mises

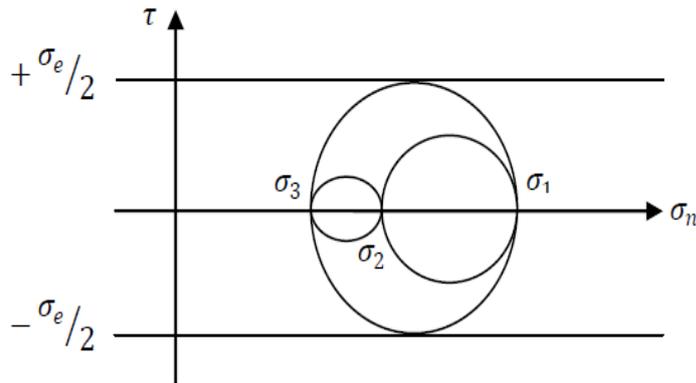
### III.III.4 Critère de Tresca

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_e, (\sigma_1 > \sigma_e > \sigma_3)$$

$\sigma_1 - \sigma_3$  est égal au diamètre du cercle de Mohr. Donc ce critère est atteint en un point lorsque le cercle de Mohr est tangent aux droites d'équations  $\tau = \pm \sigma_e/2$ , c'est-à-dire lorsque la



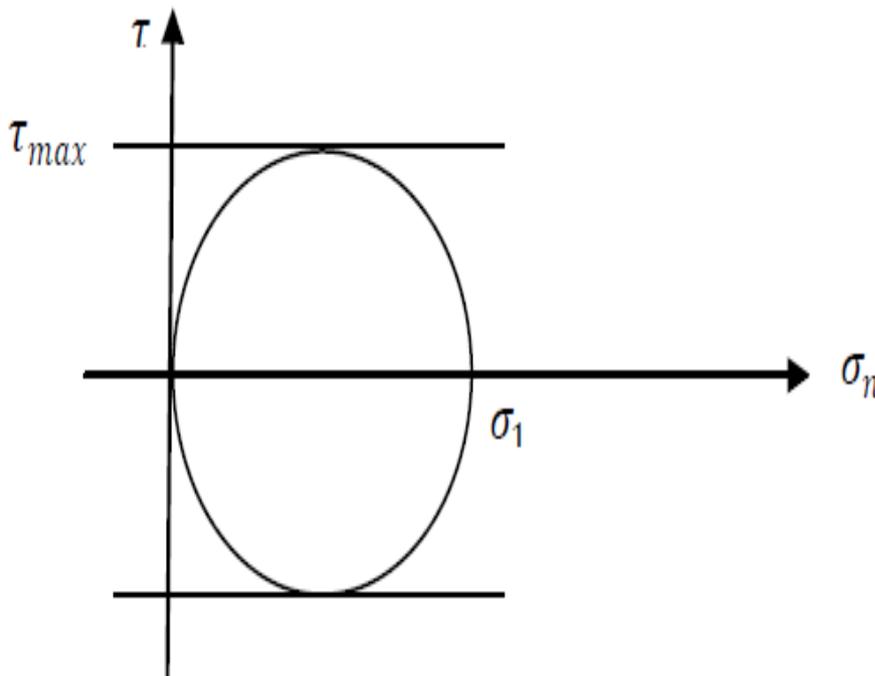
contrainte de cisaillement maximale au point considéré est égale à  $\sigma_e/2$ .



$$\tau_{max} = \sigma_e/2$$

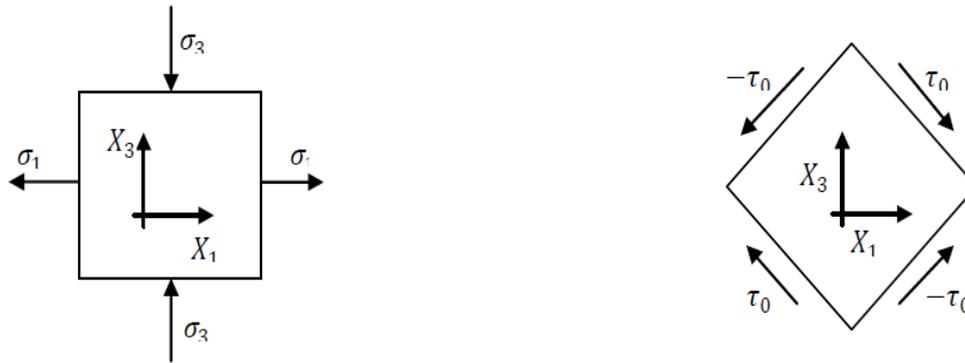
Le critère de TRESCA signifie que, la plastification se produit quand le cisaillement maximum (observable sur deux facettes) atteint la valeur critique  $\sigma_e/2$ . Cette signification à une résonance en termes de glissements cristallographiques.

En traction pure on a :  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  donc :  $\sigma_1 = \sigma_e$

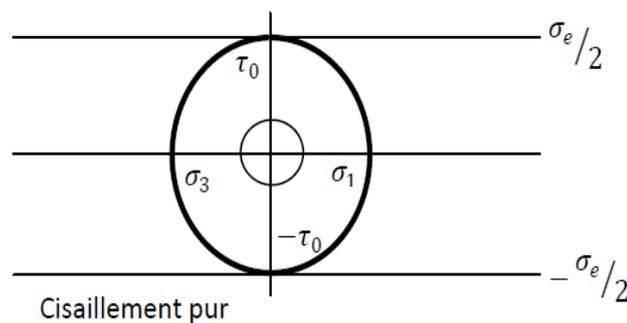


En cisaillement pur : lorsque  $\sigma_2 = 0$  et  $\sigma_3 = -\sigma_1$

Les facettes dont la normale fait un angle de  $\pm 45^\circ$  avec les directions principales  $Ox_1$ , Et  $Ox_3$  sont soumises au cisaillement maximum



Le critère est atteint lorsque cette contrainte de cisaillement pur  $\tau_0$  vérifie :  $\tau_0 = \sigma_e / 2$



Dans le cas général de contraintes tri directionnelles, chacune des contraintes principales ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ) peut être la plus grande ( $\sigma_1$ ) ou la plus petite ( $\sigma_3$ ), aussi dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité défini par le critère de TRESCA est délimité par six plans d'équations :

$$\sigma_i - \sigma_j = \sigma_e$$

avec :  $i = x, y, z$

$j = x, y, z$

$i \neq j$

La surface frontière (Ou d'écoulement) du domaine est un prisme de génératrice parallèle, à la direction  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$  (à l'axe 1, 1, 1) et de section droite constitué par un hexagone régulier de coté égal à  $\sigma_e \sqrt{6}/3$

Le plan A à pour équation  $\sigma_x - \sigma_z = \sigma_e$

Le plan B à pour équation  $\sigma_x - \sigma_y = \sigma_e$

Le plan C à pour équation  $\sigma_z - \sigma_y = \sigma_e$

**a) Etat plan des contraintes**

C'est-à-dire :  $\sigma_z = \sigma_x = \sigma_y = 0$



La direction  $z$  est une direction principale  $\sigma_z = \sigma_z = 0$ . Notons  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  les deux autres contraintes principales. On considère six cas suivants relatifs de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ .

- $\sigma_x \geq \sigma_y \geq (\sigma_z = 0)$  le critère s'écrit  $\sigma_x = \sigma_e$
- $\sigma_y \geq \sigma_x \geq (\sigma_z = 0)$  le critère s'écrit  $\sigma_y = \sigma_e$
- $\sigma_x \geq \sigma_z \geq \sigma_y$  le critère s'écrit  $\sigma_x - \sigma_y = \sigma_e$
- $\sigma_y \geq \sigma_z \geq \sigma_x$  le critère s'écrit  $\sigma_y - \sigma_x = \sigma_e$
- $\sigma_z \geq \sigma_x \geq \sigma_y$  le critère s'écrit  $\sigma_y = -\sigma_e$
- $\sigma_z \geq \sigma_y \geq \sigma_x$  le critère s'écrit  $\sigma_x = -\sigma_e$

La frontière du domaine élastique (d'écoulement) est composée de six segments de droites, formant un hexagone, qui est par ailleurs l'intersection du cylindre de l'espace des contraintes principales avec le  $\sigma_z = 0$  (Figure ci-dessous)

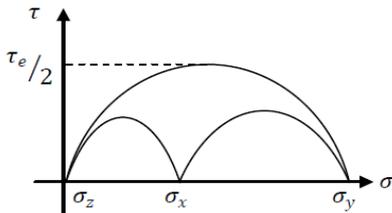
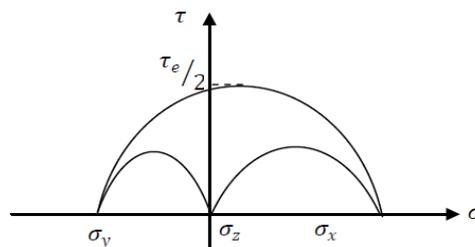
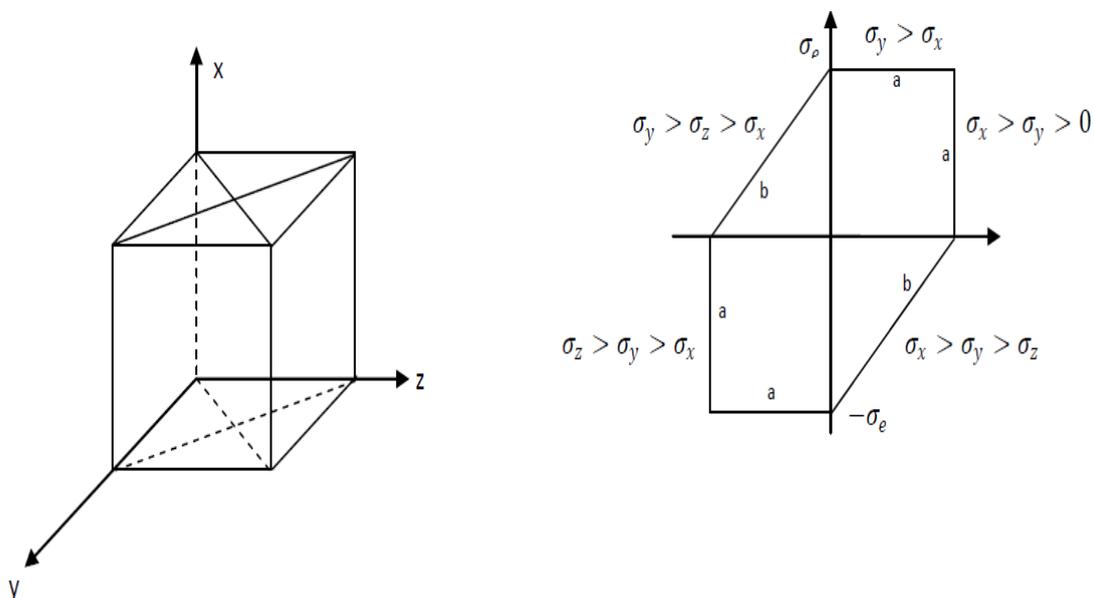


Figure : critère de TRESCA en contraintes planes (Frontière d'écoulement).



Cercle de MOHR

Physiquement les deux (2) faces correspondent (2D) à des régimes différents de déformation plastique





Les plans excités ( $\sigma_e = \sigma/2$ ) sont bissecteurs des directions y et z.

Les glissements s'effectuent de préférence selon les plans excités, l'élément de matière s'allonge selon la direction y, se raccourcira selon la direction privilégiée z ne se déforme pas selon x.

### b) Détermination de la frontière d'écoulement de Tresca

Le critère est entièrement déterminé par un seul paramètre,  $\sigma_e$ , contrainte d'écoulement en traction simple.

Cette simplicité vient des trois propriétés contenues implicites dans le critère :

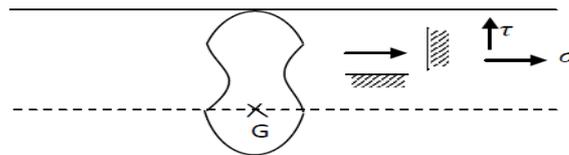
- Isotropie de la matière.
- Absence d'effet Baushinger.
- Plastification indépendante de la pression hydrostatique.

Une expérience unique suffit à déterminer entièrement la surface d'écoulement. Autrement dit un essai de traction permet de connaître le seuil de plasticité sous n'importe quel autre système de contraintes.

Flexion d'une poutre avec cisaillement :

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$\text{Donc : } \sigma^2 + 4 \cdot \tau^2 = \sigma_e^2$$



### c) Mohr coulomb

Le critère de COULOMB est donné sous la forme :

$$F_{\text{Mohr-Coulomb}} = (\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$$

$$F_{\text{Mohr-Coulomb}} = |\tau| - \sigma \tan \phi - c = 0$$



- $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  : Contraintes principales en un point du corps.
- $\varphi$ : Angle de frottement interne.
- $C$  : Cohésion.
- Ce critère est utilisé pour les sols. On peut remarquer que  $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$  et  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , représentent respectivement l'abscisse du centre et le rayon du cercle de Mohr.
- Lorsque les valeurs des contraintes satisfait la relation définissant le critère de Coulomb, le cercle de Mohr est tangent aux deux droites d'équation :

$$\tau = -\sigma_x \cdot \operatorname{tg} \varphi + C$$

$$\tau = \sigma_x \cdot \operatorname{tg} \varphi - C$$

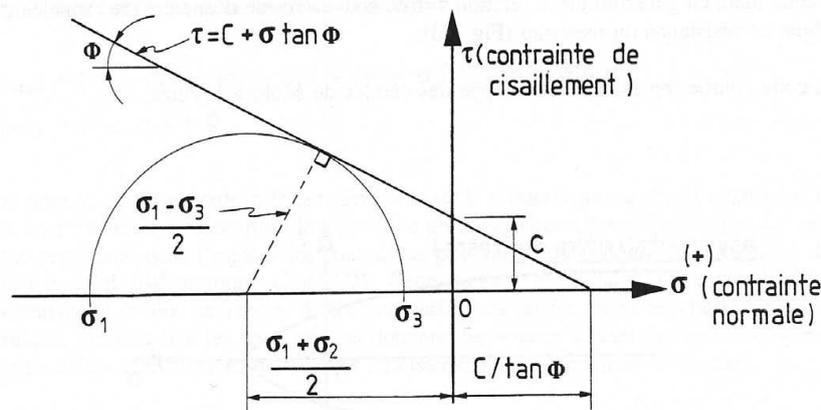


Fig. C4 : Courbe intrinsèque utilisée pour les sols

#### d) Ecoulement

- La déformation plastique commence dans les cristaux les plus favorablement orientés, elle se poursuit ensuite, mais plus difficilement, dans les autres ;
- Les dislocations sont bloquées aux frontières des grains.

#### e) Etude plastique en 1D et 3D :

En 1D on avait des critères d'élasticité scalaires :

**Saint Venant**  $|\sigma| \leq \sigma^y$

**ECL, ECNL**  $|\sigma - X| \leq \sigma^y$

**EI**  $|\sigma| \leq \sigma^y + R$

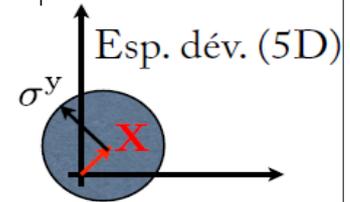


En 3D, on généralise ces critères en bornant la *norme euclidienne naturelle* du déviateur des contraintes. Pour le modèle trivial de Saint Venant, cela correspond au critère de Von Mises (voir cours d'algèbre tensoriel).

$$\text{Von Mises : } \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^D\| \leq \sigma^y$$

Pour l'érouissage cinématique (linéaire ou non), on introduit une variable tensorielle  $\mathbf{X}$  qui décrit le déplacement du centre du domaine élastique dans l'espace des déviateurs :

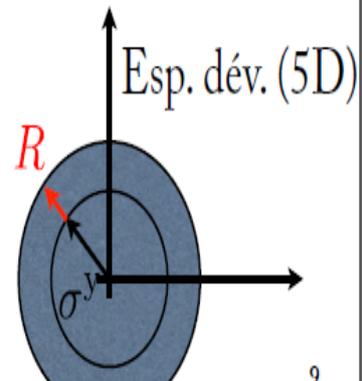
$$\text{ECL, ECNL : } \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{X}\| \leq \sigma^y$$



L'érouissage isotrope, on conserve la variable de sur érouissage

$R$  qui décrit l'augmentation du domaine d'élasticité. Cela correspond à une dilatation dans l'espace des déviateurs

$$\text{EI : } \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^D\| \leq \sigma^y + R$$



Quelques mots sur Von Mises... et Henki et Huber

On trouve le critère en général écrit comme suit :



$$\sqrt{3} \sqrt{J_2(\boldsymbol{\sigma}^D)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^D : \boldsymbol{\sigma}^D} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^D\|$$

R.1

Mais le sens physique de  $J_2$  est moins clair que celui de la norme...

En base canonique, on a :

$$\|\boldsymbol{\sigma}^D\| = \sqrt{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}$$

En base de tenseurs :

$$\|\boldsymbol{\sigma}^D\| = \sqrt{\hat{\sigma}_I^D \hat{\sigma}_I^D}$$

Le critère de Von Mises en fonction des contraintes principales (à éviter car c'est très couteux en CPU) :

$$\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \leq \sigma_y$$

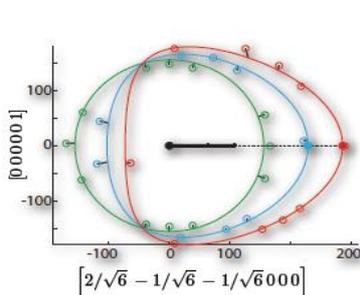
- Von Mises :  $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, E) = \sigma_{VM} - \sigma_s(h)$  avec  $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_d : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_d}$
- Tresca :  $f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, h) = \sigma_T - \sigma_s(h)$  avec  $\sigma_T = \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j|$

Pour ces deux critères, le seuil  $\sigma_s$  apparaît comme la limite élastique  $\sigma_0$  de l'essai de traction. Pour exprimer  $\sigma_s(h)$ , nous pouvons utiliser une relation de la forme de celle établie au chapitre 2, à savoir  $\sigma_s(h) = \sigma_0 + H \varepsilon_p^{14}$ .

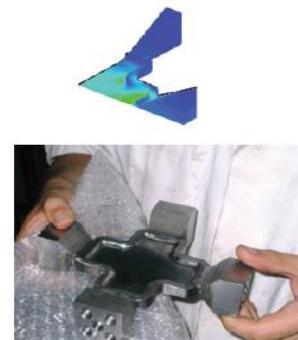
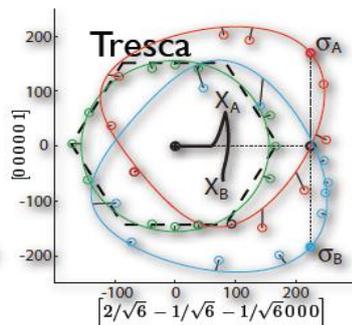
Le coefficient sert à caler sur l'essai 1D :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \vec{u} \otimes \vec{u} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^D \begin{bmatrix} 2\sigma/3 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma/3 \end{bmatrix}_{\vec{u}, \dots} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}^D\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{6}{9}} |\sigma|$$

Si l'on regarde les essais très finement le critère de Tresca colle mieux... mais il n'est pas dérivable...



Essais sur aluminium Au4G-T4  
Thèse M. Rousset LMT 1985.  
Modèle M. François IJP 1995.





## **COMPORTEMENT PLASTIQUE.**

La plasticité est la propriété qu'ont certains corps de subir de grandes déformations sans se rompre. Les déformations plastiques apparaissent lorsque les contraintes dépassent un certain seuil dit LIMITE D'ÉCOULEMENT OU SEUIL DE PLASTICITÉ (*Yield-Point*).

En théorie de plasticité le temps physique n'intervient pas au point de vue comportement (vitesse de déformation).

### ***Origine de la déformation plastique :***

Le solide est un assemblage de grains cristallins. La déformation plastique peut être due :

- Aux mouvements relatifs des grains (cas des terres), le frottement entre les grains explique l'irréversibilité des mouvements.
- Aux déformations permanentes des grains, c'est le cas des métaux et des roches, du moins à la température ordinaire. Les déformations des grains sont dues principalement à des glissements dans une direction de rangée atomique suivant des plans parallèles du réseau cristallin. Le glissement résulte de la propagation d'un défaut (dislocation) dans l'arrangement régulier du réseau (glissement progressif).

Pour les cristaux métalliques, la résistance au glissement ne dépend pratiquement pas de la contrainte normale au plan de glissement.

### ***Essai de traction-compression (Effet BAUSHINGER) :***

Lorsque qu'on effectue un essai de traction avec plastification suivi d'un déchargement, le diagramme contrainte-déformation est comme indiqué aux figures 3.1 et 3.2 pour respectivement l'acier doux et l'acier à haute résistances.

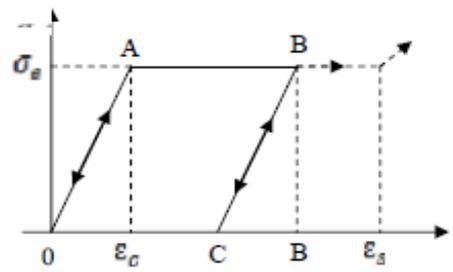


Fig. 3.1 : Acier

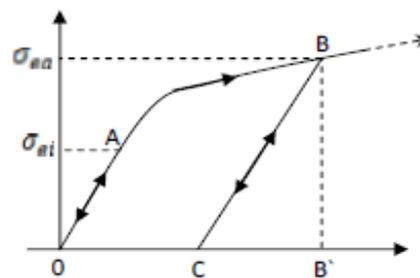


Fig.3.2 : Acier à haute résistance

Dans les deux cas, le comportement est réversible, donc élastique le long de OA mais aussi le long de BC, parallèle à OA.

Pour les deux aciers, au point B la déformation élastique est égale à la longueur du segment CB'. Cette partie réversible de la déformation s'annule en C lorsque la contrainte reprend la valeur zéro. La déformation plastique ne varie pas entre B et C et est égale à la longueur du segment OC.

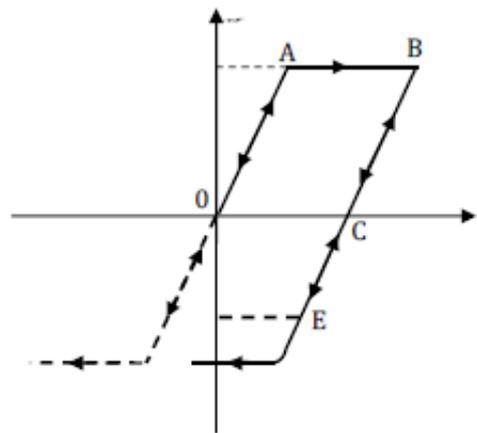
En tout point du trajet OABC, la déformation totale est la somme de la déformation élastique et de la déformation plastique :

$$\overline{OB'} = \overline{OC} + \overline{CB'}$$



Lorsqu'on fait suivre le déchargement d'une compression, le diagramme est comme indiqué à la figure pour l'acier doux.

Si la contrainte en compression :  $\sigma_{ac} = -\sigma_{at}$ , on dira que l'érouissage a été isotrope.



Si la contrainte en compression :  $\sigma_{ac} \neq -\sigma_{at}$ , on dira qu'il y'a « Effet BAUSHINGER ». C'est un cas fréquent. Malgré cela la théorie de la plasticité c'est surtout développé dans le formalisme de l'érouissage isotrope.

*Effet BAUSHINGER :*

L'érouissage est en général orienté. C'est pourquoi par suite de déformation plastique, le matériau acquiert ce que l'on appelle ANISOTROPIE DE DÉFORMATION.

Une des manifestations de ce phénomène est l'effet BAUSHINGER qui consiste en ce que la déformation plastique préalable d'un signe diminue la résistance du matériau par rapport à la déformation plastique suivant du signe opposé.



En général la limite d'écoulement augmente avec la déformation plastique (passage de A à B). On dit qu'il y'a écrouissage ou durcissement. Dans un agrégat polycristallin, il y'a des raisons supplémentaires de durcissement.

La déformation plastique commence dans les cristaux les plus favorablement orientés, elle se poursuit ensuite, mais plus difficilement, dans les autres ;

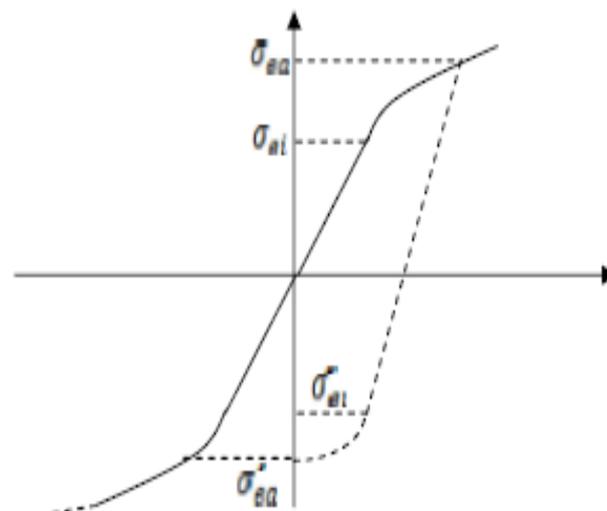
Les dislocations sont bloquées aux frontières des grains.

Dans un sens plus général, le mot écrouissage désigne l'ensemble des modifications subies par les propriétés mécaniques du matériau par suite des déformations plastiques :

Deux d'entre elle sont importantes :

Une matière initialement isotrope devient anisotrope par suite de déformations qui deviennent importantes.

Si la limite d'écoulement (Seuil de plasticité) se trouve augmenté pour une charge de même sens que celle qui a produit les déformations (passage de  $\sigma_{el}$  à  $\sigma_{ea}$ ), en revanche elle est, en général diminuée en valeur absolue pour charge de sens opposé (passage de  $\sigma_{el}^p$  à  $\sigma_{ea}^p$ ).



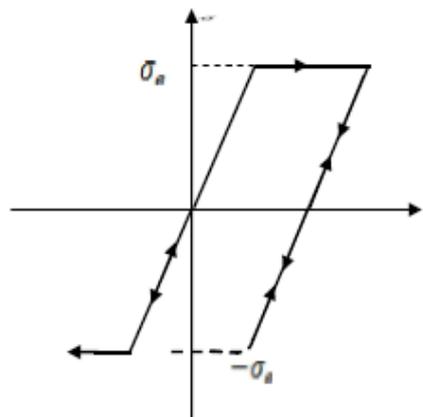


Ce phénomène est appelé effet BAUSHINGER, qui est souvent important pour les petites déformations plastiques, s'atténue pour les grandes déformations.

*Modèles utilisés :*

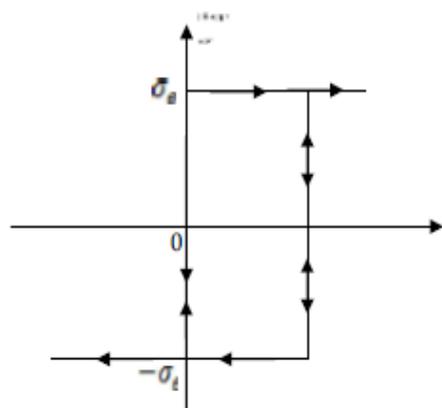
On utilise souvent en pratique des modèles simplifiés :

Le modèle élastique est parfaitement plastique (sans écrouissage).



Dans lequel, les déformations augmentent beaucoup plus rapidement en fonction de la charge dans la phase plastique que dans la phase élastique.

Le modèle rigide parfaitement plastique : dans lequel, les déformations élastiques sont négligées vis-à-vis des déformations plastiques.



*Lois de la déformation plastique :*



En plasticité :

\* Il n'y a pas de rotation entre la déformation permanente totale (à partir de l'état neutre ou sans contraintes) et l'état de contraintes actuel.

Supposons qu'on décharge une éprouvette de traction sur laquelle on a dépassé le seuil de plasticité, puis qu'on la recharge en torsion jusqu'à la limite d'écoulement nouvelle : On



modifie ainsi complètement l'état de contraintes sans qu'on change la déformation permanente.

La déformation actuelle dépend essentiellement de l'histoire du changement (de l'ordre de succession des états de contraintes) ou plutôt du trajet de chargement, trajet suivi par le point  $M = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  entre l'état initial et l'état final.

On peut établir une relation entre les accroissements infinitésimaux de contraintes  $\Delta\sigma_{hk}$  (Lorsqu'on franchit la limite actuelle d'écoulement) et les déformations infinitésimales  $(d\varepsilon^p)_{ij}$  qui en résultent.

$$\text{Où : } u_{ij}^{(p)} = A_{ij, hk} \cdot \frac{\Delta\sigma_{hk}}{\Delta t}$$

Les  $A_{ij, hk}$  ne dépendent nullement des accroissements de contraintes  $\Delta\sigma_{hk}$ .

Les  $(d\varepsilon^p)_{ij}$  sont les déformations permanentes mesurées à partir de l'état actuel.

$u_{ij}^{(p)}$  : doit s'annuler pour toutes les vitesses de contraintes qui maintiennent l'état de contrainte à la limite d'écoulement, c'est-à-dire sont elle que :

$$def = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}} \cdot \frac{\Delta\sigma_{hk}}{\Delta t} \cdot dt$$

$def$  : Différentielle à écoulement constant.

On en déduit :

$$A_{ij, hk} = H_{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{hk}}$$

D'où :

$$[*] \quad d\varepsilon^p_{ij} = H_{ij} \cdot def \quad \text{Lorsque } def > 0 \text{ (Charge).}$$

$$\text{Tandis que : } d\varepsilon^p_{ij} = 0 \quad \text{Lorsque } def \leq 0 \text{ (charge ou variation neutre).}$$

La relation [\*] a une conséquence remarquable :

Les accroissements de contraintes  $\Delta\sigma_{hk}$  n'y figurent que par le scalaire  $def$ .



## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- 1- Comportement mécanique des matériaux : élasticité et plasticité (Livre Vol 1) (Dominique François, André Pineau, André Zaoui).
- 2- Comportement mécanique des matériaux : Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique des contacts (Livre Vol 2)(Dominique François, André Pineau, André Zaoui).