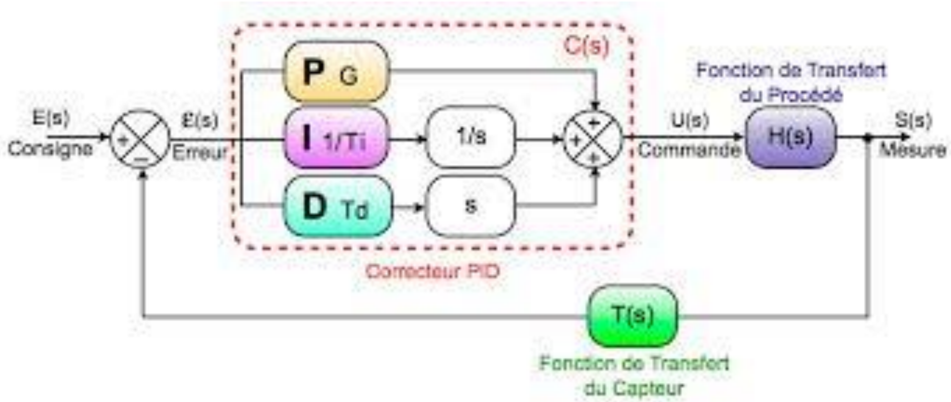
Université des Frères Mentouri - Constantine 1
Faculté de Science de la Technologie
Département Génie des Transports
3ième Année Licence Traction Electrique

Module : Commande et Régulation

Chapitre 3



Présenté par Dr. H. BOUZERIA

Email : bhamza23000@gmail.com

Année universitaire 2019/2020

Transformation de LAPLACE

❖ **Par définition, f(t) étant une fonction réelle du temps (nulle pour t < 0), on appelle Transformée de Laplace de cette fonction, notée L {f(t)}, la fonction de la variable complexe F(p) telle que :**

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad \text{pour } t \geq 0$$

avec :	$f(t) = 0$	pour $t < 0$
	p :	complexe indépendant du temps
	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:	transformée de Laplace ou image de f(t)
	$f(t)$:	originale ou fonction objet de F(p).

La Théorie

- General Theory $$F(s) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau} e^{-st} f(t)dt$$

- Example $$f(t) \equiv 1 \qquad \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st}1dt = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\bigg|_0^{\tau}\right)$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s}$$

- Convergence $$f(t) \equiv e^{t^2}$$

$$\mathcal{L}\big(f(t)\big) = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau} e^{-st}e^{t^2}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau} e^{t^2-st}dt = \infty$$

Propriétés du théorème

Propriété	Originale $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p)$
Linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(t)+b.F_2(t)$
Dérivation	$f'(t)$	$p.F(p)-f(0^+)$
Dérivation d'ordre n	$f^n(t)$ (n>0)	$p^n.F(p)-p^{n-1}.f(0^+)-\ldots-p.f^{n-2}(0^+)-f^{n-1}(0^+)$
Intégration	$\int f(t).dt$	$\frac{F(p)}{p}$
Retard	$f(t-\theta)$	$e^{-\theta p}.F(p)$
Changement d'échelle	$f(a.t)$	$\frac{1}{a}.F\left(\frac{p}{a}\right)$

$$\mathcal{L}\, f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Table des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$\delta^{(n)}(t)$	$p^n \quad n>0$
A	$\dfrac{A}{p}$
$A.t$	$\dfrac{A}{p^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ n entier $n \geq 1$	$\dfrac{A}{p^n}$
$\dfrac{1}{T}.e^{-\frac{t}{T}}$ $1-e^{-\frac{t}{T}}$ $t-T+Te^{-\frac{t}{T}}$	$\dfrac{1}{1+Tp}$ $\dfrac{1}{p(1+Tp)}$ $\dfrac{1}{p^2(1+Tp)}$
$\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ $1-\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(T_1.e^{-\frac{t}{T_1}}-T_2.e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ $t-(T_1+T_2)-\dfrac{1}{T_1-T_2}\left(T_2^2.e^{-\frac{t}{T_2}}-T_1^2.e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$	$\dfrac{1}{(1+T_1p).(1+T_2p)}$ $\dfrac{1}{p.(1+T_1p).(1+T_2p)}$ $\dfrac{1}{p^2.(1+T_1p).(1+T_2p)}$

$f(t)$	$F(p)$
$\frac{1}{T^3}(T-t).e^{-\frac{t}{T}}$ $\frac{t}{T^2}.e^{-\frac{t}{T}}$ $1-\left(1+\frac{t}{T}\right).e^{-\frac{t}{T}}$ $t-2T+(t+2T).e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{p}{(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{p.(1+Tp)^2}$ $\frac{1}{p^2.(1+Tp)^2}$
$\frac{w_0^2}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-zw_0t}.\sin\left(w_0\sqrt{1-z^2}t+\theta\right)$ $\theta=\pi-Arc\cos z$ $\frac{w_0}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-zw_0t}.\sin\left(w_0\sqrt{1-z^2}t\right) \quad 0<z<1$ $1-\frac{w_0}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-z.w_0.t}.\sin\left(w_0\sqrt{1-z^2}t+\Psi\right)$ $\Psi=Arc\cos z$ $t-\frac{2z}{w_0}+\frac{1}{w_0\sqrt{1-z^2}}.e^{-z.w_0.t}.\sin\left(w_0\sqrt{1-z^2}t+2\Psi\right)$	$\frac{p}{1+\frac{2z}{w_0}p+\frac{p^2}{w_0^2}}$ $\frac{1}{1+\frac{2z}{w_0}p+\frac{p^2}{w_0^2}}$ $\frac{1}{p\left(1+\frac{2z}{w_0}p+\frac{p^2}{w_0^2}\right)}$ $\frac{1}{p^2\left(1+\frac{2z}{w_0}p+\frac{p^2}{w_0^2}\right)}$
$((b-a)t+1).e^{-at}$	$\frac{p+b}{(p+a)^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$

$\cos(wt+\varphi)$	$\dfrac{p.\cos\varphi - w\sin\varphi}{p^2+w^2}$
$\sin wt$	$\dfrac{w}{p^2+w^2}$
$\sin(wt+\varphi)$	$\dfrac{p.\sin\varphi + w\cos\varphi}{p^2+w^2}$
Si $a^2 > b^2$: $\dfrac{1}{p_1 - p_2}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$ avec $\begin{cases} p_1 = -a + \sqrt{a^2-b^2} \\ p_2 = -a - \sqrt{a^2-b^2} \end{cases}$ Si $a^2 = b^2$: $t.e^{-at}$ Si $a^2 < b^2$: $\dfrac{1}{w}.e^{-at}.\sin wt$ avec $w = \sqrt{b^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{p^2+2ap+b^2}$

•Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to \infty} pF(p)$$

Exemple : $f(t) = \exp(-at) \Rightarrow F(p) = \dfrac{1}{p+a}$

$$\lim_{t \to 0^+} \exp(-at) = 1 \; ; \; \lim_{p \to \infty} \frac{p}{p+a} = 1$$

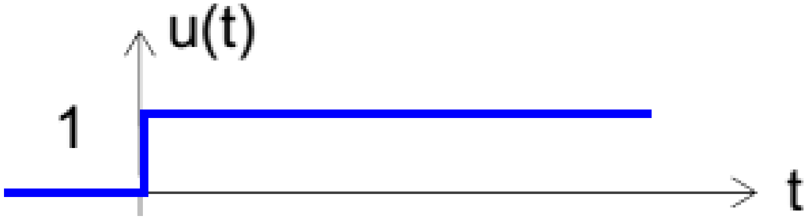
•Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

Exemple TL

La figure suivante représente la fonction échelon unitaire u(t) :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$



Fonction échelon unitaire

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, u(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \qquad U(p) = \frac{1}{p}$$

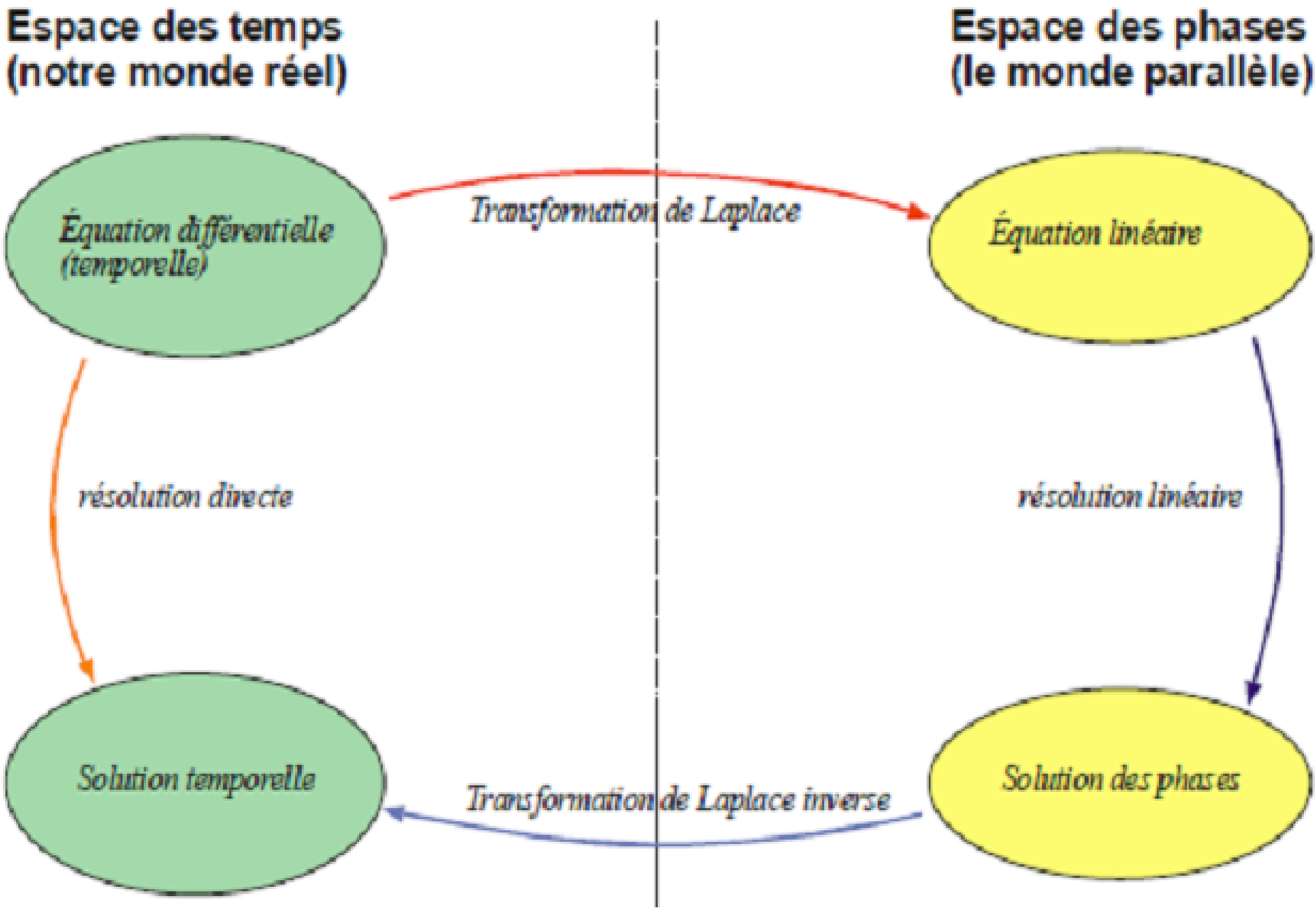
Transformée de Laplace Inverse

?????

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\frac{1}{p}$	1
1	$\delta(t)$ Dirac
$\frac{1}{p+\beta}$	$e^{-\beta t}$
$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{b}{p\left(b+\sqrt{p}\right)}$	$1-\exp\left(b^2 t\right)\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}\right)$

$\theta(p) = L\{T(t)\}$	$T(t)$
$\dfrac{\ln(p)}{p}$	$-\ln(t) - \gamma \quad ; \quad \gamma = 0{,}57721$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	$\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$
$\dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\mathrm{sh}(\omega t)$
$\dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\mathrm{ch}(\omega t)$
$\dfrac{1}{p^n} \quad n = 1, 2, 3\ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$

Le but de LAPLACE



Représentation graphique des systèmes linéaires continus

1. Fonction de transfert

Un système linéaire d'entrée x (t) et de sortie y (t) est régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{dy^2}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 . y = b_m \frac{dx^m}{dt^m} + b_{m-1} \frac{dx^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_2 \frac{dx^2}{dt^2} + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 . x$$

Si on écrit la transformation de la Laplace de l'équation différentielle à conditions initiales nulles on trouve :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

appelée fonction de transfert ou transmittance du système

$$
\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[rr] \arrow[d, "LP"] & & y(t) = LP^{-1}\left(Y(p)\right) \arrow[d, "LP"'] \\
X(p) = LP\left(x(t)\right) \arrow[rr, "H(p)"] & & Y(p) = H(p).X(p)
\end{tikzcd}
$$

❖ Formalisme :

Bloc

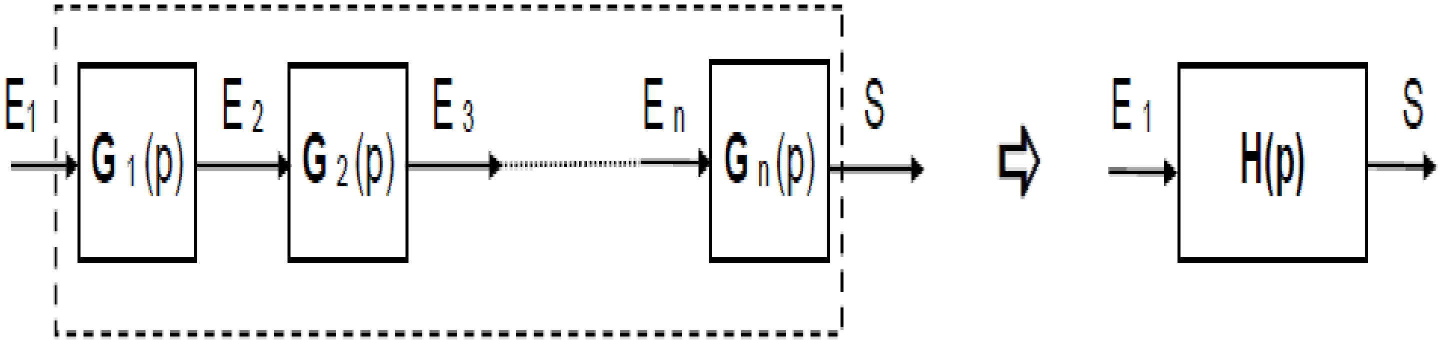
Jonction

Sommateur

Comparateur

Eléments en série (ou cascade)

Soit n éléments de fonction de transfert G1(p),,,,,, Gn (p) mis en série (la sortie du premier est reliée à l'entrée du second,,, etc

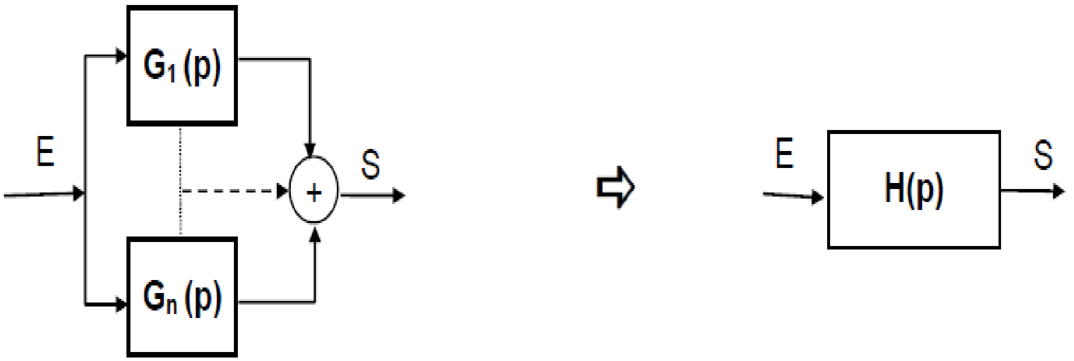


La fonction de transfert équivalente H(p) a pour expression :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E_1(p)} = G_1(p) \,.\, G_2(p) \,.\, \ldots\ldots\, .\, G_n(p)$$

Eléments en Parallèle

Soient n éléments de fonction de transfert G1 (p) ....Gn (p) mis en parallèle



La fonction de transfert équivalente H(p) a pour expression :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = G_1(p) + G_2(p) + \ldots\ldots + G_n(p)$$

Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Soit un système asservi, le plus général, représenté par le schéma

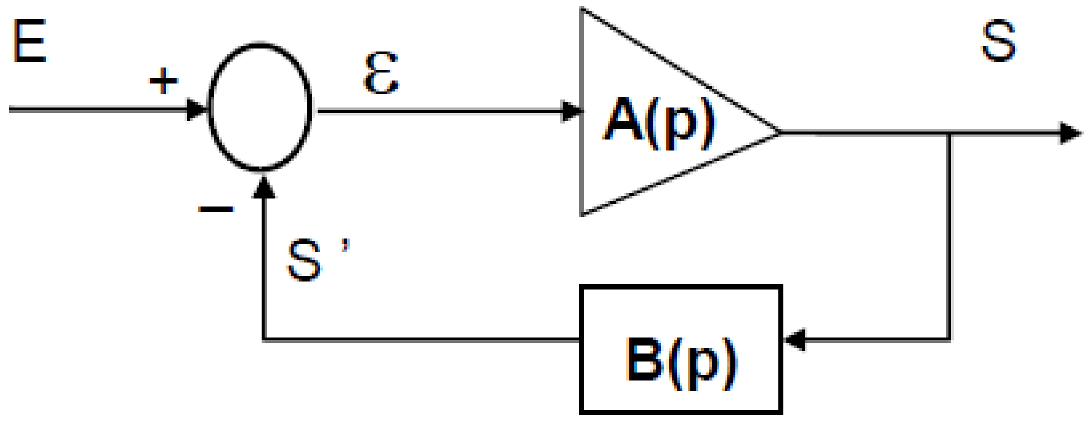


Schéma fonctionnel d'un système asservi (Boucle Fermée)

Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Cherchons la fonction de transfert du système complet :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad ????$$

Nous avons les relations suivantes :

$$S(p) = A(p)\,.\,\varepsilon(p) \quad , \quad S'(p) = B(p)\,.\,S(p) \quad , \quad \varepsilon(p) = E(p) - S'(p)$$

$$S(p) = A(p)\,.\,[\,E(p) - S'(p)\,] = A(p)\,.\,[\,E(p) - B(p)\,.\,S(p)\,]$$

$$\text{d'où} \quad S(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}\,E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p)}{1 + G_1(p).G_2(p)}$$

Formule de Black.

Remarques :

* Dans le cas où $G_2(p) = 1$ $\Rightarrow F(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)} = \dfrac{G_1(p)}{1 + G_1(p)}$

a une chaîne de retour de transmittance *1*.

Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

La fonction de transfert d'un système bouclé ou en Boucle Fermée (FTBF) est donc le rapport de la fonction de transfert de sa chaîne directe à
1 + A(p). B(p)

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (également appelée F.T.B.O.) est la fonction de transfert qui lie les transformées de Laplace de la sortie de la chaîne de retour S ' (p) à l'erreur ε(p). Elle correspond à l'ouverture de la boucle

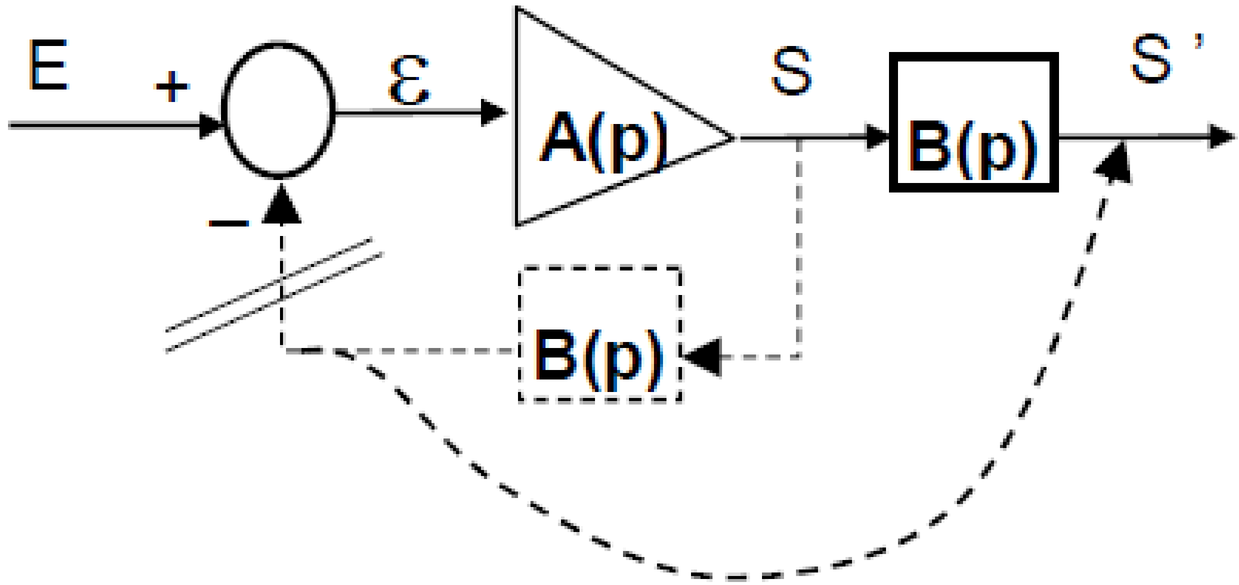


Schéma fonctionnel d'un système asservi en Boucle Ouverte

Dans ce cas, e = E puisque le comparateur ne reçoit plus qu'une seule information. On a donc :

$$
\begin{aligned}
S'(p) &= B(p) \,.\, S(p) \\
&= B(p) \,.\, A(p) \,.\, \varepsilon(p) \\
&= B(p) \,.\, A(p) \,.\, E(p)
\end{aligned}
$$

d'où :

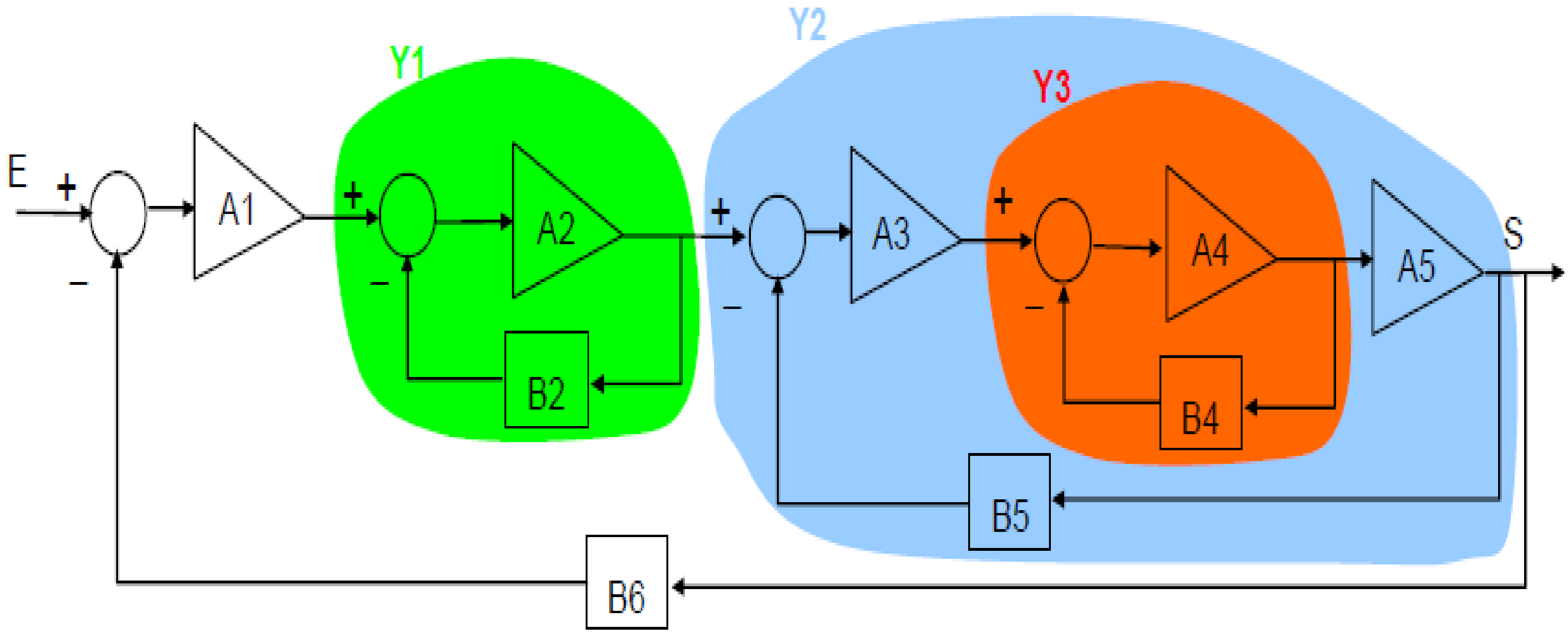
$$\frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = K(p) = A(p) \,.\, B(p)$$

Note Importante :

- *La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (ou FTBO) d'un asservissement est le produit des fonctions de transfert de la chaîne directe par la chaîne de retour.*

- *La fonction de transfert en boucle ouverte a une grande importance dans l'étude de la stabilité des systèmes ; de plus, elle est directement accessible à la mesure.*

Fonction de transfert d'un système à boucles multiples



Le calcul de la fonction de transfert d'un tel système peut paraitre compliqué. Pour mener a bien ce calcul, il faut utiliser l'artifice suivant : au lieu de considérer la fonction de transfert globale Y(p), on considère son inverse 1 / Y(p).

$$Y(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)} \qquad \frac{1}{Y(p)} = B(p) + \frac{1}{A(p)}$$

En appliquant la même procédure, on a :

$$\frac{1}{Y_1} = B_2 + \frac{1}{A_2} \qquad \frac{1}{Y_2} = B_5 + \frac{1}{A_3 Y_3 A_5} \qquad \frac{1}{Y_3} = B_4 + \frac{1}{A_4}$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{A_1 Y_1 Y_2} = \frac{1}{A_1}\left(B_2 + \frac{1}{A_2}\right)\left[B_5 + \frac{1}{A_3 A_5}\left(B_4 + \frac{1}{A_4}\right)\right]$$

$$\frac{1}{Y(p)} = B_6 + \frac{1}{A_1}\left(B_2 + \frac{1}{A_2}\right)\left[B_5 + \frac{1}{A_3 A_5}\left(B_4 + \frac{1}{A_4}\right)\right]$$

Formes générales de la Fonction de Transfert d'un système linéaire

Soit un système asservi représente par sa fonction de transfert de forme générale suivante :

$$F(p) = \frac{B_m p^m + ... + B_0}{A_n p^n + ... + A_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Si N(p) et D(p) ont des racines alors :

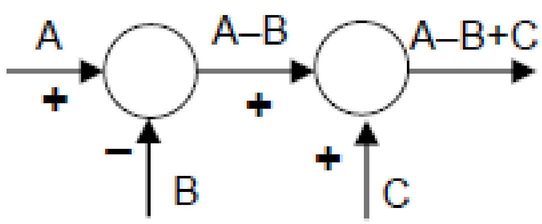
$$N(p) = B_m\,[(p - z_1)(p - z_2).......(p - z_m)] \qquad D(p) = A_n\,[(p - p_1)(p - p_2).......(p - p_n)]$$

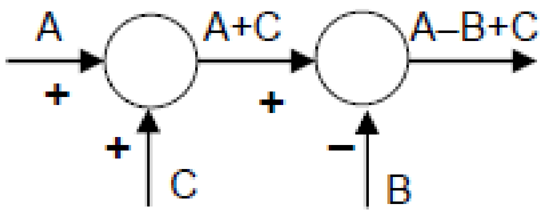
les racines du numérateur sont appelées " ***zéros de la fonction de transfert*** ",

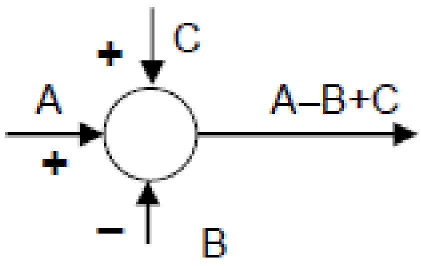
les racines du dénominateur sont appelées " ***pôles de la fonction de transfert*** ",

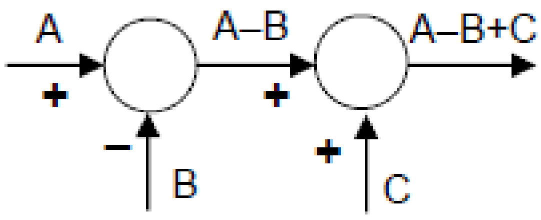
$$F(p) = \frac{B_m}{A_n} \frac{\prod_{i=1}^{m} (p - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (p - p_j)}$$

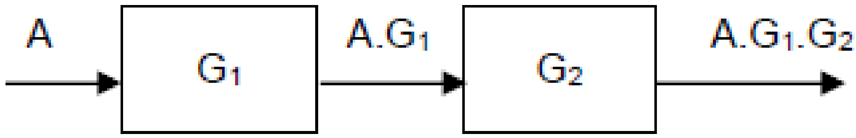
Règles de transformation des schémas fonctionnels

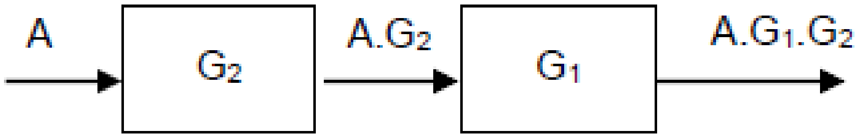


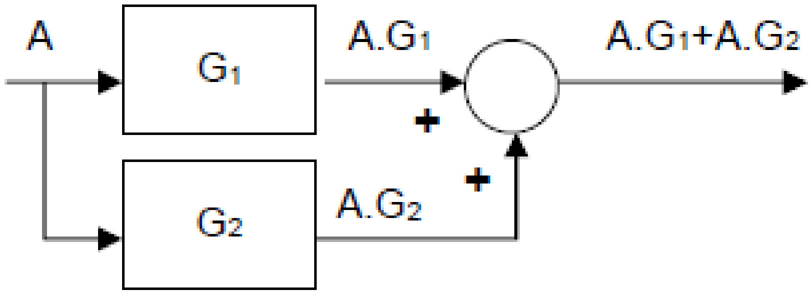


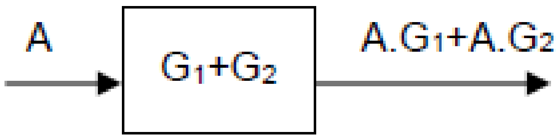


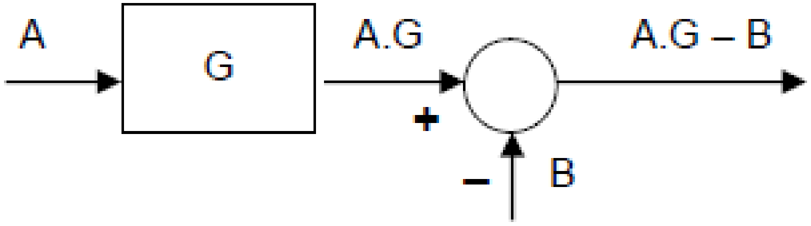


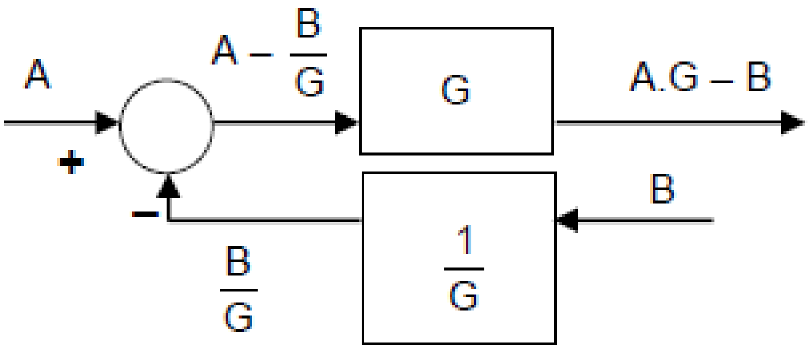


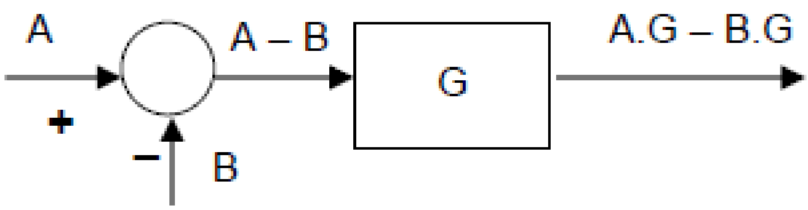


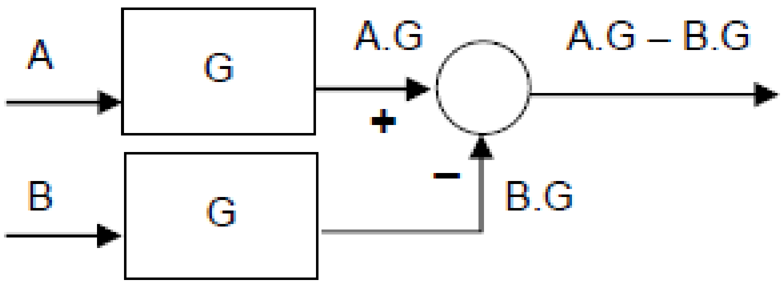

A
G_1
G_2
$A.G_1$
$A.G_2$
+
+
$A.G_1+A.G_2$

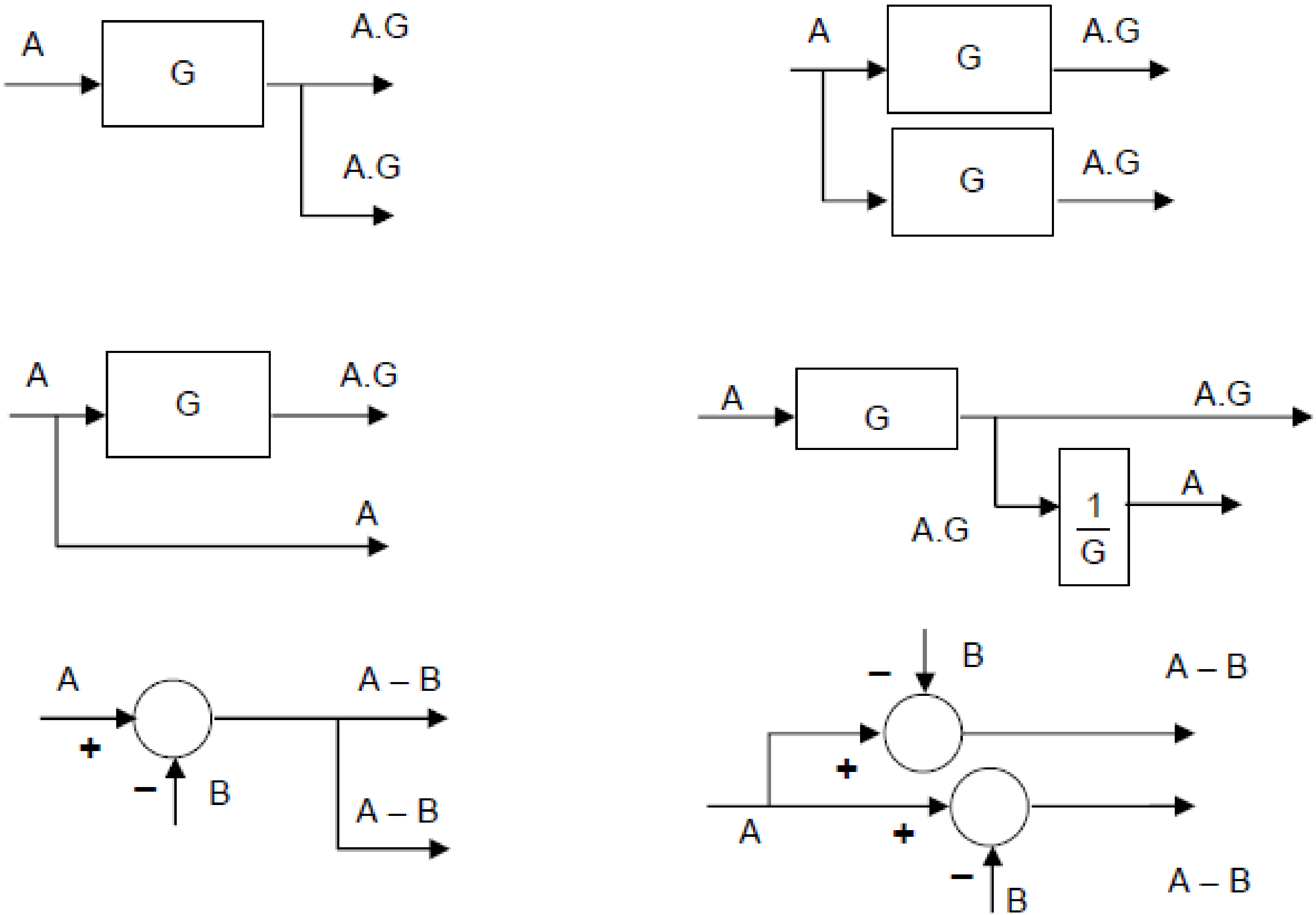

A
G_1+G_2
$A.G_1+A.G_2$


A
G
A.G
+
–
B
A.G – B

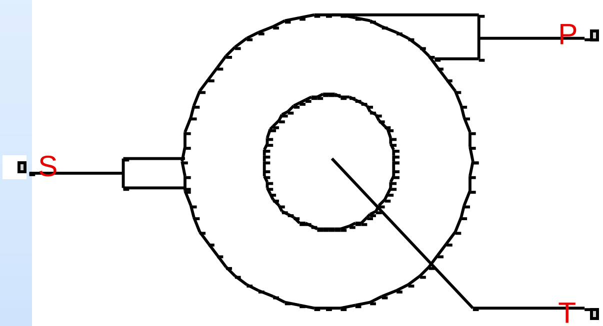

A
+
–
$A - \frac{B}{G}$
G
A.G – B
$\frac{1}{G}$
B
$\frac{B}{G}$


A
+
–
B
A – B
G
A.G – B.G


A
G
A.G
B
G
B.G
+
–
A.G – B.G


A
G
A.G
A.G
A
G
A.G
G
A.G
A
G
A.G
A
A
G
A.G
1/G
A
A.G
A
A – B
A – B
B
B
A – B
A
B
A – B

Exemple



Centrifugal Pump

Centrifugal Pump

This block represents a centrifugal pump of any type as a data sheet-based model. The pump is parameterized with experimental data and three options for pump characterization are available: (1) by an approximating polynomial, (2) by pressure differential and brake power vs. pump delivery characteristics, (3) by pressure differential and brake power characteristics at different angular velocities vs. pump delivery characteristics. The relationship between pump characteristics and angular velocity in the first two cases is determined from the affinity laws.

Connections P and T are hydraulic conserving ports associated with the pump outlet and inlet, respectively. Connection S is a mechanical rotational conserving port associated with the pump driving shaft. The block positive direction is from port T to port P. This means that the pump transfers fluid from T to P if shaft S rotates in positive direction.

Parameters

Model parameterization:	By approximating polynomial	
First approximating coefficient:	326.8	Pa/(kg/m^3)
Second approximating coefficient:	3.104e+04	Pa*s/kg
Third approximating coefficient:	1.097e+07	Pa*s^2/(kg*m^3)
Fourth approximating coefficient:	2.136e+05	Pa*s^2/(kg*m^3)
Correction factor:	0.8	
Pump design delivery:	130	lpm
Reference angular velocity:	1.77e+03	rpm
Reference density:	920	kg/m^3
Mechanical loss power:	350	W

OK Cancel Help Apply

$$H = C1.\omega^2 - C2.\omega.Q - C3.Q^2$$

$$T_L = A_p\,.\,\omega_r^2$$

$$\begin{cases} Q' = \left(\frac{N'}{N}\right).Q \\ H' = (N'/N)^2.H \end{cases}$$

$$P_{hydraulic} = \rho.g.Q.H$$

$$P_{mechanical} = \frac{\rho.g.Q.H}{\eta}$$

MERCI POUR VOTRE ATTENTION