TD 5 : stabilité

Exercice 1 (critère algébrique):

En utilisant le critère de ROUTH, discuter la position des racines des polynômes suivants dans le plan complexe $\mathbb{C}$:

a) $p^4 + 10p^3 + 35p^2 + 50p + 24 = 0$

b) $p^3 - 4p^2 - 7p + 10 = 0$

c) $p^5 + 2p^4 + 15p^3 + 30p^2 - 20p - 40 = 0$

d) $p^3 - 3p + 2 = 0$

Exercice 2 (critère algébrique):

Soit le polynôme: $p^4 + p^3 + p^2 + p + k = 0$

Quelle est la condition sur k pour que touts les racines de ce polynôme soient à gauche de plan complexe $\mathbb{C}$?

Exercice 3 (critère graphique):

Soit $H(p)$ la fonction de transfert d'un système asservi en boucle ouverte :

$$H(p) = \frac{22.8}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

1) Normaliser $H(p)$ et tracer sur papier semi-log les courbes de gain et de phase de $H(p)$?

2) Trouver graphiquement la marge de gain et la marge de phase ?

3) Tracer le lieu de transfert de $H(p)$ dans la plan de Nyquist à partir des courbes de Bode ?

4) Calculer les valeurs précises de MG et Mϕ, est ce que le système est stable ?

Solution de TD 5

Exercice 1 :

a) $p^4 + 10p^3 + 35p^2 + 50p + 24 = 0$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	…
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	…
p^{n-2}	b_m	b_{m-1}	b_{m-2}	…
p^{n-3}	c_m	c_{m-1}	c_{m-2}	…
⋮	⋮			

$b_m = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$; $b_{m-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$

$c_m = \frac{b_m a_{n-3} - b_{m-1}a_{n-1}}{a_{n-1}}$; …

p^4	1	35	24
p^3	10	50	0
p^2	30	24	0
p^1	42	0	
p^0	24		

Tous les termes de la première colonne sont de même signe (positif) donc les racines de ce polynôme sont à gauche du plan complexe (système stable).

b) $p^3 - 4p^2 - 7p + 10 = 0$

p^3	1	-7	0
p^2	-4	10	0
p^1	-4.5	0	
p^0	10		

On a deux changements de signe (positif→négatif→positif) donc deux racines de ce polynôme sont à droite du plan complexe (système instable).

c) $p^5 + 2p^4 + 15p^3 + 30p^2 - 20p - 40 = 0$

p^5	1	15	-20
p^4	2	30	-40
p^3	0	0	0
p^2			
p^1			
p^0			

Tous les termes de la troisième ligne sont nuls. Alors on continue à remplir le tableau en utilisant la ligne p^4 comme auxiliaire :

$F(p) = 2p^4 + 30p^2 - 40$; $\frac{dF(p)}{dt} = 8p^3 + 60p$

On remplace la ligne des zéros par les coefficients de $\frac{dF(p)}{dt}$:

p^5	1	15	-20
p^4	2	30	-40
p^3	8	60	0
p^2	15	-40	
p^1	81.3	0	
p^0	-40		

Il existe un changement de signe dans les termes de la première colonne donc il y a un racine à droite de plan complexe (système instable)

d) $p^3 - 3p + 2 = 0$

p^3	1	-3
p^2	0	2
p^1		
p^0		

Le pivot de p^2 est nul, pour continuer à remplir le tableau on remplace le 0 par α et on continue :

p^3	1	-3
p^2	α	2
p^1	$\frac{-3\alpha-2}{\alpha}$	0
p^0	2	

De fait que $\alpha \to 0^+$; on aura 2 changements de signe donc 2racines à droite de plan complexe (système instable)

Exercice 2:

Soit le polynôme: $p^4 + p^3 + p^2 + p + k = 0$

p^4	1	1	K
p^3	1	1	0
p^2	0	K	

On remplace le zéro par α valeur très petite est positive

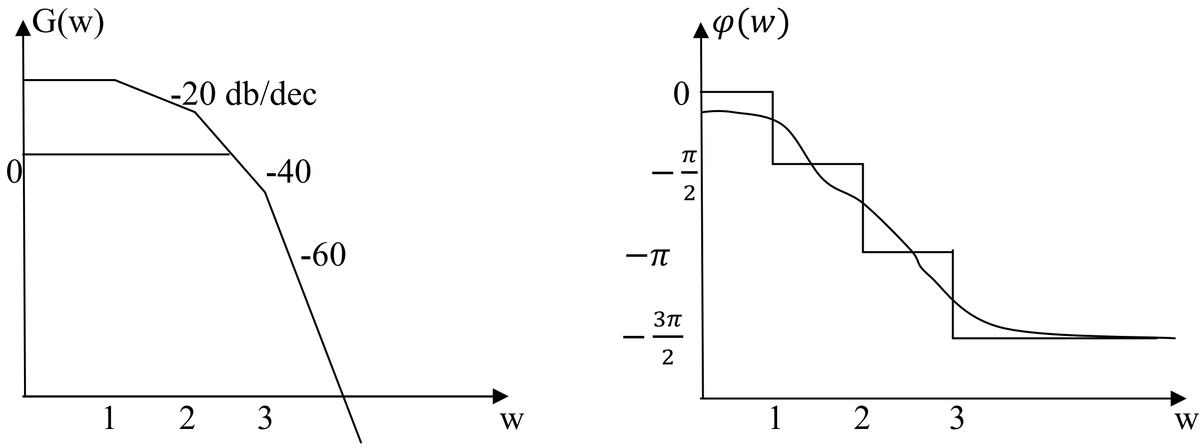
p^4	1	1	K
p^3	1	1	0
p^2	α	K	
p^1	$\frac{\alpha-K}{\alpha}$	0	
p^0	K		

On remarque que le terme $\frac{\alpha-K}{\alpha} \cong -k$ puisque α est très petite et positive, donc quelque soit k positif ou négatif il aura toujours des racines à droite de plan complexe

Exercice 3 :

$$H(p) = \frac{22.8}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

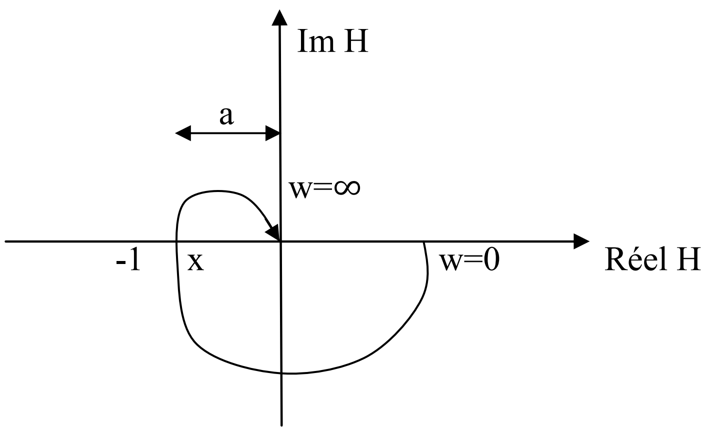
1) les courbes de Bode à main levée :



2) Graphiquement on à MG≅7 à 9 db; et le Mφ entre 30° et 35° ; cela dépend de la précision des courbes.

3) à partir des courbes de Bode on peut tracer le plan de Nyquist:

$$H(p) = \frac{22.8}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$



4) calcule de MG et Mφ :

$$H(p) = \frac{22.8}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$H(jw) = R(w) + j.Im(w)$$

$$H(jw) = \frac{22{,}8\big((6-6w^2) - j(11w - w^3)\big)}{(6-6w^2)^2 + (11w - w^3)^2}$$

$$H(jw) = \frac{22{,}8(6-6w^2)}{(6-6w^2)^2 + (11w - w^3)^2} - \frac{j22{,}8(11w - w^3)}{(6-6w^2)^2 + (11w - w^3)^2}$$

Pour le point x sur l'axe Réel IM=0 donc

$\frac{22{,}8(11w-w^3)}{(6-6w^2)^2+(11w-w^3)^2} = 0$; alors $11w - w^3 = 0 \leftrightarrow\ w = \sqrt{11}$

La valeur de 'a' c'est : a $=\left|R(w = \sqrt{11})\right| = \frac{22{,}8}{60}$

Donc $\mathrm{MG} = -20\log\frac{22{,}8}{60} = 8{,}4\ db$

Pour la marge de phase :

D'abord on a $|H| = 1$ ce implique que

$\frac{22.8}{[(w^2+1)(w^2+4)(w^2+9)]^{\frac{1}{2}}} = 1 \leftrightarrow w_0 = 2$

$$Arg\big(H(jw)_{w_0}\big) = -\left(arctgw_0 + arctg\ \frac{w_0}{2} + arctg\ \frac{w_0}{3}\right) = -142{,}25°$$

Donc $\mathrm{M\varphi} = 180° + (-142{,}25) = 37{,}75 = 38°$