TD N°1

Transformation de Laplace

Exercice 1:

On donne $L[sint] = \frac{1}{P^2+1}$, en utilisant la formule de changement d'échelle

$L\{F(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{p}{a}\right)$; trouver $L[sin(3t)]$.

Confirmer votre résultat au moyen de la table de Laplace.

Exercice 2:

Soit $F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+2p+2)}$; calculer $f(t)$.

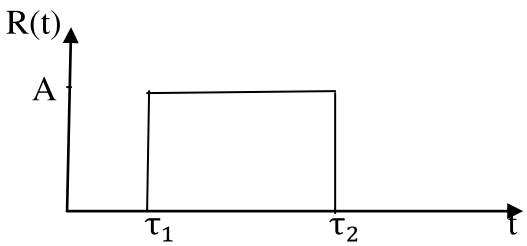
Exercice 3:

Soit l'équation différentielle : $x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$ avec $x(0) = 2$

Trouver $x(t)$ en utilisant la T.L

Exercice 4:

Soit R(t) donnée graphiquement

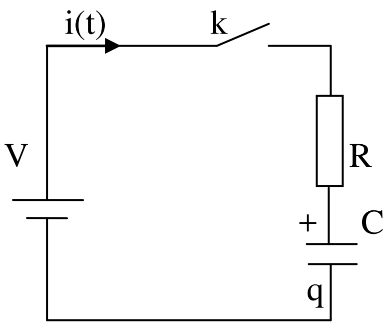


1) Calculer $L\{R(t)\}$.

2) Quelle est l'expression de $L\{R(t)\}$ dans le cas particulier $\tau_1 = 0$ et $\tau_2 = \tau$.

3) Montré que si $A = \frac{1}{\tau}$ et si $\tau \to 0$ alors $L\{R(t)\} = L\{\delta(t)\} = 1$

Exercice 5: Soit le circuit suivant :



V=cte et à l'état initial, C est chargée à q

1) Ecrire les équations qui gouvernent le circuit.

2) Calculer les valeurs initiales et finales de i(t) commenté vos résultats.

Solution des exercices de TD 1

EX01 :

$L[\sin(t)] = \frac{1}{p^2+1}$; et $L[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{p}{a})$

Donc $L[\sin(at)] = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{p^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a}\frac{a^2}{p^2+a^2}$

Si on remplace $a = 3$, on trouve :

$L[\sin(at)] = \frac{3}{p^2+9}$

EX2 :

$F(p) = \frac{p+1}{p(p^2+2p+2)} \longrightarrow \quad f(t) = ?$

On peut écrire $F(p)$ sous la forme suivant :

$F(p) = \frac{Ap+B}{(p^2+2p+2)} + \frac{C}{p}$;

Par identification on trouve $\begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = 0 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$; donc $F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{(p^2+2p+2)}\right)$

D'après la table de Transformé de Laplace :

$L[e^{-at}\sin wt] = \frac{w}{(p+a)^2+w^2}$ et $L[e^{-at}\cos wt] = \frac{p+a}{(p+a)^2+w^2}$

$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{(p^2+2p+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2+1}\right)$

Donc $f(t) = \frac{1}{2}[1 - e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t]$

EX3 :

$\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{-t}$; avec $x(0) = 2$; $x(t) = ?$

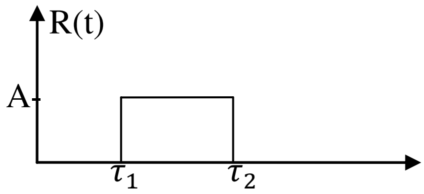
On a $L[\dot{x}(t) + 2x(t)] = L[e^{-t}]$

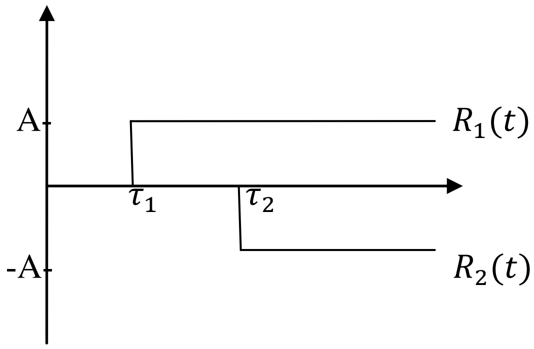
$px(p) - x(0) + 2x(p) = \frac{1}{p+1} \leftrightarrow (p+2)X(p) = \frac{1}{p+1} + 2$

Alors $x(p) = \frac{2p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}$

$L^{-1}[x(p)] = e^{-2t} + e^{-t}$; $x(t) = e^{-2t} + e^{-t}$

Ex 4 :





1) $L[R(t)] = L[R_1(t)] + L[R_2(t)] = \frac{A}{p}e^{-\tau_1 p} - \frac{A}{p}e^{-\tau_2 p}$

2) si $\tau_1 = 0$ et $\tau_2 = \tau$ alors $R(p) = A\frac{1-e^{-\tau p}}{p}$

3) si $A = \frac{1}{\tau}$ alors $R(p) = \frac{1-e^{-\tau p}}{\tau p}$

Lorsque $\tau \to 0$, $R(t) \to \delta(t)$

$\lim_{\tau\to 0} R(t) = \lim_{p\to\infty} p.R(p) = 1$, donc $L[\delta(t)] = 1$.

EX5 :

1) $V = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

2)La transformé de Laplace de cette équation est :

$\frac{V}{p} = Ri(p) + \frac{1}{Cp}(i(p) + q)$

Tel que q c'est la charge initiale de la capacité, la tension est constante à l'état initial

$i(p) = \frac{V-\frac{q}{C}}{p(R+\frac{1}{Cp})} = \frac{V-\frac{q}{C}}{R}.\frac{1}{p+\frac{1}{RC}} \rightarrow L^{-1}[i(p)] = \frac{V-\frac{q}{C}}{R}.e^{\frac{-t}{RC}}$

$i(p) = \frac{V-\frac{q}{C}}{R}.\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}$; $i(t) = \frac{V-\frac{q}{C}}{R}.e^{\frac{-t}{RC}}$.

La valeur initial de i(t) :

$\lim_{t\to 0} \mathrm{i(t)} = \lim_{p\to\infty} \mathrm{p.i(p)} = \frac{\mathrm{V}-\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{C}}}{R}$

La valeur final de $\mathrm{i(t)}$:

$\lim_{t\to\infty} \mathrm{i(t)} = \lim_{p\to 0} \mathrm{p.i(p)} = 0$

A la fermeture de contact K la capacité se décharge et $\mathrm{i}(\infty) = 0$.