HAMDI HOCINE

AUTOMATISMES LOGIQUES

modélisation et commande

Volume 1- Annexe

notions sur les réseaux de PETRI

Les éditions de l'université Mentouri-Constantine

2002-2003

NOTIONS SUR LES RESEAUX DE PETRI (RDP)

INTRODUCTION

INTRODUCTION

C'est une méthode de description formelle d'un système, permettant une analyse à priori par l'analyse du graphe.

Les RDP constituent l'outil de spécification et de description des systèmes (ou de processus) présentant un parallélisme dans leur fonctionnement, avec des contraintes de synchronisation, qui a été le plus étudié et pour lequel il existe le plus grand nombre de résultats théoriques et de réalisations. Ceci pour plusieurs raisons:

- les RDP permettent une modélisation naturelle,
- le modèle mathématique sous-jacent aux RDP est simple, et il permet une sémantique aisée,
- l'existence de ce modèle facilite un traitement informatisé,
- ce modèle permet une détection de propriétés importantes pour l'étude du parallélisme et de la synchronisation, comme la présence de situations de blocage.

-I-DEFINITIONS

-1-Définition du RDP

Un réseau de Petri (RDP)est un graphe biparti orienté dont les arcs sont valués (càd ont une valeur).

Un RDP est un quadruplet R = (P, T, Pre, Post) où :

P = $\{p1, p2, \ldots, pm\}$ est un ensemble fini de ***places***,

T = $\{t1, t2, \ldots, tn\}$ est un ensemble fini de ***transitions***,

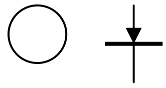
Pre : P x T $\rightarrow \mathbb{N}$ est une application dite incidence avant,

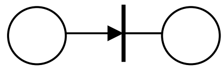
Post : P x T $\rightarrow \mathbb{N}$ est une application dite incidence arrière.

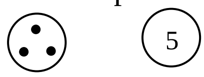
Intuitivement, les places représentent des sites, les transitions représentent des *actions* qui nécessitent des *conditions sur les sites*. Ces conditions sont par exemple la présence ou l'absence de *ressources*. On examinera l'état d'un système à travers les conditions satisfaites dans chaque site. L'état du système est représenté par un vecteur d'entiers appelé ***marquage***.

On définit l'application M: P $\rightarrow \mathbb{N}$ appelée marquage. Pour un marquage donné M, on associe à chaque place p le nombre de marques M(p) contenues dans la place p. Un marquage donne donc le nombre de ressources présent dans chaque site.

-2-Notations

Une place est représentée par un cercle et une transition par un tiret. 

On relie les places et transitions par des arcs orientés. 

Le marquage d'une place est indiqué par des points dans la place si le nombre de marques est faible, et par un chiffre s'il est élevé. 

M0 désigne le marquage initial d'un réseau de Petri. Une place peut donc être vide ou marquée.

-3-Graphe associé à un RDP

On appelle Γ l'application : $\overbrace{P \cup T}^{\text{ensemble des sommets du graphe}} \rightarrow 2^{P} \times 2^{T}$ qui définit les *successeurs* d'une place ou d'une transition.

Le graphe **G = (P, T, Γ , V)** associé au réseau de Petri **R = (P, T, Pre, Post)** est alors défini par:

$$\forall p \in P, \Gamma(p) = \left\{ t \in T / \mathrm{Pr}\,e(p,t) > 0 \right\}$$

$$\forall t \in T, \Gamma(t) = \left\{ p \in P / Post(p,t) > 0 \right\}$$

$$\forall p \in P, V(p,t) = \mathrm{Pr}\,e(p,t)$$

$$\forall p \in P, \forall t \in T, V(t,p) = Post(p,t)$$

Pre (p,t) est la valuation de l'arc menant de la place p à la transition t. Elle donne le nombre de ressources nécessaires dans la place (ou site) p pour que la transition (ou action) t soit franchie.

Post (p,t) est la valuation de l'arc menant de la transition t à la place p. Elle indique le nombre de ressources créées dans la place (ou site) p par le franchissement de la transition (ou action) t.

Pour qu'une action t puisse être exécutée, des conditions doivent être réalisées dans différents sites, comme par exemple la présence d'un certain nombre de ressources (pas nécessairement le même pour chaque site). L'ensemble de ces conditions sur les différents sites pour le franchissement de t sera donné par le vecteur **Pre (.,t)**, où le point renvoie aux différentes places possibles du graphe du RDP.

De même l'ensemble des ressources créées dans les différentes places par le franchissement de t sera noté **Post (.,t)**.

Si l'on généralise à l'ensemble des transitions du graphe, on obtiendra ainsi deux matrices (à composantes positives ou nulles) qui seront la représentation des deux applications Pre et Post. Pre (.,t) et Post (.,t) correspondent aux colonnes des deux matrices, **Pre (p,.)** et **Post (p,.)** correspondent aux lignes des matrices, où:

Pre (p,.) désigne le *lien amont* de la place p avec l'ensemble des transitions du graphe, càd chaque valeur du vecteur désigne le nombre de ressources nécessaire dans cette place p pour le franchissement de chaque transition du graphe,

Post (p,.) désigne le *lien aval* de la place p avec l'ensemble des transitions du graphe, càd chaque valeur du vecteur désigne le nombre de ressources créés dans cette place p par le franchissement de chaque transition du graphe.

Exemple1

Soient P = {p1, p2, p3, p4, p5} et T = { t1, t2, t3, t4, t5}. Déduire des matrices Pre et Post le graphe du réseau de Petri.

Pre	t1	t2	t3	t4	t5
p1	1	0	0	0	0
p2	0	1	0	0	0
p3	0	0	1	0	0
p4	0	0	0	1	0
p5	0	0	0	1	1

Post	t1	t2	t3	t4	t5
p1	0	0	0	1	0
p2	1	0	0	0	0
p3	1	0	0	0	1
p4	0	1	0	0	0
p5	0	0	1	0	0

Solution

L'application Γ définit les successeurs d'une place ou d'une transition. En l'appliquant on obtient:

Γ (p1) = { $t \in T / Pre(p1,t) > 0$ }= {t1}

Γ (p2) = {t2}

Γ (p3) = {t3}

Γ (p4) = {t4}

Γ (p5) = {t4,t5}

Γ (t1) = { $p \in P / Post(p,t1) > 0$ } = {p2,p3}

Γ (t2) = {p4}

Γ (t3) = {p5}

Γ (t4) = {p1}

Γ (t5) = {p3}

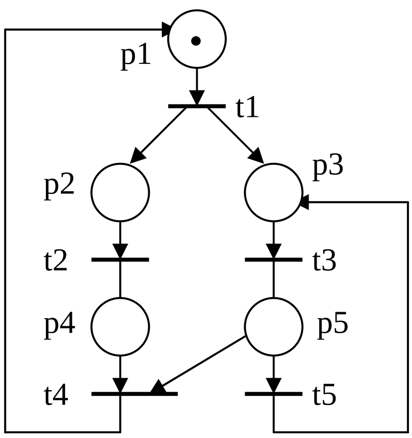


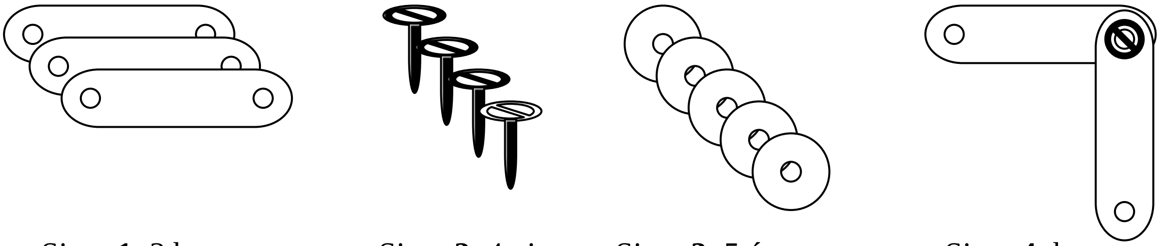
Figure 1

Remarques

* Marquage initial: M0 = (1 0 0 0 0) ^{t}
* Tous les arcs ont ici la valuation 1 qui est omise

Exemple 2

Des machines automatiques amènent des vis, des écrous, des barres, et assemblent les barres. Donner le graphe du RDP ainsi que les matrices Pre et Post.



Site **p1**: 3 barres — Site **p2**: 4 vis — Site **p3**: 5 écrous — Site **p4**: barres assemblées

Appelons p1, p2, p3, p4, les sites contenant respectivement les barres, les vis, les écrous, les barres assemblées. L'action d'assemblage est représentée par la transition **t1**.

Cette action nécessite 2 barres, 1 vis, 1 écrou, et crée un assemblage, ce qui est représenté respectivement par les arcs de p1 vers t1 (valuation 2), de p2 vers t1 (valuation 1), de p3 vers t1 (valuation 1), et de t1 vers p4 (valuation 1).

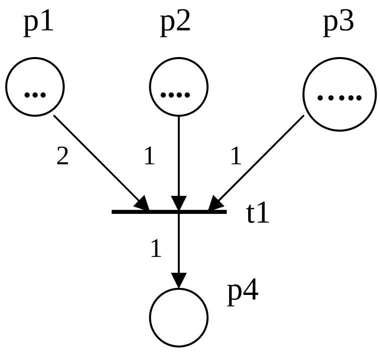


Figure 2

On a Post (p1,t1)= Post (p2,t1)= Post (p3,t1)= Pre (p4,t1) = 0
Pre (p2,t1)= Pre (p3,t1)= Post (p4,t1) = 1
Pre (p1,t1) = 2

Pre	t1
p1	2
p2	1
p3	1
p4	0

Post	t1
p1	0
p2	0
p3	0
p4	1

L'action représentée par t1 pet être effectuée car dans chaque site il y a un nombre suffisant de ressources. On dit que la transition t1 est ***franchissable*** pour un l'état donné du système. Quand t1 est franchie, on dit que t1 a été ***tirée***.

-II-REGLES DE FONCTIONNEMENT D'UN RDP MARQUE

-1-Définition 1: conditions de franchissement d'une transition

Une transition t est dite franchissable (ou validée) pour un marquage M, ssi (si et seulement si): $\forall pi \in P, M(pi) \geq \mathrm{Pre}(pi,t)$ (qu'on note également: $M \geq \mathrm{Pre}(.,t)$)

(On rappelle que si X et Y sont 2 vecteurs ayant I pour ensemble d'indices, on note:

$$X \geq Y \Leftrightarrow \forall i \in I \quad X(i) \geq Y(i) \text{).}$$

On peut donc dire que pour qu'une transition soit franchissable, il faut que toutes ses préconditions soient vérifiées, càd que chaque place qui y amène doit contenir au moins le nombre de marques indiqué sur l'arc la reliant à cette transition.

-2-Définition 2: conséquences du franchissement d'une transition

Si une transition t est franchissable pour un marquage M, le franchissement de t permet d'obtenir un nouveau marquage M' tel que: $\forall pi \in P, M'(pi) = M(pi) - \mathrm{Pre}(pi,t) + Post(pi,t)$

Autre notation: $M' = M - \mathrm{Pre}(.,t) + \mathrm{Post}(.,t)$

Le fait de franchir une transition entraînera la consommation des ressources spécifiées par la fonction Pre, et créera les ressources spécifiées par la fonction Post. On peut donc dire que le franchissement d'une transition réalise toutes ses post-conditions, càd qu'il met dans chaque place qui lui succède le nombre de marques indiqué par l'arc la reliant à cette transition.

Pour l'exemple 2 précédent le franchissement de t1 fait passer au marquage suivant:

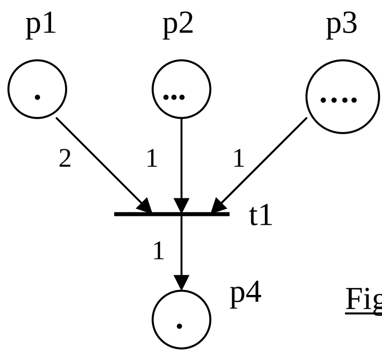


Figure 3

On remarque que pour ce nouveau marquage t1 n'est plu franchissable, car il n'y a pas assez de ressources dans la place p1 (il ne reste qu'une seule barre alors qu'il en faut 2 pour réaliser l'assemblage).

-3- Définitions 3 : conflits et concurrence

-3-a-Définition 3.1: conflit structurel

Deux transitions t1 et t2 sont en conflit structurel ssi elles ont au moins une place d'entrée en commun.

t1 et t2 en conflit structurel $\Leftrightarrow \exists p \in P : \ Pre(p,t1) \,.\, Pre(p,t2) \neq 0.$

-3-b-Définition 3.2: conflit effectif

Deux transitions t1 et t2 en conflit structurel sont de plus en conflit effectif pour un marquage M, si t1 et t2 sont franchissables pour M et $\exists p \in P: M(p) < Pre\,(p,t1)+Pre\,(p,t2)$

Exemple

Reprenons le graphe du RDP de l'exemple 1 du paragraphe I-3, avec comme marquage initial: M0 = $(1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$. Essayons de décrire l'évolution du RDP.

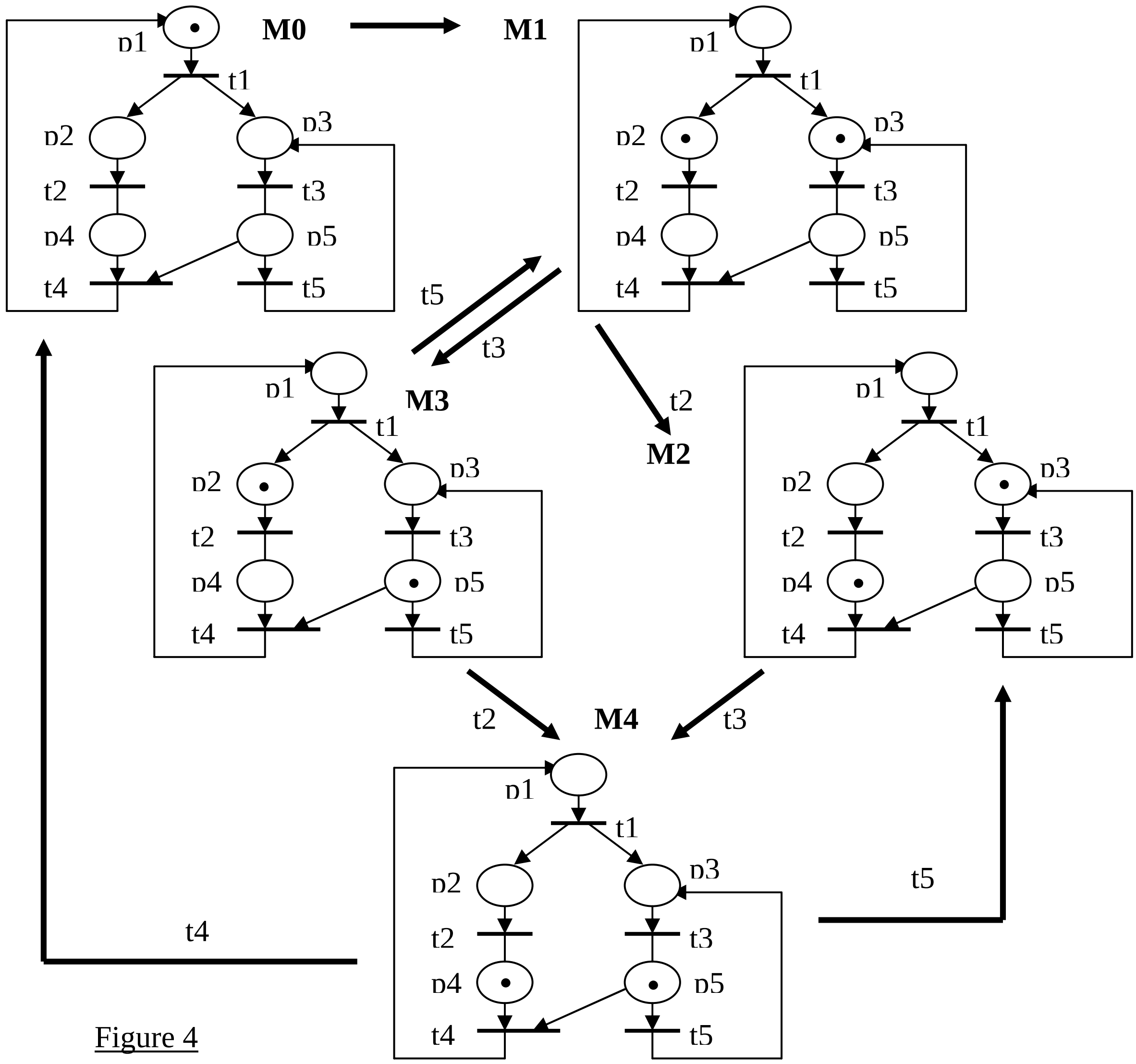


Figure 4

Les transitions t4 et t5 sont en conflit structurel car Pre (p5,t4) **.** Pre (p5,t5) = 1.

Pour le marquage M4, il y a en plus conflit effectif car : M4(p5) < Pre (p5,t4) + Pre (p5,t5).

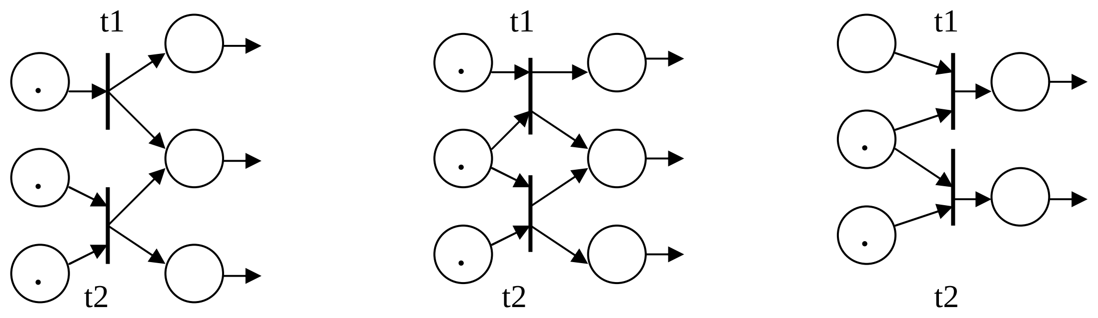
Remarques

- Pour un marquage donné plusieurs transitions peuvent être franchissables; le choix de la transition à franchir est purement arbitraire (exemple passage de M1 à M2 ou à M3).
- A partir d'un marquage, par exemple M1, le franchissement de t3 puis t5 fait arriver au même marquage que le franchissement de t5 puis t3. C'est la propriété de commutativité.

-3-c-Définition 3.3: concurrence

Deux transitions t1 et t2 sont en concurrence pour un marquage M ssi: elles ne sont pas en conflit structurel, et elles sont franchissables pour le marquage M.

Dans ce cas le franchissement de l'une ne met pas fin à la validation de l'autre.



t1 et t2 en concurrence *t1 et t2 en conflit effectif* *t1 et t2 en conflit structurel*

Figure 5 : conflits et concurrence

-III-RDP ET ALGEBRE LINEAIRE

-1-Matrice d'incidence

Définition

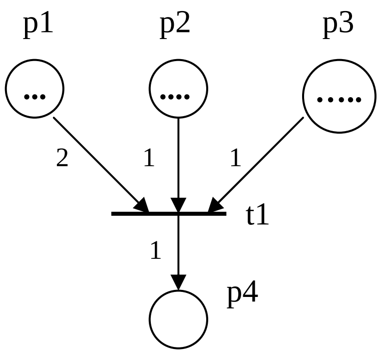
Etant donné un RDP R, sa matrice d'incidence C représente l'application : P x T ➔ Z définie par : $\forall p \in P,\ \forall t \in T,\ C(p,t) = Post\,(p,t) - Pre\,(p,t)$

$= M'\,(p) - M\,(p)$ (cf définition 2)

Cette matrice indique les modifications apportées sur les marquages des places par le franchissement des transitions.

Exemple

Reprenons l'exemple2



Pre	t1
p1	2
p2	1
p3	1
p4	0

Post	t1
p1	0
p2	0
p3	0
p4	1

C	t1
p1	-2
p2	-1
p3	-1
p4	1

-2-Propriétés d'un réseau

-2-a-Vivacité

Un réseau est dit ***vivant*** pour un marquage initial M0, si toute transition du réseau peut être validée (càd devient franchissable) puis tirée (càd franchie) par une séquence finie de tirs.

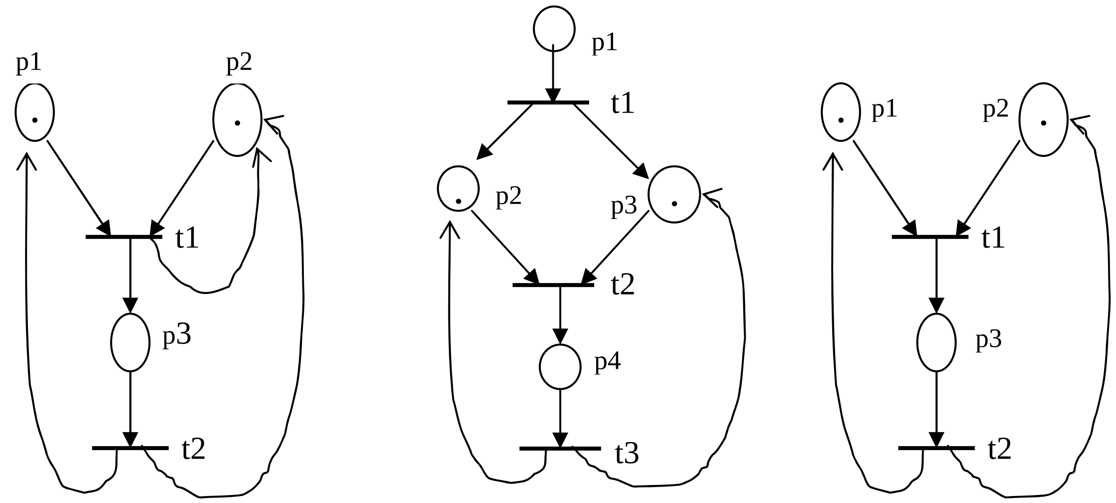
-2-b-Réseau sain

Un réseau est dit ***sain*** ou ***sauf*** pour un marquage initial M0, si quel que soit le marquage obtenu à partir de M0 par une séquence finie de tirs, aucune place ne possède plus d'une marque.

-2-c-Conformité

Un réseau vivant et sain est dit ***conforme***. Un réseau conforme a la propriété de ***pureté***. La réciproque n'est pas vraie.

Exemple3



Réseau vivant mais non sain car accumulation de marques dans place p2

Réseau sain mais non vivant car la transition t1 ne peut pas être tirée.

Réseau conforme

Figure 6

-2-d-Pureté

Un réseau est dit pur si et seulement si $\forall p \in P,\ \forall t \in T,\ Pre\,(p,t)\,\boldsymbol{.}\ Post\,(p,t) = 0.$

Cela signifie qu'aucune place n'est à la fois place d'entrée et place de sortie pour une même transition.

Cette condition garantit l'inexistence de réseaux constitués simplement d'une place et d'une transition. Elle garantit également l'indépendance entre le retrait et l'ajout de marques produites lors des franchissements. Par exemple le réseau de l'exemple 1 est pur.

Pour un réseau pur, la transition t est franchissable pour le marquage M ssi on arrive à un marquage M' tel que: M' = M + C(.,t) ≥ 0 (càd que M' est bien un marquage).

Pour un réseau pur la connaissance de C suffit pour reconstruire les matrices Pre et Post. En effet:

$$\left.\begin{array}{l} Pre = Post - C \\ Pre \,.\, Post = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Pre = \left\{\begin{array}{l} -C \text{ si } Post = 0 \\ 0 \text{ si } Post > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ sachant que } Pre\,(p,t) \geq 0, \text{ on en conclut que } \boldsymbol{Pre\,(p,t) = Max\left\{0\,,\,-C\right\}}$$

$$\text{de même: } \left.\begin{array}{l} Post = Pre + C \\ Pre \,.\, Post = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Post = \left\{\begin{array}{l} C \text{ si } Pre = 0 \\ 0 \text{ si } Pre > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ sachant que } Post\,(p,t) \geq 0, \text{ on en conclut que } \boldsymbol{Post\,(p,t) = Max\left\{0\,,\,C\right\}}$$

Exemple

On donne la matrice d'incidence C d'un RDP. Retrouver les matrices Pre et Post ainsi que le graphe du RDP.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution

On retrouve le graphe du RDP de la figure 1 de l'exemple 1.

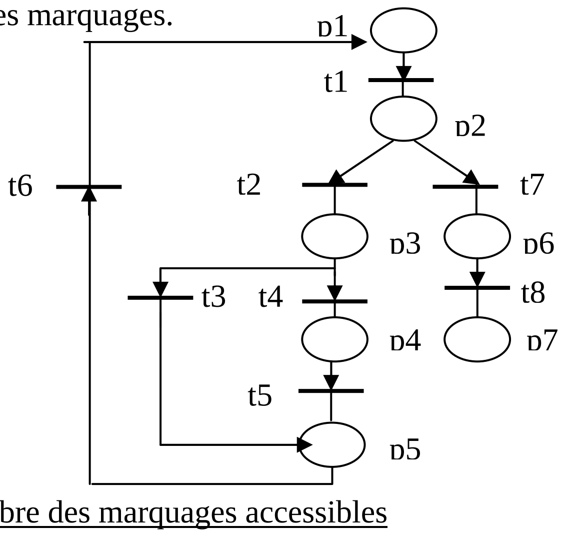
-2-e-Arbre, graphe et matrice des marquages

Pour tout réseau on peut établir l'*arbre des marquages* accessibles depuis le marquage initial M0. On peut ensuite en déduire la *matrice des marquages* M, dont les lignes désignent les places et les colonnes désignent les vecteurs marquages.

On peut également en déduire le *graphe des marquages* qui décrit bien le fonctionnement du système.

Exemple 4

Un RDP est décrit par son graphe suivant. Le réseau est il vivant, sain, conforme? Donner l'arbre, le graphe et la matrice des marquages.



Solution Arbre des marquages accessibles

$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$ M0 (le "t" signifie vecteur transposé) t1

$(0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$ M1

t2 t7

$(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$ M2 $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)^t$ M5

t3 t4 t8

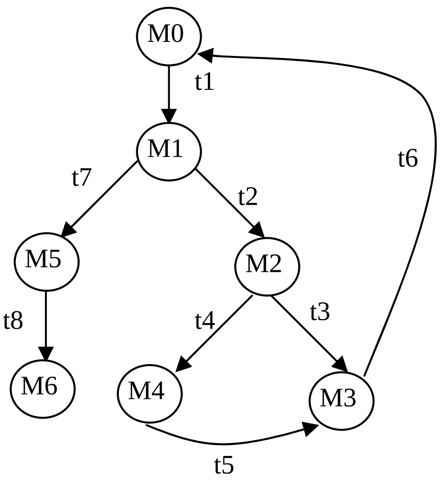
$(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^t$ M3 $(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0)^t$ M4 $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)^t$ M6

t6 t5 marquage mort

$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$ M0 $(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)^t$ M3

marquage dupliqué marquage dupliqué

<u>Graphe des marquages</u>



<u>Matrice des marquages: ***M***</u>

	M0	M1	M2	M3	M4	M5	M6
p1	1	0	0	0	0	0	0
p2	0	1	0	0	0	0	0
p3	0	0	1	0	0	0	0
p4	0	0	0	0	1	0	0
p5	0	0	0	1	0	0	0
p6	0	0	0	0	0	1	0
p7	0	0	0	0	0	0	1

<u>Remarques</u>

On observe sur le graphe des marquages que le chemin (M0M1M5M6) est une composante non connexe. Si le système suit ce chemin il arrive en situation de blocage.

On a deux cycles qui sont des séquences infinies de franchissement: (M0M1M2M4M3) et (M0M1M2M3)

-3-Vecteur caractéristique

Si en franchissant t1 on passe de M0 à M1, on peut écrire $|M1| = |M0| + |C(p,t1)|$

Si en franchissant t2 on passe de M1 à M2, on peut écrire $|M2| = |M1| + |C(p,t2)|$

Si en franchissant t_n on passe de M_{n-1} à M_n, on peut écrire $|M_n| = |M_{n-1}| + |C(p,t_n)|$

Si on considère un séquence S finie de tirs, qui fait passer du marquage M au marquage M', on appelle vecteur caractéristique $\overline{S}$ de la séquence S, le vecteur colonne à indices dans T, dont les composantes $\overline{S}(t_i)$ correspondent au nombre d'occurrences de chaque transition t_i dans la séquence S (càd le nombre de fois qu'apparaît la transition t_i dans la séquence S).

On peut alors écrire : $\boldsymbol{M' = M + C \cdot \overline{S}}$ $\quad (\overline{S}(t_i) \geq 0)$

Si on considère par exemple un RDP avec 5 transitions (t1…t5), et si on considère la séquence S = t1t2t3t3t1t4t1t1, le vecteur caractéristique de cette séquence est donné par :
$\overline{S} = (4\ 1\ 2\ 1\ 0)^t$.

Exemple5

La matrice ci contre représente la matrice d'incidence d'un réseau de Petri, dont le marquage initial est M0 $(1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^t$. Donner le marquage final correspondant à la séquence ayant pour vecteur caractéristique $\overline{S} = (1\ 1\ 1\ 0\ 1)^t$.

$$C(p,t) = \begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solution

$M' = M + C \cdot \overline{S} = (1\ \ 0\ 0\ \ 0\ 1\ 0)^t$. En effet

$$M' = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & +1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Remarques

-*- La relation M' = M + C . $\overline{S}$ permet de développer les techniques d'analyse de réseaux en utilisant l'algèbre linéaire en nombres entiers. L'algèbre linéaire permet une analyse sans passer par un examen de l'ensemble des états possibles du système.

-*- Considérons la relation M' = M0 + C . $\overline{S}$. S'il existe une séquence finie de tirs redonnant le marquage initial, on aura donc M0 = M0 + C . $\overline{S}$ ➔ **C . $\overline{S}$ = 0** . L'existence d'un vecteur $\overline{S} \neq 0$ à composantes entières positives ou nulles et solution du système linéaire à coefficients entiers, donné par C$\overline{S}$ = 0, conditionne l'existence d'une séquence de tirs correspondant à une évolution cyclique du marquage.

-*- On rappelle que le fait de dire vecteur $\overline{S} \neq 0$ signifie que ce vecteur doit avoir au moins une composante non nulle.

-4-Semi flot

Multiplions la relation M' = M + C . $\overline{S}$ par f^t , le transposé d'un vecteur colonne f. On obtient : f^t. M' = f^t.M + f^t.C . $\overline{S}$. Si le vecteur f est tel f^t. C = 0, on aura alors: $\boldsymbol{f^t.M' = f^t.M}$.

Cela signifie qu'on obtient une relation invariante sur le marquage des places. Quelle que soit la suite des transitions franchies pour passer d'un marquage M à un marquage M', cette relation sur le marquage des places sera vérifiée.

On appelle ***semi-flot*** un vecteur f d'entiers, solution de $\boldsymbol{f^t. C = 0}$.

Remarques

-*- La détermination des semi-flots peut être effectuée grâce à des techniques d'algèbre linéaire;

-*- le vecteur f est un vecteur colonne valuant les places du réseau de Petri, on l'appelle également vecteur pondération des places. Sa dimension est donc égale au nombre de places (c'est un vecteur marquage particulier);

-*- le semi-flot présente un grand intérêt: il permet par exemple d'étudier l'exclusion mutuelle de 2 places, la présence d'un état d'accueil, le fait qu'un réseau soit borné ou non.

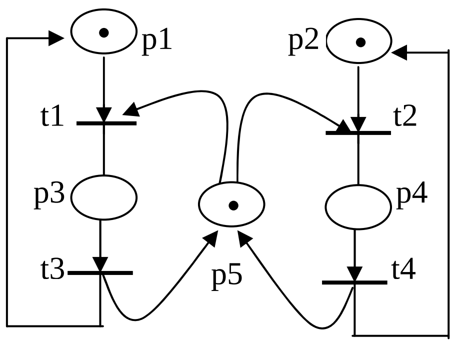
Exemple 6

On considère le RDP suivant avec M0 =(1 1 0 0 1) ^{t}.

1°Calculer la matrice d'incidence

2°Vérifier que le vecteur f = (0 0 1 1 1)^t est bien un semi-flot pour tout marquage accessible.

3°En conclure que p3 et p4 son en exclusion mutuelle.



càd ne peuvent contenir de marques en même temps.

Solution

1°

Post	t1	t2	t3	t4
p1	0	0	1	0
p2	0	0	0	1
p3	1	0	0	0
p4	0	1	0	0
p5	0	0	1	1

Pre	t1	t2	t3	t4
p1	1	0	0	0
p2	0	1	0	0
p3	0	0	1	0
p4	0	0	0	1
p5	1	1	0	0

C(p,t)	t1	t2	t3	t4
p1	-1	0	1	0
p2	0	-1	0	1
p3	1	0	-1	0
p4	0	1	0	-1
p5	-1	-1	1	1

2° $f = (0\ 0\ 1\ 1\ 1)^t \Rightarrow f^t = (0\ 0\ 1\ 1\ 1)$.

Pour que f soit un semi-flot il faut qu'il vérifie la relation $f^t \cdot C = 0$.

$f^t \cdot C = 0$? $\Leftrightarrow$ $(0\ 0\ 1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ \ 0\ 0)$. f est donc bien un semi-flot.

3° f est un semi-flot, il l'est donc pour tout marquage accessible. Donc $\forall$ M marquage accessible à partir de M0, on a la relation $f^t .M = f^t .M0 \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} M(p3) + M(p4) + M(p5) = M0(p3) + M0(p4) + M0(p5) = 1 \\ \forall\ pi \in P, \text{ par définition } M(pi) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

On peut alors conclure que pour tout marquage accessible M, on ne peut pas avoir en même temps M(p3) = M(p4) = 1. Donc p3 et p4 sont exclusives.

-5-Vecteur validation

Définition

On appelle vecteur validation V pour un marquage initial M0, un vecteur colonne de dimension m égale au nombre de transitions, qui donne pour le marquage considéré l'ensemble des transitions validées par ce marquage initial (Vi= 1si ti est validée par le marquage M0, sinon Vi = 0).

Conséquence

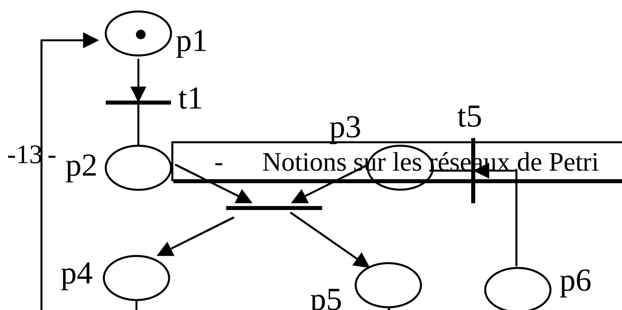
Pour un réseau sain le vecteur validation peut être calculé directement par la relation:

$V = \overline{[\,[Pre(p,t)]^t \otimes [\overline{M0}]\,]}$ où : (on calcule d'abord $\overline{V} = [\,[Pre(p,t)]^t \otimes [\overline{M0}]\,]$)

$\overline{M0}$: complément binaire de M0 ***Transposé***: les coefficient a_{ij} de $[Pre(p,t)]^t = a_{ji}$ de Pre (p,t)

$\otimes$: produit matriciel booléen obtenu en faisant terme à terme le produit des lignes de $[Pre(p,t)]^t$ et du vecteur colonne $\overline{M0}$, puis la somme *logique* de ces produits.

Exemple7



Soit le RDP suivant avec comme marquage initial $M0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)^t$.

Si le réseau est sain, calculer le vecteur validation algébriquement.

Solution

Le réseau est sain donc on peut calculer le vecteur validation algébriquement

$$Pre(p,t) = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \qquad [Pre(p,t)]^t = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \qquad M0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overline{M0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{V} = [\ [Pre(\overline{p,t})]^t \otimes [M0]\ ] = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1+1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

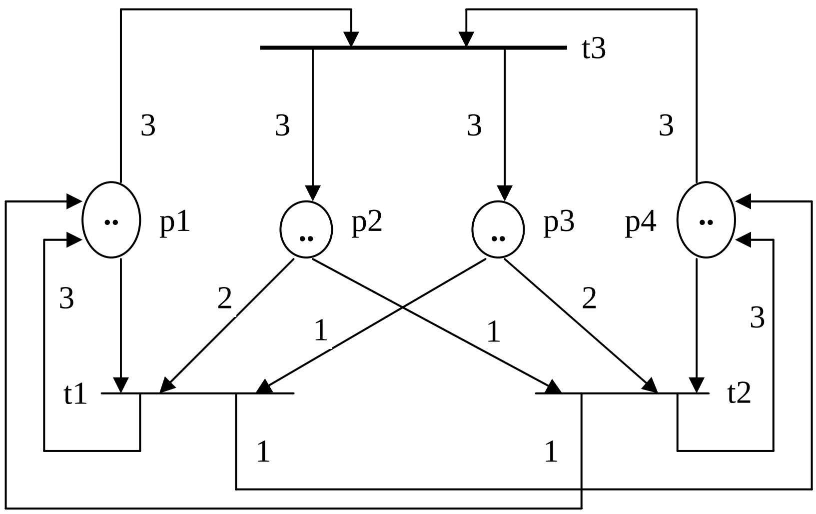
➔ $V = (1\ 0\ \ 0\ \ 1\ 0)^t$

-6-Etat d'accueil et classe d'accueil

L'état d'accueil Ma caractérise un marquage toujours accessible quelle que soit l'évolution du réseau. Il peut représenter un état stable du système ou un état duquel on peut effectuer une reprise.

Une classe d'accueil Ca est un ensemble de marquages tel que, à partir de tout marquage accessible, on peut atteindre un des marquages de Ca.

Exemple 8



Solution

On remarque que le réseau est entièrement symétrique.

Ce réseau n'admet pas d'état d'accueil. Il suffit de voir que le graphe des marquages atteints (dérivé de l'arbre des marquages accessibles) possède deux composantes fortement connexes disjointes.

$(2\ 2\ 2\ 2)^t$ M0

t1 → $(4\ 0\ 1\ 3)^t$ M1 ; t2 → $(3\ 1\ 0\ 4)^t$ M4

$(4\ 0\ 1\ 3)^t$ M1 $\xrightarrow{t3}$ $(1\ 3\ 4\ 0)^t$ M2 $\xrightarrow{t1}$ $(3\ 1\ 3\ 1)^t$ M3 $\xrightarrow{t2}$ M1

$(3\ 1\ 0\ 4)^t$ M4 $\xrightarrow{t3}$ $(0\ 4\ 3\ 1)^t$ M5 $\xrightarrow{t2}$ $(1\ 3\ 1\ 3)^t$ M6 $\xrightarrow{t1}$ M4

<u>Arbre des marquages accessibles</u>

Exemples de classes d'accueil: Ca = { (4 0 1 3), (3 1 0 4) } ; C'a = {(1 3 4 0), (1 3 1 3)}

-7-Réseau borné

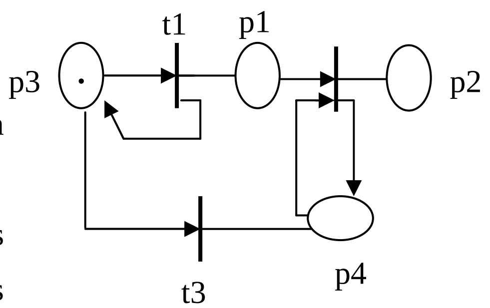
-*- Une place p d'un réseau marqué <R;M0> est dite k bornée, si

$\forall$ ***M***, *(marquage accessible),* ***on a M (p) ≤ k*** .

-*- Un *réseau marqué <R;M0> est borné*, si toute place est k borné.

-*- Un réseau est borné si pour tout marquage accessible M, le réseau marqué <R;M> est borné.

<u>*Exemple 9*</u>



- p3 et p4 sont 1-bornées ou binaires.
- p2 est non bornée ainsi que p1 (car on peut avoir un nombre infini de marques).

Le franchissement de t1 accroît le nombre de marques de p1 d'un nombre aussi grand que l'on veut, et toutes ces marques peuvent ensuite être accumulées dans p2.

-*- Les 3 propositions suivantes sont équivalentes:

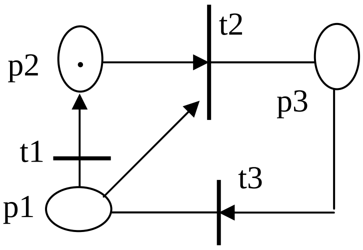
1° R est borné   2° Il n'existe pas de vecteur $g \geq 0$ tq $C.g > 0$ 3°$\exists$vecteur $f > 0$ tq $f^t.C \leq 0$

La proposition 3 revient à dire qu'***il suffit de prouver l'existence d'un semi-flot pour conclure que le réseau est borné***.

<u>*Exemple 10*</u>

Soit le réseau suivant. Trouver un vecteur f qui rende le réseau borné.

Solution



Pré	t1	t2	t3
p1	1	1	0
p2	0	1	0
p3	0	0	1

Post	t1	t2	t3
p1	0	0	1
p2	1	0	0
p3	0	1	0

C	t1	t2	t3
p1	-1	-1	+1
p2	+1	-1	0
p3	0	+1	-1

On cherche un vecteur f qui rend le réseau borné. f $(a\ b\ c)^t$ est un vecteur colonne tel que $f^t.C \leq 0$ ➔

$$(a\ b\ \ c)\begin{pmatrix} -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \end{pmatrix} \leq 0 \iff \left.\begin{matrix} -a + b \leq 0 \\ -a - b + c \leq 0 \\ a - c \leq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\, b \leq a \leq c \leq a + b \,\}$$

Une solution qui rend le réseau borné est f = $(1\ 1\ 2)^t$.

-IV-EXTENSIONS DES RDP

La modélisation par réseau de Petri fait aboutir souvent à des réseaux extrêmement complexes. Aussi pour diminuer la taille de ces réseaux, on étend le modèle soit pour permettre un gain de puissance effective, soit une plus grande concision de description. Plusieurs extensions existent, et nous en citerons quelques unes à titre indicatif.

-1-RDP interprété

Les places et les transitions sont interprétés soit à l'aide d'un langage, soit à l'aide de relations utilisant un certain formalisme (tel que celui de Baccus-Naur par exemple). Dans le cas le plus simple il s'agit de commentaires ou de variables précisant la nature des opérations ou des informations.

-2-RDP synchronisé

Le réseau est synchronisé sur l'évolution d'événements extérieurs, comme par exemple le démarrage d'un moteur sur le front montant (passage de 0 à 1) d'un bouton poussoir.

-3-RDP temporisé (pour l'ordonnancement des tâches)

Au niveau franchissement d'une transition, on introduit la notion temporelle (càd que dès qu'une transition est validée, on luit met une date de début et après une date de fin de validation). On a donc une modélisation dynamique qui représente plus fidèlement le système.

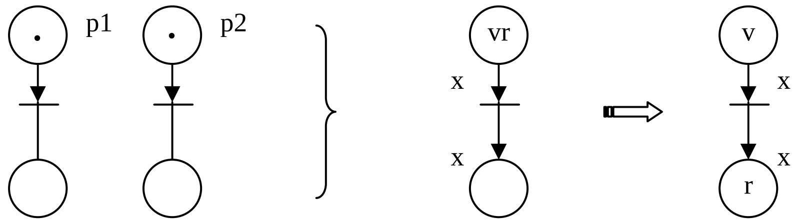
-4-RDP à règles de priorité

Pour modéliser les conflits (surtout pour l'allocation des ressources), les définitions que l'on a établies pour les RDP ne permettent pas de fixer des priorités. Il faut donc donner de nouvelles définitions et on se retrouve alors en présence de RDP à règles de priorité.

-5-RDP colorés

De manière intuitive on peut dire que dans un réseau coloré les marques possèdent une couleur qui permet de les distinguer entre elles. A la différence des réseaux à arcs inhibiteurs ou à règles de priorité, les modifications portent ici non seulement sur les règles de franchissement, mais aussi sur la nature des marques.

Supposons par exemple que le réseau suivant modélise l'activité de deux processus. On pourrait condenser ce réseau en un seul où les marques auraient une couleur. Par exemple les marques du 1° sont colorées en vert, et celles du 2° en rouge. La transition prendra donc une marque d'une couleur donnée que l'on appellera x de la place correspondant à un processus, et la remettra dans la place suivante du processus correspondant.



Il est à remarquer que dans ce formalisme, l'ordre d'arrivée des marques dans les places n'est pas conservé. Si c'était le cas on obtiendrait des réseaux à files d'attente.

-6-RDP généralisé

Prenons un réseau de Petri interprété, sur lequel on donne des indications sur la nature des places et des transitions, et mettons les actions au niveau des places et les informations au niveau des transitions, tout en conservant cependant les règles de fonctionnement des RDP. Nous obtenons ainsi un RDP généralisé dont le graphe ressemble beaucoup à celui du grafcet dans lequel la place remplace l'étape: comme pour ce dernier les informations formant les réceptivités sont situées au niveau des transitions, et les actions associées au étapes se retrouvent au niveau des places.

-V-EXERCICE D'APPLICATION: PRODUCTEUR-CONSOMMATEUR

ENNONCE

Considérons deux processus, l'un appelé producteur et l'autre consommateur.

Le producteur produit des données et les dépose une à une dans un buffer qui a une capacité finie n. Le processus consommateur consomme une à une les données produites.

1°Modéliser les deux processus par un RDP en tenant compte des contraintes de coopération et de synchronisation entre les deux processus (il est à remarquer que les deux processus doivent être exclusifs pour les opérations dans le buffer).

2°Montrer que pour le marquage initial $M0= (1\ 0\ 1\ 0\ n\ 1\ 0)^t$ on a :

-a- $M (p5) \leq n \ \forall M$ accessible depuis M0 (càd taille du buffer limitée à n).

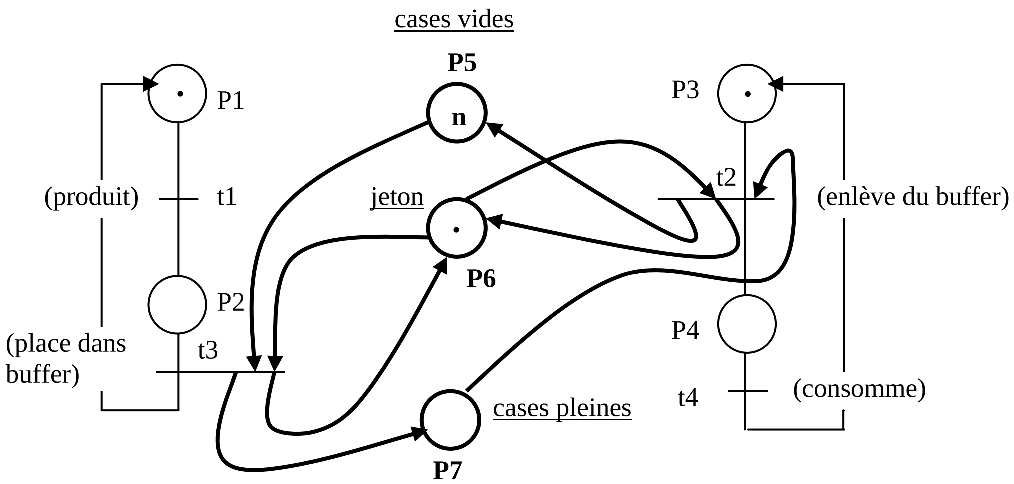
-b- $M (p7) \leq n$. (càd la capacité du buffer ne sera jamais dépassée).

-c- $M (p6) \leq 1$ (càd les deux processus sont exclusifs).

SOLUTION

1°Modélisation

On représente d'abord chaque processus par un graphe, puis on représente les contraintes de synchronisation (en traits gras sur le dessin).



-*- Pour que le producteur puisse mettre dans le buffer, il faut que ce dernier ne soit pas plein. Il nous faut donc une place p6 qui indique le nombre de positions libres dans le buffer. Au départ M (p5) = n .

-*- Si le buffer est vide, il faut que le consommateur le sache. Il faut donc également une place p7, dont le marquage indique le nombre de positions occupées dans le buffer. Au marquage initial M(p7) = 0.

-*- Pour les opérations dans le buffer, les 2 processus doivent être exclusifs. Il faut donc rajouter une place (p6) qui joue le rôle de boîte aux lettres ou jeton, par lequel les 2 processus communiquent pour dire "j'accède au buffer" ou "buffer libre". Au départ M (p6) =1 .

2°-a- Montrons d'abord que le réseau possède un semi flot . Cherchons donc un vecteur $f \neq 0$ tel que $f^t . C = 0$.

Pre	t1	t2	t3	t4
p1	1	0	0	0
p2	0	0	1	0
p3	0	1	0	0
p4	0	0	0	1
p5	0	0	1	0
p6	0	1	1	0
p7	0	1	0	0

Post	t1	t2	t3	t4
p1	0	0	1	0
p2	1	0	0	0
p3	0	0	0	1
p4	0	1	0	0
p5	0	1	0	0
p6	0	1	1	0
p7	0	0	1	0

C	t1	t2	t3	t4
p1	-1	0	1	0
p2	1	0	-1	0
p3	0	-1	0	1
p4	0	1	0	-1
p5	0	1	-1	0
p6	0	0	0	0
p7	0	-1	1	0

$f^t = (f1\ f2\ f3\ f4\ f5\ f6\ f7)$

$$f^t . C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -f1 + f2 = 0 & (1) \\ -f3 + f4 + f5 - f7 = 0 & (2) \\ f1 - f2 - f5 + f7 = 0 & (3) \\ f3 - f4 = 0 & (4) \end{cases}$$

* f6 n'apparaît nulle part ➔ f6 peut prendre n'importe quelle valeur
* (1) ➔ f1 = f2 (4) ➔ f3 = f4
* (2) et (3) ➔ f5 = f7

-b- Choisissons par exemple comme semi-flot le vecteur $f = (0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)^t$.

$f^t .C = 0$. Par conséquent ce vecteur f est bien un semi flot. Donc $\forall M$ marquage accessible à partir de M0, on aura la relation invariante sur les marquages: $f^t .M = f^t .M0$

$\Leftrightarrow$ M (p5) + M (p7) = n. Comme les marquages sont ≥ 0, par conséquent

M (p5)$\leq$n et M (p7) $\leq$n .

-c- Choisissons comme semi flot le vecteur f tel que : $f^t = (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)$.

$f^t .C = 0$. Par conséquent ce vecteur f est bien un semi flot. Donc $\forall M$ marquage accessible à partir de M0, on aura la relation invariante sur les marquages: $f^t .M = f^t .M0$ ➔ M (p6) = 1.