Sciences de la matière- première année 2018-2019

Maths 1

INTEROGATION ECRITE

Exercice 1 (5 points)

Montrer par récurrence que :

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ *est divisible par* 7 $\forall n \in IN$.

Exercice 2 (10 points)

Soit La fonction suivante :

1. f(x) = x (1-x) , sur IR.
2. Montrer que : $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$ sur $[0,1]$, $et |f(x)| \leq 2$, $\forall x : -1 \leq x \leq 1$.
3. Si on pose sur IR , $h(x) = x^2$
   $définir\ f\ o\ h$, $h\ o\ f$ $que\ remarquez - vous?$
4. Montrer que : $\sum_{i=0}^{i=n} (f(x))^i \leq \frac{4}{3}$.

Exercice 3 (5 points)

Soit l'application f : $Z \longrightarrow Z$

$$n \to f(n) = \begin{cases} n+2, & si\ n\ est\ paire \\ n+4, & si\ n\ est\ impaire \end{cases}$$

1. Montrer que si n est paire alors (n -2) est paire et si n est impaire alors (n-4) est impaire , puis en déduire que f est surjective.
2. Est-ce que f est surjective si on remplace Z par IN .

Sciences de la matière - 2018 - 2019
Première année - Maths 1

Corrigé de l'interrogation écrite

Exercice 1 (5 points)

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ divisible par 7, $\forall n \in \mathbb{N}$

pour $n = 0$, $3 + 2^2 = 7$, vraie. (1)

on suppose que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est vraie pour $n+1$?

(1) $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+2+1}$

$= 3^{2n+1} \cdot 3^2 + 2^{n+2} \cdot 2 = 3^{2n+1}(7+2) + 2^{n+2} \cdot 2$

$= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2\left[3^{2n+1} + 2^{n+2}\right] = 7 \cdot 3^{2n+1} + 2(7k) = 7k'$ (3)

Exercice 2. (10 points) [1,5 - 1,5 - 1,5 - 1 - 1 - 1 - 2,5]

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$ (0,5) (0,5)

$x \geq 0$, $(1-x) \geq 0$ (0,5) $\Rightarrow x(1-x) = f(x) \geq 0$.

$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$? $\Rightarrow x(1-x) - \frac{1}{4} = \frac{4x(1-x) - 1}{4} = \frac{-4x^2 + 4x - 1}{4}$

$= -\frac{(4x^2 - 4x + 1)}{4} = -\frac{(2x-1)^2}{4} \leq 0$

$|f(x)| = |x(1-x)| = |x||1-x| \leq |x|(1 + |x|) \leq (1+1) = 2$. (0,5) (0,5)

$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1$ (0,5)

$f \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2) = x^2(1-x^2)$ (1)

$h \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x(1-x)) = x^2(1-x)^2$ (1)

on remarque : $(h \circ f)(x) \neq (f \circ h)(x)$ (1)

$$f(x) \leq \frac{1}{4} \Rightarrow (f(x))^i \leq \left(\frac{1}{4}\right)^i.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} (f(x))^i \leq \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(\underbrace{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}_{<1}\right) \leq \frac{4}{3}.$$

(2,5)

Exercice 3 (5 points)

1) (0,5) n paire $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow n-2 = 2k-2 = 2(k-1) = 2k'$

(0,5) n impaire $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n-4 = 2k+1-4 = 2k-3$
$= 2(k-2)+1$
$= 2k'+1$.

donc $\forall n \in \mathbb{Z}$ — n est paire ou n est impaire

si n est paire $\Rightarrow (n-2)$ est paire donc $f(n-2) = (n-2)+2 = n$. (1)

donc $\exists n' = n-2$ tq $n = f(n')$

si n est impaire $\Rightarrow (n-4)$ est impaire $\Rightarrow f(n-4) = (n-4)+4 = n$.

donc $\exists n' = n-4$ tq $n = f(n-4)$.

donc f est surjective. (1)

2) Si $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

on remarque 0, 1, et 3 n'ont pas d'antécédents (2)

donc g n'est pas surjective.