

10 = التمرين 1 (8 نقاط): تتحرك نقطة مادية في المستوي المنسوب إلى جملة الإحداثيات القطبية $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ على المسار المعروف بالمعادلات الوسطية: $\rho = ae^{-\theta}$ و $\theta = \omega t$ مع a و ω ثابتا موجبة.

- 1- احسب شعاع السرعة و شعاع التسارع وطولتيهما ثم استنتج شعاع الوحدة المماسي للمسار في المعلم $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.
- 2- اوجد شعاع التسارع المماسي للمسار وشعاع التسارع الناظمي عليه في المعلم $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ثم استنتج نصف قطر انحناء المسار.

θ	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$e^{-\theta}$	0.59	0.45	0.35	0.21	0.09	0.04

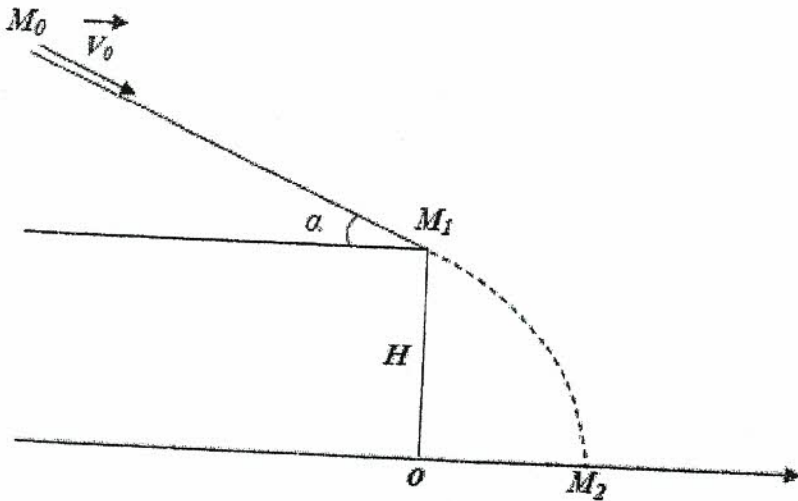
3- لما نأخذ $a = 4$ بطول شعاع الوحدة و $\omega = 1 \text{ rd/s}$:

- أ- ارسم المسار لما تتغير θ بين 0 و π (استعن بالجدول).
- ب- مثل على الشكل شعاع السرعة وشعاع التسارع عند نقطة الإنطلاق $A(\theta = 0)$.
- ت- مثل \vec{v}_t و \vec{v}_n ومركز انحناء المسار C عند النقطة $B(\theta = \frac{\pi}{2})$.

التمرين 2 :- (12 نقطة)

نقطة مادية كتلتها m ، تنزلق على مستوي مائل زاوية ميله α ، بين النقطتين M_0 و M_1 تبعدان بمسافة d ، تتم الحركة باحتكاك معاملته f (انظر الشكل).

- 1- مثل القوى المؤثرة في النقطة المادية، ثم حدد القيمة الصغرى للزاوية α_{min} التي تبدأ معها الحركة (1.5)
 - 2- نأخذ زاوية $\alpha > \alpha_{min}$ ، أكتب القانون الأساسي للتحريك، ثم استخرج عبارة التسارع (2)
 - 3- تنطلق النقطة من M_0 بسرعة ابتدائية \vec{v}_0 ، أوجد قيمة السرعة \vec{v}_1 عند النقطة M_1 (2)
 - 4- عند M_1 ينتهي المستوي المائل، وتبدأ النقطة المادية سقوطا حرا من ارتفاع H ، أكتب من جديد القانون الأساسي للتحريك، استخرج معادلة المسار، ثم استنتج إحداثيات نقطة السقوط M_2 و سرعة السقوط \vec{v}_2 (4.5)
 - 5- عند الاصطدام بالأرض، ترتد النقطة نحو الأعلى بسرعة \vec{v}_2 ، حيث: $V'_{2x} = \frac{3}{4}V_{2x}$ و $V'_{2y} = -\frac{3}{4}V_{2y}$ (2)
- أوجد أعلى ارتفاع تصله النقطة، ثم صف ما يحدث بعد ذلك.



$\vec{V}(M) = \frac{dOM}{dt}$ (0,25) $OM = a e^{-\omega t} \cdot \vec{u}_\theta$ (0,25) - 1

$\|\vec{V}(M)\| = \sqrt{2} a \omega e^{-\omega t}$ (0,25) $\vec{V}(M) = a \omega e^{-\omega t} [-\vec{u}_s + \vec{u}_\theta]$ (1)

$\|\dot{\gamma}(M)\| = 2 a \omega^2 e^{-\omega t}$ (0,25) $\dot{\gamma}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = -2 a \omega^2 e^{-\omega t} \cdot \vec{u}_\theta$ (1)

$\vec{V}(M) = \|\vec{V}(M)\| \cdot \vec{u}_T$ (0,25) $\Rightarrow \vec{u}_T = \frac{\sqrt{2}}{2} [-\vec{u}_s + \vec{u}_\theta]$ (0,25)

$\dot{\gamma}_T = \frac{d\|\vec{V}(M)\|}{dt} = -\sqrt{2} a \omega^2 e^{-\omega t} \Rightarrow \dot{\gamma}_T = \dot{\gamma} \cdot \vec{u}_T = a \omega^2 e^{-\omega t} [\vec{u}_s - \vec{u}_\theta] \cdot \vec{u}_T$ (0,5)

$\dot{\gamma}_N = \dot{\gamma} - \dot{\gamma}_T = -a \omega^2 e^{-\omega t} [\vec{u}_s + \vec{u}_\theta]$ (0,15)

$\|\dot{\gamma}_N\| = \sqrt{2} a \omega^2 e^{-\omega t} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{\dot{\gamma}_N} = \sqrt{2} a e^{-\omega t}$ (0,5)

- P - 3

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	(0,25)
$4e^{-\theta}$	4	2.36	1.80	1.45	0.84	0.36	0.16	

(0,25) $\vec{V}(A) = 4 [-\vec{u}_s + \vec{u}_\theta]$: A في - ب
 (0,25) $\dot{\gamma}(A) = -8 \cdot \vec{u}_\theta$

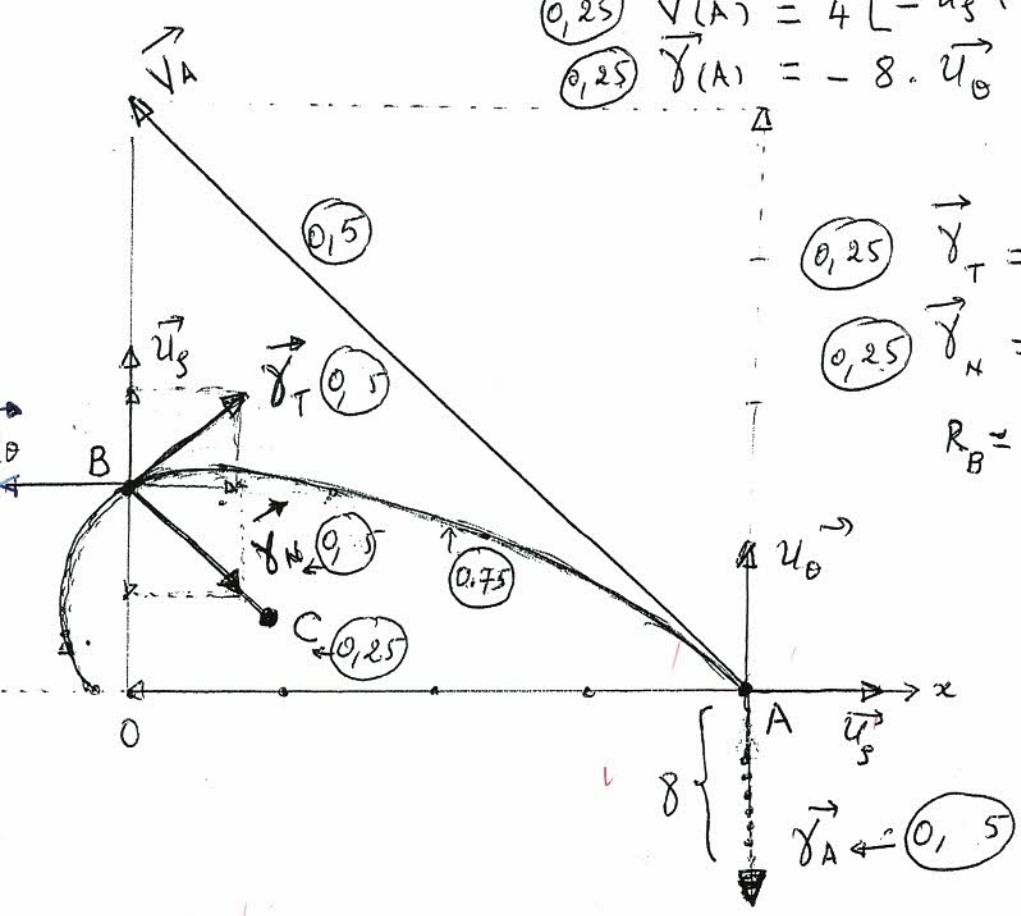
: B في - ->

(0,25) $\dot{\gamma}_T = 0.84 [\vec{u}_s - \vec{u}_\theta]$

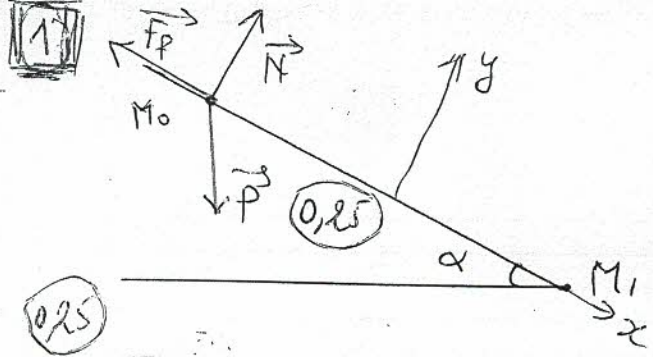
(0,25) $\dot{\gamma}_N = -0.84 [\vec{u}_s + \vec{u}_\theta]$

$R_B = 1.2$, $\vec{BC} = R_B \cdot \vec{u}_N$
 (0,25) $= 1.2 \cdot \vec{u}_N$

نصف قطر انحناء = R_B
 المساء في B



حل التمرين ٤ :-



توى المؤثرة هي: \vec{P} , \vec{N} , \vec{F}_f
 الحركة عندما تكون مركبة \vec{P} الموازية
 كيو من \vec{F}_f في الحالة الحديثة

0,25
 $f = \frac{F_f}{N}$

مع العلم أن $P \sin \alpha_{min} = N$ ومعامل الاحتكاك $P \sin \alpha_{min} = F_f$

لتعويض نجد: $\alpha_{min} = \text{Arctg}(f) \Leftrightarrow f = \frac{P \sin \alpha_{min}}{P \cos \alpha_{min}} = \text{tg} \alpha_{min}$ (0,5)

في حالة الحركة نجد دائما $f < \text{tg} \alpha$ او $\alpha > \text{Arctg}(f)$ (0,25)

من أجل $\alpha > \alpha_{min}$ تتم الحركة على المستوى المائل حسب قانون نيوتن

(0,5) $P \sin \alpha - F_f = m \delta_x$: 01
 (0,5) $N - P \cos \alpha = 0$: 02

بالإسقاط نجد $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_f = m \delta$ (0,5)

استعمال معامل الاحتكاك نجد

$\delta_x = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$ (0,5)

السرعة δ_x ثابتة والحركة متسارعة بانتظام. يمكن أن تستعمل أي من العلاقات الخاصة بهذا النوع من الحركة، لكن أحسن علاقة

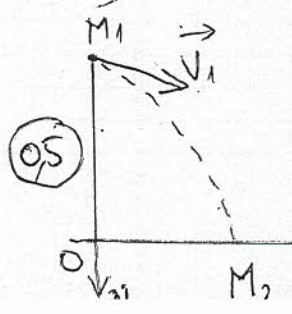
عند M_0 , $x_0 = 0$, $v_{x0} = v_0$ (0,25)
 عند M_1 , $x_1 = d$, $v_{x1} = v_1$ (0,25)

مع $v_x^2 - v_{x0}^2 = 2 \delta_x (\alpha - \alpha_0)$ (0,5)

(0,5) $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gd(\sin \alpha - f \cos \alpha)}$

$v_1^2 - v_0^2 = 2g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cdot d$

التدار من M_1 تكون لدينا حركة قذيفة وقانون نيوتن يكتب



(0,5) $\delta_x = 0$: 01
 (0,5) $\delta_y = g$: 02

$\vec{P} = m \delta$
 الإسقاط نجد (0,5)

2] السرعة الابتدائية (M1) \vec{V}_1 واحدات $M_1(0, -H)$ وحدها \vec{V}_1 $\begin{pmatrix} V_1 \cos \alpha \\ V_1 \sin \alpha \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 0,25 \\ 0,25 \end{matrix}$

$$\begin{cases} V_x = V_1 \cos \alpha & 0,25 \\ V_y = V_1 \sin \alpha + gt & 0,25 \end{cases}$$

بمكاملة السارع نجد:

وبمكاملة السرعة نجد:

$$\begin{cases} x = V_1 \cos \alpha t & 0,25 \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + V_1 \sin \alpha t - H & 0,25 \end{cases}$$

عند النقطة $M_2(x_2, 0)$ ويكون الزمن t_2 نعوض في المعادلتين ثم نستخرج الزمن t_2 لنجد

$$t_2 = \frac{-V_1 \sin \alpha + \sqrt{V_1^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g}$$

و نجد في الأخير مكان السقوط

\vec{V}_2 تكون السرعة $x_2 = V_1 \cos \alpha t_2 = V_1 \cos \alpha \times \frac{-V_1 \sin \alpha + \sqrt{V_1^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g}$

الحركة حسب oy مسارية بانتظام \vec{V}_2 لاستخراج V_{2y} لذلك نستعمل: $\begin{pmatrix} V_1 \cos \alpha \\ V_2 y \end{pmatrix}$

$$V_{2y}^2 - V_{1y}^2 = 2gH$$

لنجد

$$\Leftarrow V_{2y}^2 = V_{1y}^2 + 2gH$$

$$V_{2y} = \sqrt{V_1^2 \sin^2 \alpha + 2gH} \quad 0,25$$

وتكون قيمة السرعة عند M_2

$$V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + V_{2y}^2} \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gH} \quad 0,25$$

$$V_2 = \sqrt{V_0^2 + 2g[H + d(\sin \alpha - f \cos \alpha)]}$$

في الأخير نجد بالتعويض

$$\vec{V}_2 \begin{cases} V_{2x}' = \frac{3}{4} V_{2x} \\ V_{2y}' = -\frac{3}{4} V_{2y} \end{cases} \quad 0,25$$

5] بعد التصادم والإرتداد تصبح السرعة: الحركة هي حركة حذيفة بسارع g

أعلى نقطة تصلها النقطة $M_3(x_3'', -h)$ عندها تكون السرعة أفقية بتطبيق قانون السرعة حسب (oy) نجد

$$V_{2y}'' = 0 \quad 0,25$$

3

التعريف $h = \frac{V_{2y}^2}{2g}$

$V_{2y}^2 - V_{1y}^2 = -2gh$

$h = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{V_{1y}^2}{2g} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 H + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{V_1^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ (0,5)

بعد M_2 تعود النقطة المادية للسقوط بدون سرعة حسب (0,5) لتسقط
في النقطة M_3 ثم ترتد من جديد حتى النقطة M_3 من أجل
ارتفاع h له نفس العلاقة السابقة ل h ولكن بدون سرعة

بتدائية أي: $h' = \left(\frac{3}{4}\right)^2 h$ (0,25)

لتراجع نجد العلاقة العامة وهي: $h^{(n)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} h$

كل مرة يتناقص الارتفاع إلى أن ينعدم فتتوقف الحركة

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = 0$ (0,25)

