# الامتحان الأول في الميكانيك

**-التمرين 01: ( 04 نقاط )**

تعطى في المستوي $(Oxy)$، مجموعة القوى التالية:

$$\overrightarrow{F_3} = a(\ x\vec{j} + y\vec{i}\ ) \quad 1,5 \quad ، \quad \overrightarrow{F_2} = ax\vec{i} + by\vec{j} \quad 1,5 \quad ، \quad \overrightarrow{F_1} = ay\vec{i} \quad 1$$

حدد من أجل كل قوة إن أمكن، عبارة الطاقة الكامنة المرفقة، مبررا إجابتك بما يلزم.

**-التمرين 02: ( 09 نقاط )**

نقطة مادية $M$ كتلتها m، تتحرك داخل المستوي $(Oxy)$، وفق المعادلة الزمنية للتسارع المعرفة كما يلي :

$$\gamma_y = -12.Cos(2t) \quad ، \quad \gamma_x = -8.Sin(2t)$$

حيث في اللحظة الابتدائية كان لدينا: $M(0) = (0,3)$ و $\vec{V}(0) = 4\vec{i}$

1,5 - أحسب مركبتي السرعة و استنتج طويلتها

2 - أحسب فاصلتي النقطة $M$ بدلالة الزمن، ثم استنتج معادلة مسارها، مثله على الرسم و حدد نقطة بداية الحركة

1 - عند اللحظة : $t = \frac{\pi}{3}$ ، حدد قيمة كل من السرعة و التسارع و مثل ذلك على المسار

1,5 - أحسب الزاوية بين شعاعي السرعة و التسارع، ثم حدد الأزمنة و مثل النقاط التي يكونان فيها متعامدين، هل يمكن لهما أن يكونا متوازيين، ناقش ذلك

1,5 - أحسب الزاوية بين شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ و شعاع التسارع $\vec{\gamma}$ ، ماذا تلاحظ كيف نسمي هذه الحركة

1,5 - أحسب الطاقة الكامنة، ثم استنتج الطاقة الميكانيكية الكلية للجمة، ماذا تلاحظ.

**-التمرين 03: ( 09 نقاط )**

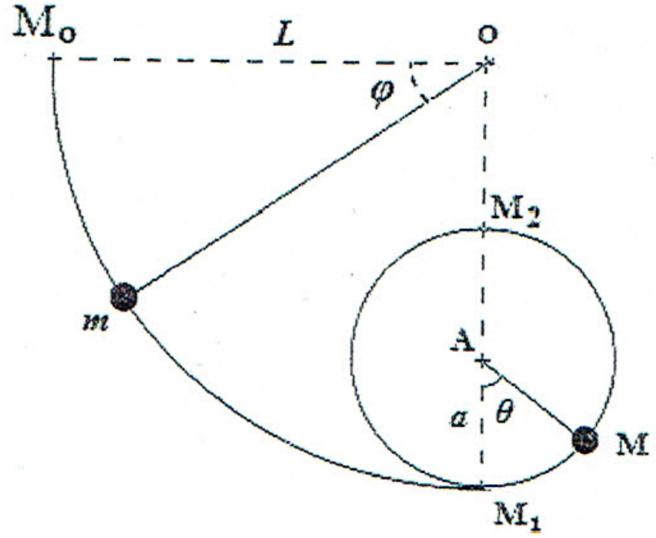
نواس بسيط طوله $L$ و كتلته $m$ ، مثبت عند النقطة $O$ ، نتركه يسقط من النقطة $M_0$ $(\varphi = 0)$ ( أنظر الشكل) بحيث يكون الخيط مشدودا تماما.

2,5 - أحسب سرعة الكتلة $m$ عندما تصل إلى النقطة $M_1$ $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

5 - نثبت مسمارا عند النقطة $A$ ، بحيث تكون المسافة $\overline{AM_1} = a$ ، أحسب عند النقطة الكيفية $M$ ، سرعة الكتلة $m$ و توتر الخيط.

1 - أستنتج قيمة التوتر عند النقطة $M_2$

0,5 - حدد قيمة المقدار $a$ لكي تستمر حركة الكتلة $m$ ، دائرية حول المركز $A$



1

2016 / 2015 — تصحيح إمتحان الفيزياء 1

تمرين 01: القوة $\vec{F}$ لها طاقة كامنة $\Leftarrow$ $\vec{F}$ محافظة

أي : $\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ أو $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ 0,5

* في حالة $\vec{F_1}$ : $\frac{\partial F_{1x}}{\partial y} = a$ و $\frac{\partial F_{1y}}{\partial x} = 0$ 0,5 $\Leftarrow$ $\vec{F_1}$ ليست محافظة

* في حالة $\vec{F_2}$ : $\frac{\partial F_{2x}}{\partial y} = \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} = 0$ 0,25 $\Leftarrow$ $\vec{F_2}$ محافظة

إذن يمكن أن نكتب : $\vec{F_2} = -\overrightarrow{grad}\,E_{p2}$ 0,25 حيث $E_{p2}$ هي الطاقة الكامنة لـ $\vec{F_2}$ . من العلاقة السابقة نجد :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{p2}}{\partial x} = -ax \\ \frac{\partial E_{p2}}{\partial y} = -bx \end{cases} \quad 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E_{p2}(x,y) = -a\frac{x^2}{2} + f(x) + c \quad 0{,}25 \\ E_{p2}(x,y) = -b\frac{y^2}{2} + g(x) + c \quad 0{,}25 \end{cases}$$

بمقارنة العبارتين لـ $E_{p2}(x,y)$ نستنتج أن :

$$\boxed{E_{p2}(x,y) = -a\frac{x^2}{2} - b\frac{y^2}{2} + c} \quad 0{,}25$$

* في حالة $\vec{F_3}$ : $\frac{\partial F_{3x}}{\partial y} = \frac{\partial F_{3y}}{\partial x} = a$ 0,25 $\Leftarrow$ $\vec{F_3}$ محافظة .

$$\vec{F_3} = -\overrightarrow{grad}\,E_{p3} \quad 0{,}25 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial E_{p3}}{\partial x} = -ay \\ \frac{\partial E_{p3}}{\partial y} = -ax \end{cases} \quad 0{,}5$$

وعند تكامل المشتقتين الجزئيتين لـ $E_{p3}$ نجد :

$$\boxed{E_{p3}(x,y) = -axy + c} \quad 0{,}5$$

حل التمرين الثاني (02) :-

- حساب عبارة السرعة : لدينا $V_x=\int \gamma_x dt + V_{x0}$ ، $V_y=\int \gamma_y dt+V_{y0}$

نجد : $V_x = 4\cos(2t)+V_{x0}$ ، $V_y=-6\sin(2t)+V_{y0}$

عند $t=0$ : $V_x(0)=4 \Rightarrow \boxed{V_{x0}=0}$ و $V_y(0)=0 \Rightarrow \boxed{V_{y0}=0}$

ومنه (0,5) $\boxed{V_x=4\cos(2t)}$ ، (0,5) $\boxed{V_y=-6\sin(2t)}$

و طويلة السرعة : (0,5) $\boxed{\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{16\cos^2(2t)+36\sin^2(2t)}}$

- حساب فاصلة النقطة M : $x=\int V_x dt + x_0$ ، $y=\int V_y dt + y_0$

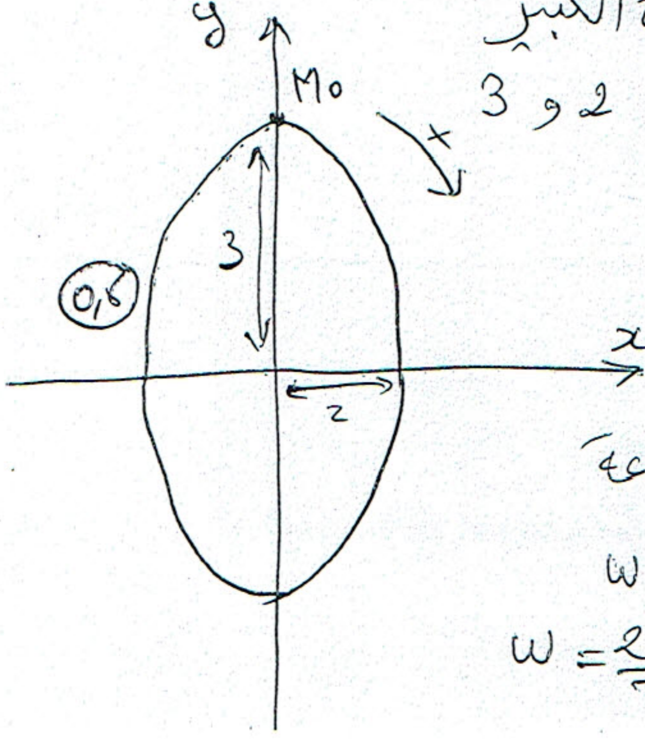
نجد : $x = 2\sin(2t)+x_0$ ، $y=3\cos(2t)+y_0$

عند $t=0$ : $x(0)=0 \Rightarrow \boxed{x_0=0}$ ، $y(0)=3\Rightarrow \boxed{y_0=0}$

ومنه (0,5) $\boxed{x=2\sin(2t)}$ و (0,5) $\boxed{y=3\cos(2t)}$

- معادلة المسار نحصل عليها من الفاصلة فنجد (0,5) $\boxed{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1}$

وهو عبارة عن قطع ناقص محوره الكبير حسب المحور $\vec{Oy}$ ، أنصاف أقطاره 2 و 3




- تبدأ الحركة عند $t=0$ ومنه

$$M_0 = M(0) \begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=3\end{cases}$$

وتكون الحركة عكس عقارب الساعة

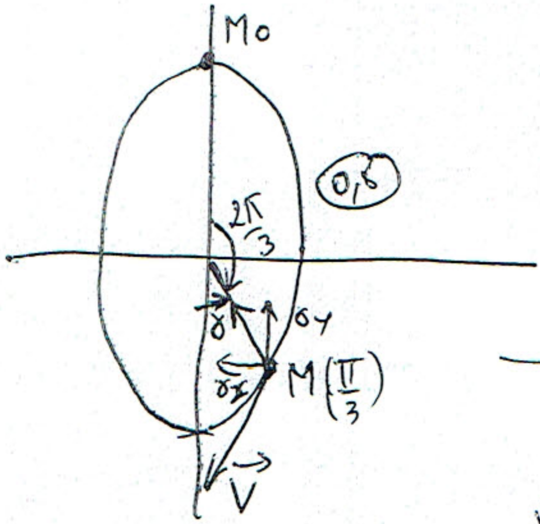
- من العلاقة نلاحظ أن $\omega t = 2t$

أي أن $\omega=2$ و نعرف أن $\omega=\frac{2\pi}{T}$

حيث $T$ دور الحركة

③ فنجد أن الدور: $T = \pi s$

لذلك فعند اللحظة $t = \frac{\pi}{3}$ فإن الزاوية الموافقة هي $\theta = \frac{2\pi}{3}$




$$\begin{cases} V_x = 4\cos(\frac{2\pi}{3}) = -2 \\ V_y = -6\sin(\frac{2\pi}{3}) = -3\sqrt{3} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \gamma_x = -8\sin(\frac{2\pi}{3}) = -4\sqrt{3} \\ \gamma_y = -12\cos(\frac{2\pi}{3}) = 6 \end{cases}$$

0,25 0,25

---

- حساب الزاوية $(\vec{V}, \vec{\gamma})$:

لدينا $\vec{V}.\vec{\gamma} = \|\vec{V}\|.\|\vec{\gamma}\|.\cos(\vec{V}, \vec{\gamma})$.

ومنه

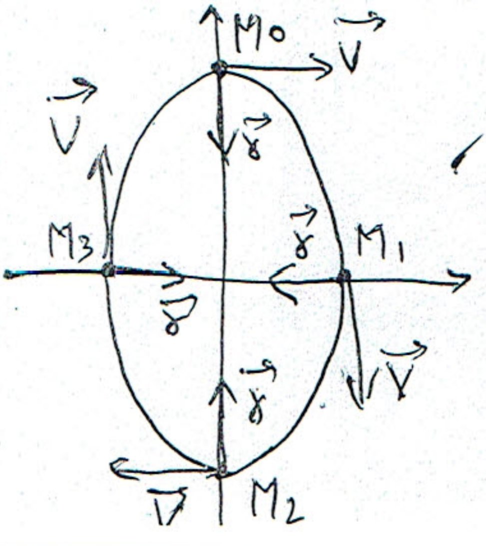
$$\cos(\vec{V}, \vec{\gamma}) = \frac{-32\cos(2t).\sin(2t) + 72\cos(2t).\sin(2t)}{\sqrt{16 + 20\sin^2(2t)} \times \sqrt{64\sin^2(2t) + 144\cos^2(2t)}}$$

$$\boxed{\cos(\vec{V}, \vec{\gamma}) = \frac{5\cos(2t).\sin(2t)}{\sqrt{4 + 5\sin^2(2t)} \times \sqrt{9 - 5\sin^2(2t)}}}$$

0,5

- يكون $\vec{V}$ و $\vec{\gamma}$ متعامدان عندما: $\vec{V}.\vec{\gamma} = 0$

أي: $\cos(2t).\sin(2t) = 0 \Leftarrow$ 
إما $\cos(2t) = 0 \Leftarrow 2t = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad (K = 0, 1)$
أو $\sin(2t) = 0 \Leftarrow 2t = K\pi \quad (K = 0, 1)$




هذه النقاط هي: $\begin{pmatrix} t_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} t_1 = \frac{\pi}{4} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ ،

0,5

$\begin{pmatrix} t_2 = \frac{\pi}{2} \\ \theta_2 = \pi \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} t_3 = \frac{3\pi}{4} \\ \theta_3 = \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$

4 - السرعة والتسارع لا يمكن أن يكونا متوازيين لأن المسار منحني

حيث لدينا $V = \|\vec{V}\| . \vec{u}_T$ و $\vec{\gamma} = \|\vec{\gamma}_T\| \vec{u}_T + \|\vec{\gamma}_N\| . \vec{u}_N$ (0,5)

لأن $\|\vec{\gamma}_N\|$ غير معدوم بسبب المسار المنحني وبالتالي $(\vec{V} \times \vec{\gamma})$

- حساب الزاوية $(\vec{OM}, \vec{\gamma})$ :-

من الحسابات السابقة نجد أن

$$\begin{cases} \gamma_x = -4x \\ \gamma_y = -4y \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = -4 . \vec{OM}}$$ (0,5) (0,5)

مما يعني أن $\boxed{(\vec{OM}, \vec{\gamma}) = \pi}$ ، والمقداران متعاكسان ، فنلاحظ

أن $\vec{\gamma}$ متجه دائما نحو المركز "O" $\boxed{\text{و الحركة ذات تسارع مركزي}}$

(0,5)

- حساب الطاقة الكامنة :-

نحصل على القوة من التسارع

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{\gamma} \\ &= -4m\vec{OM} \end{aligned}}$$

أي $\boxed{\vec{F} = -4m(x\vec{i} + y\vec{j})}$

(0,5)

$$\begin{cases} F_x = -4mx \\ F_y = -4my \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_p(x,y) = 4m\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) + C}$$

(0,25)

نجد قيمة الثابت "C" إذا اعتبرنا $E_p(0,0) = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}$

- حساب الطاقة الميكانيكية الكلية :

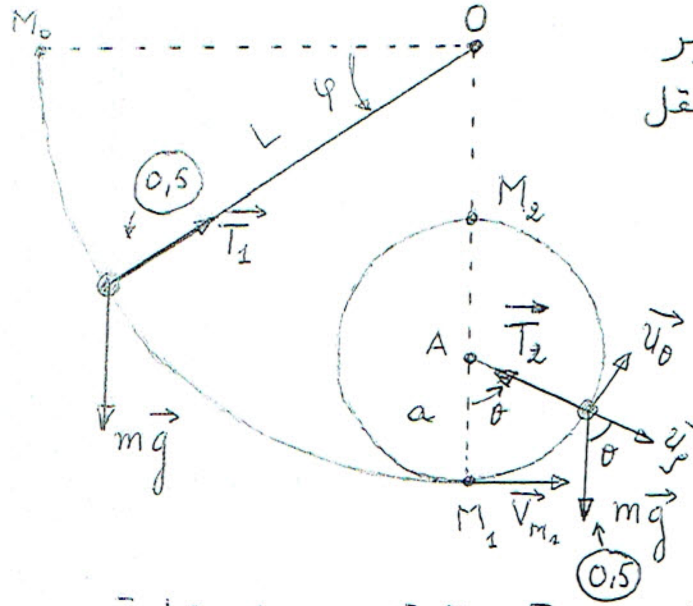
(0,25) $\boxed{E = E_c + E_p}$ بالتعويض في $\vec{V}$ و $\vec{OM}$ بالعبارات الحاصلة

نجد أن :

$$E = m\left[8\cos^2(2t) + 18\cos^2(2t) + 18\sin^2(2t) + 8\sin^2(2t)\right]$$

$$\boxed{E = 26m = cte}$$ (0,5)

تمرين 03 :




1- الكتلة m توجد دائما تحت تأثير قوتين : $\vec{T}$ : توتر الخيط و الثقل $m\vec{g}$ . على المسار $\overset{\frown}{M_0M_1}$ ، $\vec{T_1}$ لا تنتج عملا لأنها دائما عمودية عليه . الثقل $m\vec{g}$ هو القوة الوحيدة التي تعمل وهي قوة محافظة . (0,5)

إذن الطاقة الميكانيكية $E = E_p + E_c$ تبقى محفوظة .

$$E_p(M_0) + E_c(M_0) = E_p(M_1) + E_c(M_1)$$ (0,5)

وعندما نأخذ مبدأ الطاقة الكامنة للثقل $m\vec{g}$ عند $M_1$ نجد :

$\boxed{V_{M_1} = \sqrt{2gL}}$ أي $mgL = \frac{1}{2} m V_{M_1}^2$ (0,5)

2- عندما يصير النواس شاقولي ، يصطدم الخيط بالمسمار في A و نحصل بعد ذلك على حركة دائرية حول المركز A بسرعة إبتدائية $\vec{V}_{M_1}$ . في كل نقطة M من المسار الكتلة m تبقى تتعرض لقوتين : الثقل $m\vec{g}$ وتوتر الخيط الذي نسميه في المرحلة الثانية من الحركة $\vec{T_2}$ .

في جملة الإحداثيات القطبية $(A, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ المعادلة الأساسية للحركة : $\vec{T_2} + m\vec{g} = m\vec{\gamma}$ (0,25) ثم نسقطها على $\vec{u}_\rho$ و $\vec{u}_\theta$ .

لدينا : $\vec{T_2} = -T_2 \vec{u}_\rho$ (0,25) ، $m\vec{g} = mg\cos\theta\, \vec{u}_\rho - mg\sin\theta\, \vec{u}_\theta$ (0,5) ، $= -a\dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + a\ddot{\theta}\, \vec{u}_\theta$ (0,5)

مع $\vec{V} = a\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta$ (0,25) وعندما نعوض نجد :

$-T_2 + mg\cos\theta = -ma\dot{\theta}^2$ (1) (0,5) و $-mg\sin\theta = ma\ddot{\theta}$ (2) (0,5)

حساب $T_2$ يتطلب الحصول على السرعة : $\|\vec{V}(M)\| = a\dot{\theta}$

ويمكن ذلك بحل المعادلة التفاضلية (2) أو باستعمال مبادئ العمل والطاقة .

6

حل المعادلة التفاضلية (2) يتم بجداء طرفي المعادلة في $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

لنحصل على : $a\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -g\sin\theta\,d\theta$ (0,5) وعندما نكامل :

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} a\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} -g\sin\theta\,d\theta$$

نجد : $a\frac{\dot{\theta}^2}{2} - a\frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = g(\cos\theta - 1)$ (0,5) مع : $V_{M_1} = a\dot{\theta}_0$ (0,25)

إذن : (0,5) $\boxed{V_M^2 = a^2\dot{\theta}^2 = 2g[L + a\cos\theta - a]}$

(1.75)

عند استعمال الطاقة يكفي أن نلاحظ أن $\vec{T_2}$ مثل $\vec{T_1}$ لا تعمل (لأنها عمودية على المسار الدائري للحركة) . إذن الطاقة الميكانيكية $E = E_p + E_c$ تبقى محفوظة (0,25)

$$E_p(M_1) + E_c(M_1) = E_p(M) + E_c(M)$$

(1) $0 + \frac{1}{2}mV_{M_1}^2 = mga(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mV_M^2$ (1.75)

وبما أن : $V_{M_1}^2 = 2gL$ ، فإننا نجد $\boxed{V_M^2 = a^2\dot{\theta}^2 = 2g[L + a\cos\theta - a]}$ (0,5)

وعند نعوض $a^2\dot{\theta}^2$ في المعادلة (1) نجد :

$$\boxed{T_2 = mg\left[2\frac{L}{a} + 3\cos\theta - 2\right]}$$ (0,5)

3 - في النقطة $M_2$ نحصل على أصغر قيمة لـ $T_2$ لأن $\theta = \pi$ و $\cos\theta = -1$ . إذن : $\boxed{T_2(M_2) = mg\left[2\frac{L}{a} - 5\right]}$ (1)

4 - لكي تستمر حركة m حول A يجب أن تبقى $\vec{T_2}$ دائما موجودة

أي : $T_2(M_2) > 0$

ونحصل على : $2\frac{L}{a} - 5 > 0 \Rightarrow \boxed{a < 2\frac{L}{5}}$ (0,5)

<u>ملاحظة</u> : يمكن حل السؤال الأول باستعمال القانون الأساسي للتحريك

$\vec{T_1} + m\vec{g} = m\vec{\gamma}$ ، $\Leftarrow$
$$\begin{cases} -T_1 + mg\sin\varphi = -mL\dot{\varphi}^2 & (1) \\ mg\cos\varphi = mL\ddot{\varphi} & (2) \end{cases}$$

حل المعادلة التفاضلية (2) $\Leftarrow$ $V^2 = L^2\dot{\varphi}^2 = 2gL\sin\varphi$ ولما $\varphi = \pi/2$ $\Leftarrow$ $V_{M_1}^2 = 2gL$