الامتحان الأول في الميكانيك

- التمرين 01 : (05 نقاط)

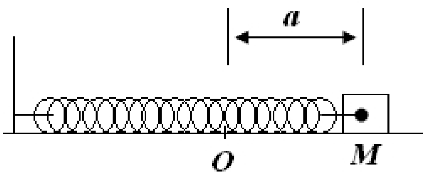
1 - عرف كل من: العمل الميكانيكي، الطاقة الحركية، ثم أستنتج نظرية الطاقة الحركية.
- حدد الفرق الأساسي بين قوة محافظة و قوة غير محافظة، متى نتكلم عن الطاقة الكامنة
- حدد العلاقة التي تربط الطاقة الكامنة بالقوة، ما شكل هذه العلاقة في حالة بعد واحد.
- عرف الطاقة الميكانيكية الكلية، و متى نتكلم عن مبدأ انحفاظها.

2 - في حالة نابض مرن، قوة الإرجاع تكتب من الشكل: $F(x) = -Kx - K'x^3$

حيث K و K' هما ثابتا المرونة و x تمثل استطالة النابض، أوجد الطاقة الكامنة التي نشتق منها هذه القوة، ثم حدد وحدة كل من K و K'

3 - فوق سطح مستوي أفقي، نثبت بطرف النابض كتلة m و نسحبها لمسافة a من وضعية التوازن ثم نتركها بدون سرعة ابتدائية:

- أوجد السرعة عند $x_1 = a/2$ و $x_2 = 0$
- أوجد النقطة التي تغير فيها الكتلة اتجاه حركتها، ماذا تستنتج؟



- التمرين 02 : (08 نقاط)

نقطة مادية M كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة ميكانيكية من الشكل :

$$\vec{F} = a.\,Cos\omega t\ .\vec{i} + b.\,Sin\omega t\ .\vec{j}$$ حيث : a, b, ω ثوابت موجبة

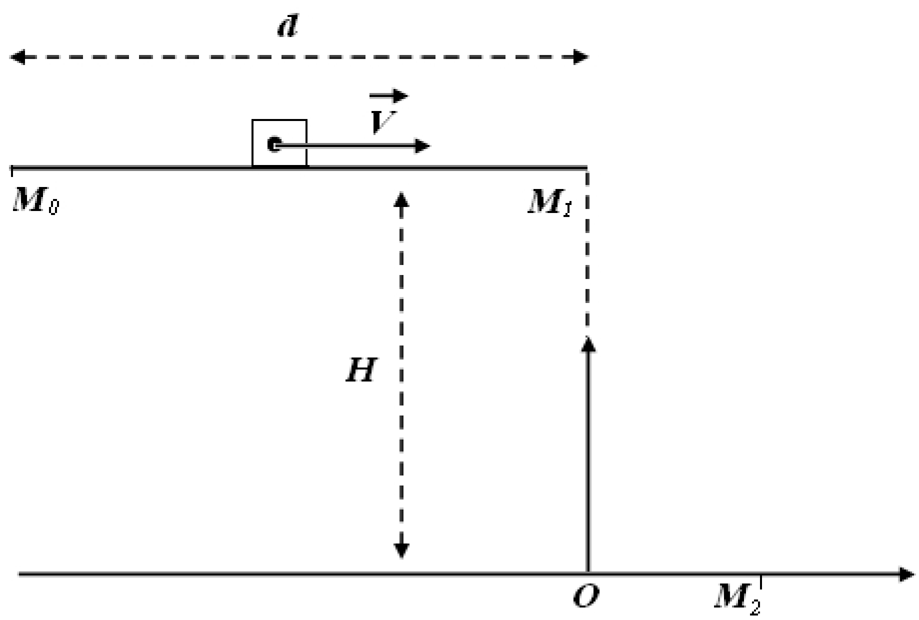
في اللحظة الابتدائية $t = 0$ ، $\overrightarrow{OM}(0) = -\dfrac{a}{m\omega^2}\vec{i}$ و $\vec{V}(0) = -\dfrac{b}{m\omega}\vec{j}$

1- أكتب القانون الأساسي للتحريك لهذه النقطة، ثم أستنتج عبارة شعاع التسارع
2- أستخرج عبارة شعاع السرعة ، ثم حدد المواقع التي يكون فيها التسارع و السرعة متعامدان
3- أحسب عبارتي التسارع المماسي و التسارع النظمي
4- أستخرج معادلة المسار، ما هي طبيعته، أرسمه و حدد نقطة بداية الحركة واتجاهها
5- هل الحركة ذات تسارع مركزي؟ بين ذلك.

- التمرين 03 : (07 نقاط) أنظر الشكل في ظهر الصفحة

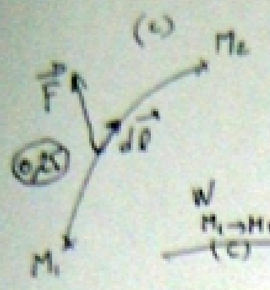
جسم صلب كتلته m ، ينزلق لمسافة d بين نقطتين M_0 و M_1، على مستوي أفقي معامل احتكاكه f بسرعة ابتدائية $\vec{V}(0) = V_0.\vec{i}$.

1- مثل مجموع القوى المؤثرة، و اكتب القانون الأساسي للتحريك، ثم استخرج سرعة الجسم عند M_1.
2- عند هذه النقطة، يسقط الجسم من ارتفاع H إلى الأرض، أكتب القانون الأساسي للتحريك ثم استنتج إحداثيات نقطة السقوط M_2 و سرعة الجسم عندها.
3- عند التصادم مع الأرض تنقلب سرعة الجسم وفق المعادلة : $V'_x = V_x$, $V'_y = -V_y$ ، أوجد أعلى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجسم بعد الارتداد.
4- صف بشكل كيفي ماذا يحدث للجسم بعد ذلك و ما هو شكل المسار الكلي للحركة.


d
V
M0
M1
H
O
M2

(1)

حل امتحان الميكانيك



- التمرين 01 : -

1- * - عمل القوة الميكانيكية : $dW=\vec F\cdot\vec{dl}$ ، $W_{M_1\to M_2\,(C)} = \int_{M_1(C)}^{M_2} \vec F\cdot\vec{dl}$ (0,25)

- الطاقة الحركية : $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ (0,25)

- نظرية الطاقة الحركية : $dW = d(E_c)$ ، $W_{M_1\to M_2\,(C)} = \Delta E_c$ (0,25)

* القوة المحافظة : العمل $W_{M_1\to M_2}$ لا يتعلق بالمسالك (C) (0,25)

القوة غير المحافظة : العمل $W_{M_1\to M_2}$ يتعلق بالمسالك (C) (0,25)

نتكلم عن الطاقة الكامنة في حالة القوة المحافظة (0,25)

* العلاقة بين القوة والطاقة الكامنة : $\vec F\cdot\vec{dl} = -dE_p$ ، $\vec F = -\vec{grad}\,E_p$

$\vec F = -\left[\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec i + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec j + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec k\right]$ (0,25) ، في حالة بعد واحد (x) : $F(x) = -\frac{dE_p}{dx}$ (0,25)

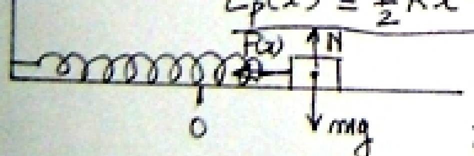
* الطاقة الميكانيكية : $E(M)=E_c(M)+E_p(M)$ (0,25)

تكون الطاقة محفوظة في حالة قوى محافظة : $E(M_1)=E(M)=E(M_2)$ (0,25)

2- $F(x) = -Kx - K'x^3$: $[K]=\frac{N}{m}=\frac{Kg}{s^2}$ ، $[K']=\frac{N}{m^3}=\frac{Kg}{m^2 s^2}$ (0,25)

- الطاقة الكامنة : $E_p(x)=\frac{1}{2}Kx^2+\frac{1}{4}K'x^4+C$ ، لإيجاد "C" نختار $E_p(0)=0$

$\Leftarrow$ $C=0$ (0,25) ومنه $E_p(x)=\frac{1}{2}Kx^2+\frac{1}{4}K'x^4$ (0,5)



3- الحركة أفقية : F(x) قوة محافظة

نطبق مبدأ إنحفاظ الطاقة الميكانيكية

$E(a)=E(x_1)=E(x_2)$: عند $x_0=a$ ، $v(a)=0$ ، $E(a)=E_p(a)$

* عند $x_1=\frac{a}{2}$ ، $E(\frac{a}{2})=E_c(\frac{a}{2})+E_p(\frac{a}{2})$ ، بالتعويض نجد

$E(a)=E(\frac{a}{2})$ (0,25) $\Leftarrow$ $v(\frac{a}{2})=\frac{1}{2}a\sqrt{3\frac{K}{m}+\frac{15}{8}\frac{K'}{m}a^2}$ (0,25)

* عند $x_2=0$ ، $E_p(0)=0$ ومنه $E(0)=E_c(0)$ (0,25)

2

وتكون السرعة : $v(0) = a\sqrt{\frac{K}{m} + \frac{1}{2}\frac{K'}{m}a^2}$ (0,25)

- تغير الكتلة إتجاه حركتها عندما يصل النابض إلى أقصى إنكماش (0,5) وهو يوافق $x_3 = -a$ ، وتكون الحركة دورية بين a و $-a$

- التمرين 02 : -1) حسب قانون نيوتن $\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ (0,5)

ونجد التسارع : (0,5) $\vec{\gamma}(t) = \frac{a}{m}\cos\omega t\,\vec{i} + \frac{b}{m}\sin\omega t\,\vec{j}$

2)- السرعة : $\vec{v}(t) = \int \vec{\gamma}(t)\,dt \overset{(0,5)}{=} \left(\frac{a}{m\omega}\sin\omega t + v_{x0}\right)\vec{i} + \left(-\frac{b}{m\omega}\cos\omega t + v_{y0}\right)\vec{j}$

عند : $t=0$ ، $\vec{v}(0) = -\frac{b}{m\omega}\vec{j} \Rightarrow v_{x0} = v_{y0} = 0$ (0,25)

والسرعة تصبح $\vec{v}(t) = \frac{a}{m\omega}\sin\omega t\,\vec{i} - \frac{b}{m\omega}\cos\omega t\,\vec{j}$ (0,5)

- السرعة والتسارع متعامدان : $\vec{\gamma}\cdot\vec{v} = 0$ (0,5) ومنه

$\frac{a^2-b^2}{m^2\omega}\sin\omega t.\cos\omega t = 0$ (0,25) $\Rightarrow$

* $\sin\omega t = 0 \Rightarrow \omega t = \pi, 0$ (0,25)
* $\cos\omega t = 0 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (0,25)

3)- * التسارع المماسي : $\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$ (0,25) ، $\|\vec{v}\| = \frac{1}{m\omega}\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}$

ومنه $\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{(a^2-b^2)\sin\omega t.\cos\omega t}{m\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}}$ (0,25)

* التسارع الناظمي : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N \Rightarrow \|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma}_T\|^2}$ (0,25)

$\|\vec{\gamma}\|^2 = \frac{a^2}{m^2}\cos^2\omega t + \frac{b^2}{m^2}\sin^2\omega t \Rightarrow$ (0,25) $\|\vec{\gamma}_N\| = \frac{ab}{m}\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}}$

4)- شعاع الموقع : $\vec{OM}(t) = \int \vec{v}(t).dt$

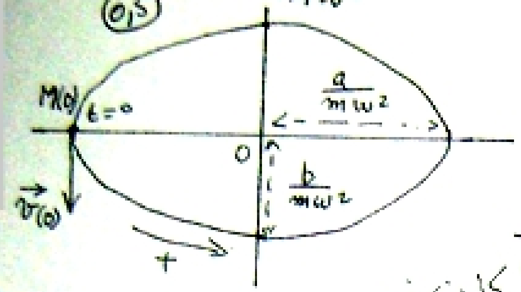
$\vec{OM}(t) \overset{(0,5)}{=} \left(\frac{-a}{m\omega^2}\cos\omega t + x_0\right)\vec{i} + \left(\frac{-b}{m\omega^2}\sin\omega t + y_0\right)\vec{j}$

عند $t=0$ ، $\vec{OM}(0) = -\frac{a}{m\omega^2}\vec{i} \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$ (0,25)

$\Rightarrow \vec{OM}(t) = -\frac{a}{m\omega^2}\cos\omega t\,\vec{i} - \frac{b}{m\omega^2}\sin\omega t\,\vec{j}$ (0,5)

③

ومعادلة المسار: $x = \frac{-a}{m\omega^2}\cos\omega t$ ، $y = -\frac{b}{m\omega^2}\sin\omega t$ 0,5



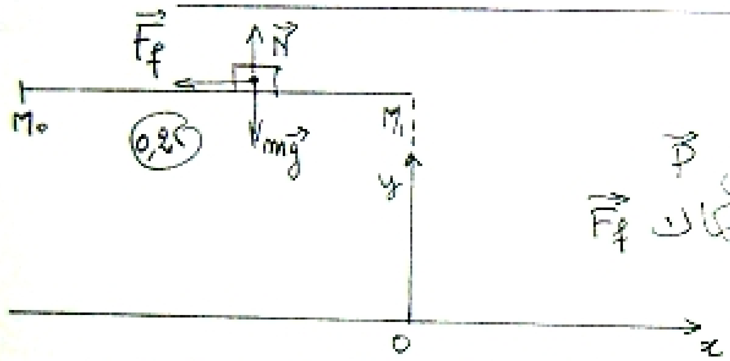
$$\Leftarrow \frac{x^2}{\left(\frac{a}{m\omega^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{m\omega^2}\right)^2} = 1$$ 0,5

هو قطع ناقص، نصفا قطريه $\frac{a}{m\omega^2}$ و $\frac{b}{m\omega^2}$ 0,25

5)- تكون الحركة ذات تسارع مركزي إذا كان:

$\overrightarrow{OM} // \vec{\gamma}$ ⟸ $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma} = \vec{0}$ 0,5 ومن النتائج نلاحظ أن

$\vec{\gamma} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$ 0,5 وبالتالي فالحركة ذات تسارع مركزي



- التمرين 03: -

1)- القوى المؤثرة هي: الثقل $\vec{P}$ ورد الفعل $\vec{N}$ وقوة الاحتكاك $\vec{F_f}$

قانون نيوتن يكتب

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F_f} = m\vec{\gamma}$$ 0,25

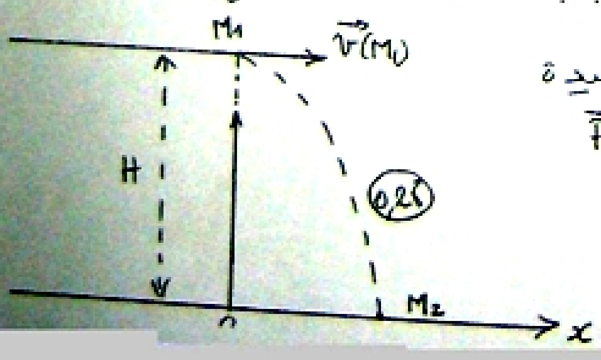
، بالإسقاط على المحورين OX ، Oy

$$\begin{cases} OX: & -F_f = m\gamma_x = m\gamma \quad (0{,}25) \\ Oy: & N - mg = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} N = mg \\ F_f = fN = fmg \end{cases} \Leftarrow \gamma = fg \quad (0{,}25)$$

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام لذلك نستعمل القانون

$v^2 - v_0^2 = 2\gamma(x - x_0)$ 0,25 ، $x - x_0 = d$ ⟸ $v^2(M_1) - v_0^2 = -2fgd$ 0,25

$v(M_1) = \sqrt{v_0^2 - 2fgd}$ 0,5 ، يجب أن يكون $v_0^2 - 2fgh \geq 0$



2)- السقوط الحر من M_1: القوة الوحيدة هي الثقل $\vec{P}$ ومنه $\vec{P} = m\vec{\gamma} = m\vec{g}$

$\vec{\gamma} = \vec{g}$ 0,25

نسقط على المحورين

(4)

$0X$: $\gamma_x = 0 \Leftarrow v_x = v(M_1)$ والحركة مستقيمة منتظمة (0,25)

$\Leftarrow x(t) = v(M_1)t + x_0$ $(x_0 = 0) \Leftarrow$ $\underline{x(t) = v(M_1).t}$

$0Y$: $\gamma_y = -g$ الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام :

$\Leftarrow v_y(t) = -gt + v_{y_0}$ و $(v_{y_0} = 0)$ لأن $\vec{v}(M_1)$ حسب $0X$ فقط

$\Leftarrow v_y(t) = -gt \Leftarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$ و $y_0 = H$

$\Leftarrow$ $\underline{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + H}$ (0,5)

- تحديد النقطة M_2 : $y_2 = 0 \Leftarrow -\frac{1}{2}gt_2^2 + H = 0 \Leftarrow t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

نجد $x_2 = v(M_1).t_2 \Leftarrow$ $\underline{x_2 = \sqrt{v_0^2 - 2fgd} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}}$ (0,5)

- تحديد السرعة $\vec{v}(M_2)$: $v_{x_2} = v(M_1)$ و $v_{y_2} = -gt_2 = -\sqrt{2gH}$

(0,25) $\underline{\vec{v}(M_2) = v(M_1)\vec{i} - \sqrt{2gH}\cdot\vec{j}}$

3)- بعد الإرتداد على سطح الأرض تصبح السرعة :

(0,25)+(0,25) $\underline{\vec{v}'(M_2) = v(M_1)\vec{i} + \sqrt{2gH}\cdot\vec{j}}$

والتسارع هو $\vec{\gamma} = -\vec{g}$ ، لذلك فالحركة حسب $0Y$ متباطئة بانتظام

ونستعمل العلاقة : (0,25) $\underline{v_f^2 - v_y'^2(M_2) = 2(-g).H'}$ مع $\underline{v_f = 0}$ (0,25)

$\underline{v_y(M_2) = -\sqrt{2gH}}$ (0,25) $\Leftarrow$ $\underline{-2gH = -2gH'}$ (0,25) $\Leftarrow$ $\underline{H' = H}$ (0,5)

4)- تحدث إرتدادات متماثلة ومتتالية عند النقاط : $M_1, M_2, M_3, \ldots\ldots$

(0,5) كل مرة يعود الجسم إلى نفس الإرتفاع ويكون المسار كما في الشكل