الإمتحان الأول في الميكانيك

ـ التمرين 01 : (05 نقاط)

1- أكتب عبارة شعاع الموقع المطلق $\overrightarrow{OM}$ بدلالة شعاع الموقع النسبي $\overrightarrow{O'M}$

2- أستنتج عبارة السرعة المطلقة $\vec{V}_a$ بدلالة السرعة النسبية $\vec{V}_r$.

- بسطها في حالة الحركة الإنسحابية ، و في حالة الحركة الدورانية

3- أكتب عبارة التسارع المطلق $\vec{\gamma}_a$ بدلالة التسارع النسبي $\vec{\gamma}_r$، حدد عبارة كل من التسارع المكتسب و التسارع التكميلي (كوريوليس)

4- في حالة حركة إنسحابية منتظمة، ما هو صنف هذه المعالم و ماهي خاصيته الأساسية

5- في حالة جسم يتحرك على سطح الكرة الأرضية ، بسط عبارة تسارعي كوريوليس و التكميلي

ـ التمرين 02 : (07.5 نقاط)

حركة نقطة مادية في الإحداثيات القطبة تكتب :

$\rho = r|\mathrm{Sin}(2\omega t)|$, $\theta = \omega t$ ، ω و r ثابتان موجبان

1- شكل جدول تغير ρ و θ مع الزمن ، ثم أرسم مسار الحركة

2- أحسب المركبات القطبية للسرعة و التسارع ، استنتج المركبات الديكارتية الموافقة.

3- أحسب طويلتي السرعة و التسارع ، ثم المركبتين المماسية و الناظمية للتسارع.

4- أحسب نصف قطر انحناء المسار

5- أحسب طول المسار بين اللحظة الإبتدائية $t = 0$ و اللحظة $t = 3\pi/4\omega$

ـ التمرين 03 : (07.5 نقاط)

يقذف جسم نحو الأعلى على مستوي أملس زاوية ميله $\alpha = 30°$ ، بسرعة إبتدائية $\overrightarrow{V_0}$.

1- أكتب العلاقة الأساسية للتحريك ، ثم استخرج عبارة التسارع.

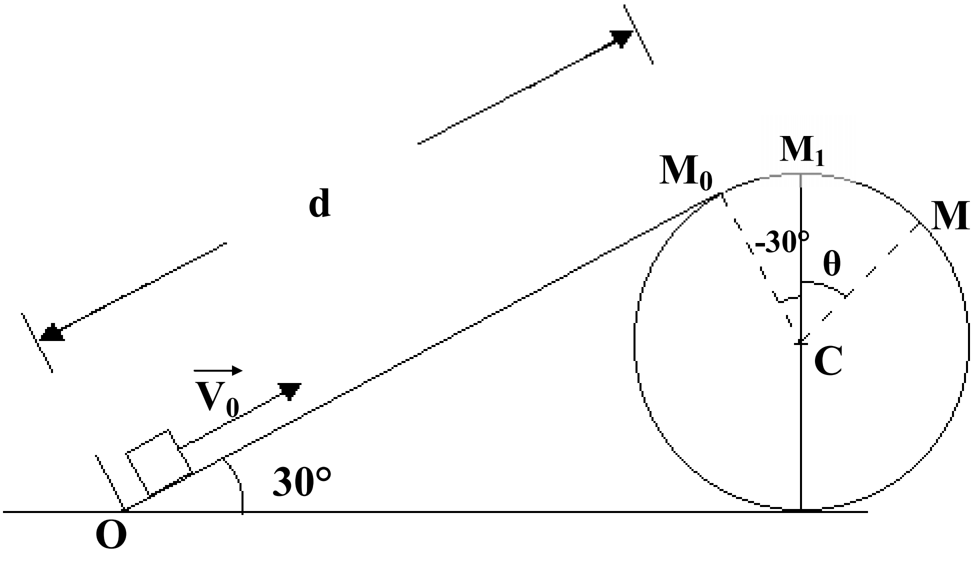
2- أوجد قيمة السرعة عند النقطة M_0 : ($OM_0 = d$)

3- عند هذه النقطة ينزلق الجسم على سطح دائري أملس نصف قطره R و مركزه C

أ- أكتب العلاقة الأساسية للتحريك عند النقطة $M(\theta)$ ثم أستخرج عبارة السرعة

ب- ما هي قيمة $\overrightarrow{V_0}$ التي تجعل الجسم يتوقف عند النقطة M_1 ($\theta = 0°$)

ج- في حالة $\overrightarrow{V_0}$ أكبر من هذه القيمة ، أوجد الزاوية θ_f التي يفارق بها الجسم هذا السطح



٨

حل إمتحان الميكانيك

- التمرين 01 : -1) $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ (0,5)

-2)

$$\vec{V_a} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left[\frac{d\vec{i'}}{dt}x' + \cdots + \frac{d\vec{k'}}{dt}z'\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \cdots + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right]$$

$$\boxed{\vec{V_a} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M} + \vec{V_r} = \vec{V_e} + \vec{V_r}}$$ (0,5)

- الإنسحاب : $\vec{\omega} = \vec{0}$ $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_T}$ (0,5)

- الدوران : $\vec{OO'}$ يدور بسرعة $\vec{\omega}$ ⇐ $\frac{d\vec{OO'}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{OO'}$

(0,5) $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \vec{V_R} + V_r$

-3)

$$\boxed{\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}}$$ (0,5)

$$\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O'M}) + \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{O'M}$$ (0,25)

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V_r}$$ (0,25)

4)- حالة الإنسحاب المنتظم : $\vec{\omega} = \vec{0}$ ، $\vec{V_e} = \vec{V_T} = ct$ ⇐ $\boxed{\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r}}$ (0,5)

التسارع هو نفسه في المعلمين . والصنف هو معلم غاليلي يحفظ قانون نيوتن للحركة . (0,5)

5)- الحركة دورانية منتظمة : $\vec{\omega} = ct$ ، $\vec{OO'}$ يدور حول محور الأرض

$\dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ ، (0,25)

$$\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} = \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OO'})$$ (0,25)

ومنه

$$\left.\begin{aligned} \vec{\gamma_e} &= \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{OM}) \\ \vec{\gamma_c} &= 2(\vec{\omega}\wedge\vec{V_r}) \end{aligned}\right\}$$ (0,5)

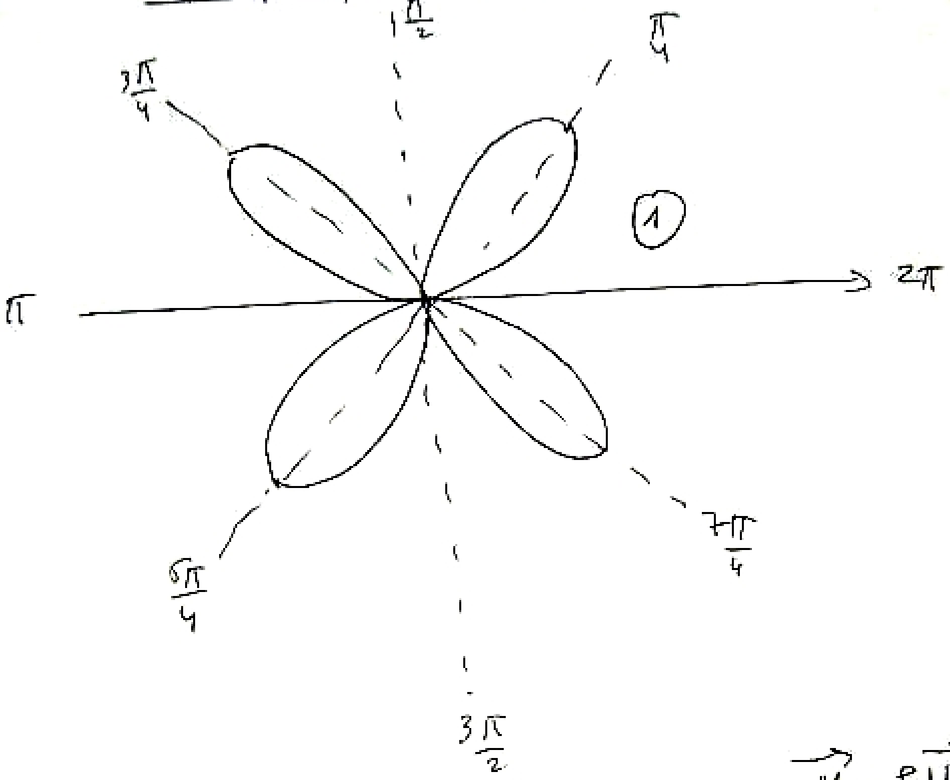
(2)

- التمرين 02:

$\rho = r|\sin(2\theta)|$ ، $\theta = \omega t$

-1) (1)

t	0	$\frac{\pi}{4\omega}$	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{3\pi}{4\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{5\pi}{4\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{7\pi}{4\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	0	r	0	r	0	r	0	r	0



-2) : $\vec{OM} = \rho \vec{u_\rho}$

(0,5) $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

* نأخذ حالة $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ أي

$|\sin 2\theta| = \sin 2\theta.$

(0,5) $\boxed{\vec{V} = 2\omega r\cos 2\theta\, \vec{u_\rho} + r\omega \sin 2\theta\, \vec{u_\theta}}$

(0,5) $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u_\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$

$\ddot{\rho} = -4\omega^2 r\sin 2\theta$ ، $\dot{\rho} = 2\omega r\cos 2\theta$ ، $\ddot{\theta} = 0$ ، $\dot{\theta} = \omega$

(0,5) $\boxed{\vec{\gamma} = \left[-4\omega^2 r\sin 2\theta - r\omega^2 \sin 2\theta\right]\vec{u_\rho} + \left[4\omega^2 r\cos 2\theta\right]\vec{u_\theta}}$

4

4) حساب نصف قطر الإنحناء:

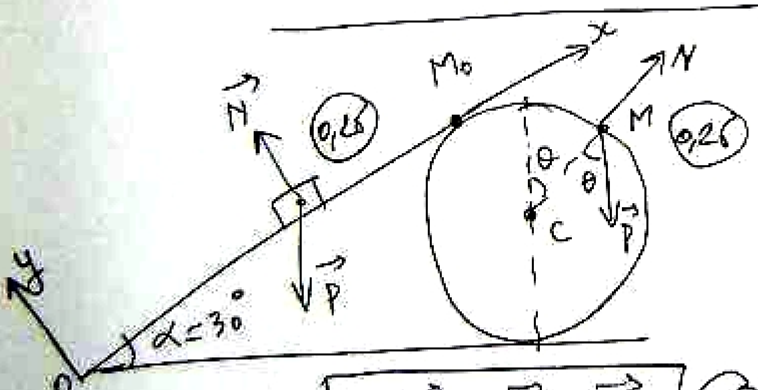
0,5 $$\boxed{R = \frac{\|\vec{V}\|^2}{\|\vec{\gamma}_N\|} = r\,\frac{(3\cos^2 2\theta + 1)^{3/2}}{\sqrt{39\cos^2 2\theta - 9\sin^2 2\theta \cos^2 2\theta + 25}}}$$

5)- حساب طول المسار:

0,25 $$S = \int_0^{\frac{3\pi}{4\omega}} \|\vec{V}\|\, dt$$

0,25 $$\boxed{S = \int_0^{\frac{3\pi}{4\omega}} r\omega\left(\sqrt{3\cos^2 2\theta + 1}\right) dt}$$

-التمرين 03 :-



1)- العلاقة الأساسية : $\boxed{m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{N}}$ 0,5

بالإسقاط على ox : $m\gamma = -mg\sin\alpha \Leftarrow$ $\boxed{\gamma = -g\sin\alpha}$ 0,5

" " oy : $N - mg\cos\alpha = 0 \Leftarrow$ $N = mg\cos\alpha$

2) الحركة متغيرة بإنتظام لذلك نطبق القانون 0,5

$$V^2(M_0) - V_0^2 = 2\gamma d.$$

$$\Rightarrow \boxed{V(M_0) = \sqrt{V_0^2 - 2gd\sin\alpha}}\quad 1$$

$\boxed{5}$

3- أ - العلاقة الأساسية هي: $\boxed{m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{N}}$ (0,25)

نختار المعلم الذاتي $(\vec{u}_T , \vec{u}_N)$ (0,25) : بالإسقاط نجد

$:\vec{u}_T$: $\boxed{\gamma_T = \frac{dV}{dt} = g \sin\theta}$ (0,25) $\boxed{1}$ $\Leftarrow \quad m\gamma_T = mg\sin\theta$

$:\vec{u}_N$: $\boxed{N = m\left[g\cos\theta - \frac{V^2}{R}\right]}$ (0,25) $\boxed{2}$ $\Leftarrow \quad m\gamma_N = mg\cos\theta - N$

من $\boxed{1}$ $\Leftarrow \quad V\frac{dV}{dt} = R\omega g \sin\theta \quad \Leftarrow \quad V\frac{dV}{dt} = Rg\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$

نحصل بالتكامل:

$$\int_{V(M_0)}^{V} V\,dV = Rg\int_{-30}^{\theta} \sin\theta \, d\theta \quad (0,25)$$

$$V^2 = V^2(M_0) + 2Rg\left[\cos 30 - \cos\theta\right] \Leftarrow \frac{1}{2}\left[V^2 - V^2(M_0)\right] = Rg\left[-\cos\theta\right]_{-30}^{\theta}$$

$$(1) \quad \boxed{V = \sqrt{V^2(M_0) + 2Rg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)}}$$

ب - عند الزاوية $\theta = 0$ نجد

$$(0,5) \quad \boxed{V(0) = \sqrt{V_0^2 - gd + 2Rg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}} \Leftarrow V(0) = \sqrt{V^2(M_0) + 2Rg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}$$

ما داخل الجذر يجب أن يكون موجباً حتى يصل الجسم إلى النقطة M_1

(0,25)

ج - من ② نجد :

$$N = m\left[g\cos\theta - \frac{V^2}{R}\right]$$

6

$$N = m\left[g\cos\theta - \frac{1}{R}\left\{V^2(M_0) + 2gR\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\theta\right)\right\}\right]$$

0,5

$$\boxed{N = mg\left[3\cos\theta - \sqrt{3} + 2\frac{d}{R}\sin\alpha\right] - \frac{m}{R}V_0^2}$$

يغادر الجسم سطح الكرة عندما . $N = 0$ أي 0,5

$$g\left[3\cos\theta_f - \sqrt{3} + 2\frac{d}{R}\sin\alpha\right] - \frac{V_0^2}{R} = 0$$

$$\boxed{\cos\theta_f = \frac{V_0^2}{3gR} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\frac{d}{R}\sin\alpha}$$

$\alpha = 30^\circ \Leftarrow$

0,5

$$\boxed{\cos\theta_f = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{V_0^2}{3gR} - \frac{d}{3R}}$$