الإمتحان الأول في الميكانيك

- التمرين 01 : (نظري : 05 نقاط)

1- باستعمال العلاقة بين المعلم المطلق و المعلم النسبي ، برهن العلاقة بين السرعة المطلقة و السرعة النسبية، مع تحديد عبارة كل حد من هذه العلاقة

2- أكتب بدون برهان العلاقة بين التسارع المطلق و التسارع النسبي ، حدد عبارة كل حد في العلاقة

3- أعط عبارة العمل المكانيكي المنجز من طرف قوة $\vec{F}$ ، ثم برهن علاقة نظرية الطاقة الحركية.

- التمرين 02 :(الحركيات : 07.5 نقطة)

نقطة مادية تتحرك حسب المعادلات الزمنية :

$$\rho = R(1 - \cos 2\omega t) \quad , \quad \theta = \omega t$$

1- عين معادلة المسار و أرسمه في المجال : $0 \le \theta \le 2\pi$

2- أحسب المركبات القطبية لشعاع السرعة ، ثم استنتج طويلته.

3- أحسب المركبات القطبية لشعاع التسارع ، و استخرج طويلته.

4- أحسب المركبات المماسية و الناظمية لشعاع التسارع.

5- أحسب نصف قطر الإنحناء بدلالة الزمن.

6- مثل شعاعي السرعة و التسارع عند النقطتين $\theta_1 = \pi/2$ و $\theta_2 = 5\pi/4$.

- التمرين 03 :(التحريك : 07.5 نقطة)

يقذف جسم نحو الأعلى على مستوي أملس زاوية ميله $\alpha = 30°$ ، بسرعة إبتدائية $\vec{V_0}$.

1- أكتب العلاقة الأساسية للتحريك ، ثم استخرج عبارة التسارع.

2- أوجد قيمة السرعة عند النقطة M_0 : $(OM_0 = d)$

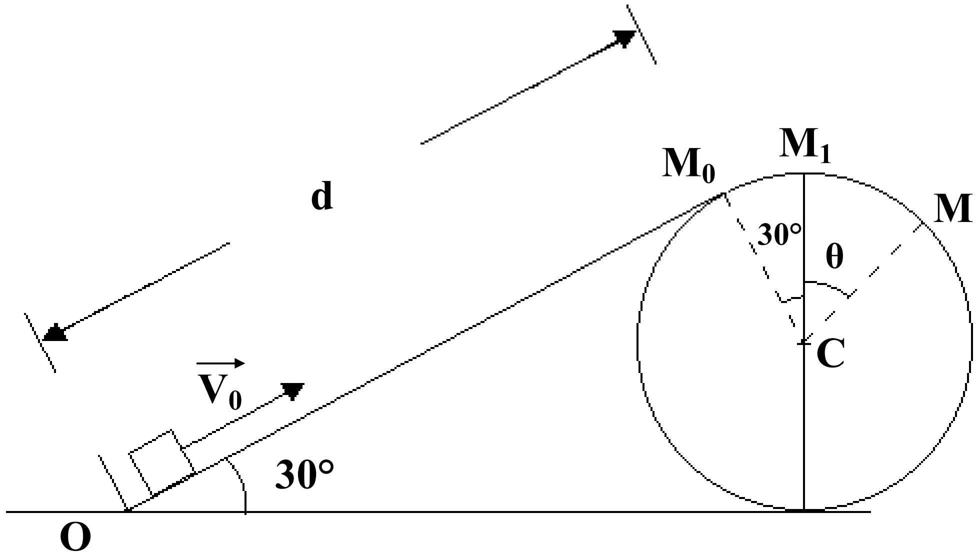
3- عند هذه النقطة ينزلق الجسم على سطح دائري أملس نصف قطره R و مركزه C

أ- أكتب العلاقة الأساسية للتحريك عند النقطة $M(\theta)$

ب- أستخرج عبارة السرعة عند النقطة $M(\theta)$

ج- ما هي قيمة $\vec{V_0}$ التي تجعل الجسم يتوقف عند النقطة $M_1(\theta = 30°)$

د - في حالة $\vec{V_0}$ أكبر من القيمة المحددة في (ج) أوجد الزاوية θ_f التي يفارق بها الجسم هذا السطح ، ناقش بدلالة السرعة الإبتدائية أكبر زاوية θ_f ممكنة



حل إمتحان الميكانيك

- التمرين (01): (نظري : 05 نقاط)

1) - العلاقة بين شعاعي الموضع:

0,25 $\boxed{\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}}$

0,25
$$\begin{cases} \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'} \end{cases}$$

السرعة المطلقة:

0,25 $\boxed{\vec{V_a} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$

السرعة النسبية:

0,25 $\boxed{\vec{V_r} = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}}$

نجد أن:

0,5 $\boxed{\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e}}$

حيث:

0,5 $\boxed{\vec{V_e} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}$

2)- لدينا:

0,5 $\boxed{\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}}$

حيث:

0,25 * $\vec{\gamma_a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

0,25 * $\vec{\gamma_r} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}$.

0,25 * $\vec{\gamma_e} = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$

0,25 * $\vec{\gamma_c} = 2\left[\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\vec{k'}}{dt}\right]$

3- العمل الميكانيكي العنصري : $\boxed{dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}}$ 0,25

والكلي : $W_{1\to 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l}$

نكتب : $\boxed{\begin{array}{l} \vec{F} = m\vec{\gamma} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} \\ d\vec{l} = \vec{v} \cdot dt \end{array}}$ ثم نعوض 0,25

و

$$dW = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

بالتكامل نجد : $\boxed{W_{1\to 2} = \int_1^2 m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \Big]_1^2}$ 0,5

مع $E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ ومنه

$\boxed{W_{1\to 2} = E_{c_2} - E_{c_1}}$ 0,5

- التمرين (02) : الحركيات : 07,5 نقطة)

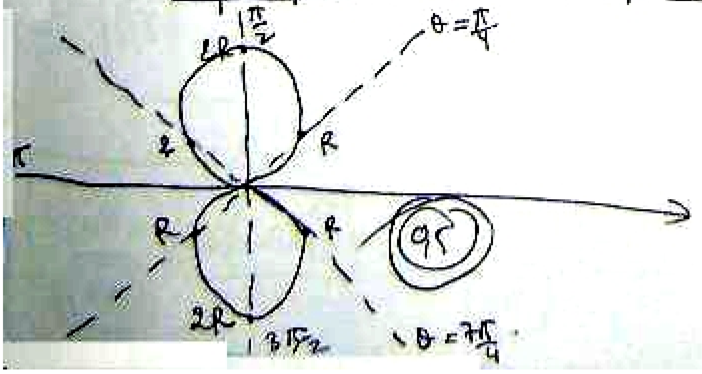
$\rho = R(1 - \cos 2\omega t)$ ، $\theta = \omega t$

1)- معادلة المسار : $\boxed{\rho = R(1 - \cos 2\theta)}$ 0,5

نكتب الجدول :

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\pi/4$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	0	0,293R	0,5R	R	2R	R	0	2R	R	0

0,5



2)- حساب مركبات السرعة :

$$\boxed{\vec{V} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta}$$ 0,5

$\dot{\rho} = 2\omega R \sin 2\omega t$ ، $\dot{\theta} = \omega = ct$

$$\boxed{\vec{V} = \omega R\left[2\sin 2\omega t \cdot \vec{u}_\rho + (1-\cos 2\omega t)\vec{u}_\theta\right]}$$ 0,5

و

$$\boxed{\|\vec{V}\| = \omega R\sqrt{5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t}}$$ 0,5

3)- حساب مركبات التسارع :

$$\boxed{\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta}$$ 0,5

$\ddot{\rho} = 4\omega^2 R\cos 2\omega t$ ، $\dot{\rho} = 2\omega R\sin 2\omega t$ ، $\dot{\theta} = \omega$ ، $\ddot{\theta} = 0$

$$\vec{\gamma} = \left[4\omega^2 R\cos 2\omega t - \omega^2 R(1-\cos 2\omega t)\right]\vec{u}_\rho + \left[4\omega^2 R\sin 2\omega t\right]\vec{u}_\theta$$

$$\vec{\gamma} = \left[5\omega^2 R\cos 2\omega t - \omega^2 R\right]\vec{u}_\rho + \left[4\omega^2 R\sin 2\omega t\right]\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{\gamma} = \omega^2 R\left[(5\cos 2\omega t - 1)\vec{u}_\rho + (4\sin 2\omega t)\vec{u}_\theta\right]}$$ 0,5

و

$$\boxed{\|\vec{\gamma}\| = \omega^2 R\sqrt{9\cos^2 2\omega t - 10\cos 2\omega t + 17}}$$ 0,5

4)- حساب المركبات المماسية والناظمية للتسارع :

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$ ، $\boxed{\|\vec{\gamma}_T\| = \dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}}$ 0,25 ، $\boxed{\|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma}_T\|^2}}$ 0,25

- حساب $\|\vec{\gamma}_T\|$:

$$\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$$

$$= \omega R \frac{+6\omega \cos 2\omega t . \sin 2\omega t + 2\omega \sin 2\omega t}{\sqrt{5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t}}$$

$$\boxed{\|\vec{\gamma}_T\| = \omega^2 R \frac{\sin 2\omega t \left(6\cos 2\omega t + 2\right)}{\sqrt{5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t}}}$$ 0,25

- حساب $\|\vec{\gamma}_N\|$:

$$\|\vec{\gamma}_N\| = \sqrt{\|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma}_T\|^2}$$

$$\boxed{\|\vec{\gamma}_N\| = \omega^2 R \sqrt{\frac{-27\cos^4 2\omega t + 12\cos^3 2\omega t + 116\cos^2 2\omega t - 16\cos 2\omega t - 85}{5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t}}}$$ 0,25

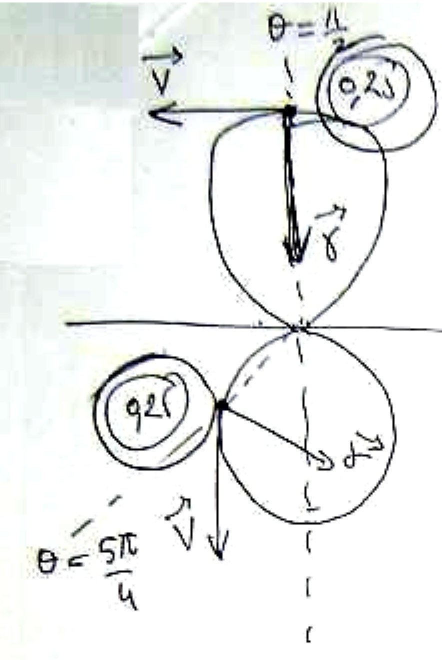
5) حساب نصف قطر الإنحناء :

$$\boxed{r = \frac{\|\vec{V}\|^2}{\|\vec{\gamma}_N\|}}$$ 0,25

$$r = \frac{\omega^2 R^2 \left(5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t\right)}{\omega^2 R \sqrt{\frac{- - - - -}{5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t}}}$$

0,75

$$\boxed{r = R \frac{\left(5 - 3\cos^2 2\omega t - 2\cos 2\omega t\right)^{3/2}}{\sqrt{-27\cos^4 2\omega t + 12\cos^3 2\omega t + 116\cos^2 2\omega t - 16\cos 2\omega t - 85}}}$$



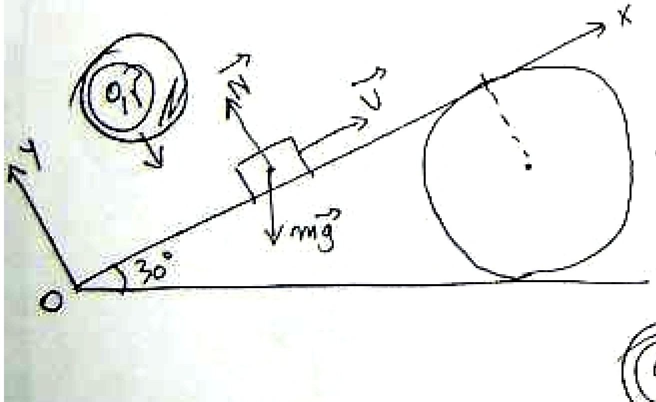
6) تمثيل شعاعي السرعة والتسارع :

$$\vec{V} = \omega R\left[2\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}\,\vec{u}_\rho + \left(1-\cos 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\vec{u}_\theta\right] = 2\omega R\,\vec{u}_\theta$$

0,25
$$\left.\begin{cases} \vec{V} = 2\omega R\,\vec{u}_\theta \\ \vec{\gamma} = -6\omega^2 R\,\vec{u}_\rho \end{cases}\right\}\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

0,25
$$\left.\begin{cases} \vec{V} = \omega R\left[2\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta\right] \\ \vec{\gamma} = \omega^2 R\left[-\vec{u}_\rho + 4\vec{u}_\theta\right] \end{cases}\right\}\ \theta = \frac{5\pi}{4}$$

التمرين (03): (التحريك : 07.5 نقطة)



1- $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{N} + \vec{P} = m\vec{\gamma}}$$

بالإسقاط :

ox : $-mg\sin 30 = m\gamma$

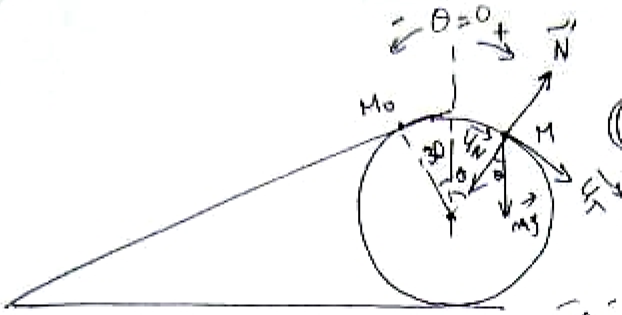
0,5
$$\boxed{\gamma = -g\sin 30 = -\frac{g}{2}}$$

2- الحركة متغيرة بإنتظام لذلك

$$V^2 - V_0^2 = 2\gamma\cdot(x - x_0)$$

$$V_{M_0}^2 - V_0^2 = 2\left(-\frac{g}{2}\right)(d) \Rightarrow \boxed{V_{M_0} = \sqrt{V_0^2 - g\cdot d}}$$

0,5



3 - أ -

عند النقطة M :

$$\boxed{\vec N + m\vec g = m\vec\gamma}$$ (0,5)

نختار الإحداثيات الذاتية

بالإسقاط :

$\vec u_T$: $\boxed{mg\sin\theta = m\gamma_T}$ (1) (0,25) $\gamma_T = \frac{dV}{dt}$

$\vec u_N$: $\boxed{mg\cos\theta - N = m\gamma_N}$ (2) (0,25) $\gamma_N = \frac{V^2}{R}$

ب - من المعادلة (1) نجد $mg\sin\theta = m\frac{dV}{dt}$.

(0,5)

$\Leftarrow$ $d\theta = \omega\, dt = \frac{V}{R}dt$, $mg\sin\theta = m\frac{dV}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt}$

$\Leftarrow$ $\cancel{m}g\sin\theta .\, d\theta = \cancel{m}\frac{V}{R}\,dV$

بالتكامل : $V\,dV = R.g\sin\theta\, d\theta$

(0,5) $$\boxed{\frac{1}{2}\left(V^2 - V_{M_0}^2\right) = Rg\left[-\cos\theta\right]_{-30}^{\theta} = Rg\left[-\cos\theta + \cos 30\right]}$$

$\Leftarrow$ $$\boxed{V = \sqrt{V_{M_0}^2 - 2Rg(\cos\theta - \cos 30)}}$$ (0,5)

ج - في هذه الحالة M_1 توافق $\theta = 0°$ حسب تعريف المرجع

وتكون $\boxed{V(M_1) = 0}$ $\Leftarrow$ (0,5)

$V_{M_0}^2 - 2Rg(\cos 0 - \cos 30) = 0$ $\Leftarrow$ (0,5) $$\boxed{V_{M_0}^2 = 2Rg\left(1 - \frac{\sqrt 3}{2}\right)}$$

و بعد تعويض V_{M_0} ان

$$V_1^2 = g d + 2Rg\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

0,5 ⇐ $\boxed{V_{01} = \sqrt{g\left[d + 2R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}}$

د- عندما تكون $\boxed{V_0 > V_{01}}$ 0,25 يتجاوز الجسم النقطة M_1

ويغادر السطح عندما تصبح $\boxed{N=0}$ 0,25

من المعادلة (2):

$$N = mg\cos\theta - m\left[\frac{V_{M_0}^2}{R} - 2g(\cos\theta - \cos 30)\right]$$

$$N = m\left[g\cos\theta - \frac{V_{M_0}^2}{R} + 2g\cos\theta - 2g\cos 30\right]$$

0,5 $\boxed{N = m\left[3g\cos\theta - g\sqrt{3} - \frac{V_0^2 - gd}{R}\right] = 0}$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{V_0^2 - gd}{3gR}$$

0,5 $\boxed{\cos\theta = \frac{1}{3gR}.V_0^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{d}{3R}\right) = \left(\frac{1}{3gR}\right)V_0^2 - \left(\frac{d-\sqrt{3}R}{3R}\right)}$

أكبر زاوية ممكنة توافق القيمة الصغرى لـ $\cos\theta$.

يشترط تحقيق العلاقة 0,5:

$$V_0 > V_{01} = \sqrt{g\left[d + 2R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}$$