الفصل الخامس: ديناميك النقطة المادية

مدخل : في هذا الفصل ننتقل من وصف الحركات إلى النظر في الأسباب التي أدت إليها مع إمكانية توقع مآلها ومستقبلها.

قوانين نيوتن الثلاثة :- **مبدأ العطالة - القانون الاساسي للتحريك - مبدأ الفعل ورد الفعل** ، تسمح بترجمة حركة نقطة مادية إلى معادلة تفاضلية. حل هذه المعادلة بالنسبة لحقل قوى معين يؤدي إلى توقع الكيفية التي سوف تتم بها حركة النقطة المادية عند معرفة الشروط الابتدائية.

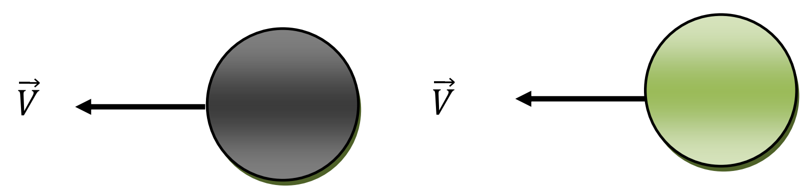
المعارف اللازمة لتناول الموضوع هي كل ما يتعلق بحركة النقطة المادية مع المفاهيم الأساسية اللازمة لحل المعادلات التفاضلية البسيطة.

الأهداف المقصودة في هذا الفصل، هي جمع كل المفاهيم النظرية المطلوبة لكي نتمكن من كتابة معادلة الحركة لنقطة مادية **بشكل صحيح** ثم حلها.

I - مفاهيم عامة

1- الكتلة:

نعتبر التجربة البسيطة التالية: نريد أن ندفع كرة تنس وكرة حديدية بنفس السرعة $\vec{V}$.



لا شك أن دفع كرة التنس بالسرعة $\vec{V}$ هو أسهل بكثير من دفع كرة الحديد. وبالمقابل يكون إيقاف الكرة الحديدية أصعب. نستخلص إذن أن سرعة جسم $\vec{V}$ لا تكفي وحدها لوصف حركته. فزيادة على المقادير الحركية $\vec{V}$ و $\vec{\gamma}$ ، لا بد من إدخال مقدار فيزيائي آخر يميز قدرة الجسم على مقاومة الحركة والتي تسمى **"العطالة".** هذا المقدار الذي يجب أن يرفق بكل جملة فيزيائية لنعبر عن **"عطالتها"** قد تم الاصطلاح على تسميته " **بالكتلة** " والتي نرمز لها عادة ب m وهي ممثلة بعدد حقيقي **موجب**. نعتبر الكتلة m ثابتة، أي لا تتعلق بخصائص الحركة (وخاصة السرعة) ومستقلة عن المرجع الذي تم اختياره لوصف الحركة. نعتبر أيضا أن الكتلة m محفوظة، أي الكتلة الكلية لجملة مادية تساوي مجموع الكتل للأجزاء المكونة لها، وهذا حتى في حالة التأثير المتبادل بينهم. تحديد كتلة جملة عيانية يتم عمليا باستعمال الميزان وفقا لطرق الوزن المعروفة. الكتلة هي مقدار فيزيائي سلمي شدي، وحدتها في النظام العالمي $(S.I)$ هي **الكيلوغرام** $[\boldsymbol{Kg}]$ والذي يوافق النموذج الموضوع في المكتب العالمي للأوزان و القياسات $[B.I.P.M]$ منذ 1901. في أحسن ظروف القياس، يمكن قياس كتلة بدقة نسبية تساوي 10^{-11} - 10^{-12}.

2- **كمية الحركة :**

نعتبر نقطة مادية كتلتها m تتحرك في مرجع معين بسرعة $\vec{V}$. هذه النقطة تملك كمية الحركة $\vec{P}$ المعرفة بالعلاقة :

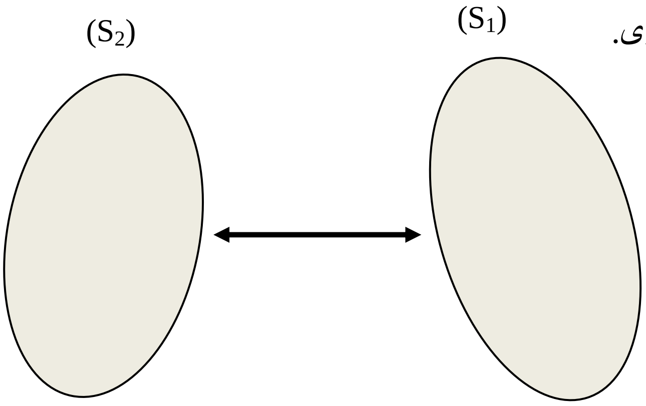
$$\boldsymbol{\vec{P} = m\,\vec{V}}$$

لما تكون السرعة $\vec{V}$ معروفة، كرة الحديد تملك كمية حركة أكبر من كمية حركة كرة التنس. وكمية الحركة لكرة كتلتها m تكون أكبر كلما كانت سرعتها أقوى.

2- التأثير المتبادل، مفهوم القوة:

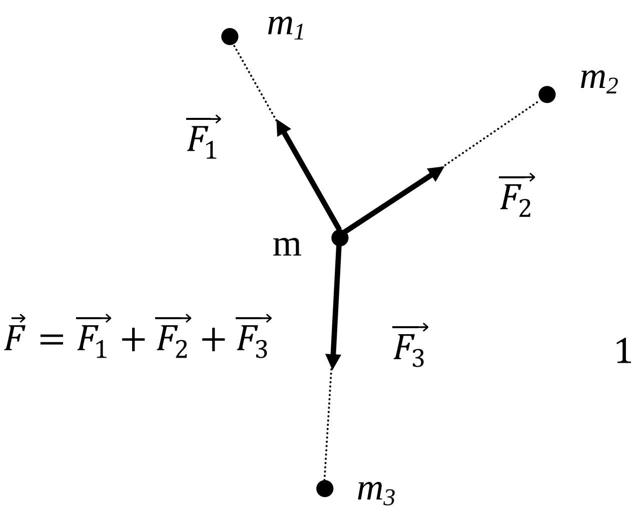
نعتبر جملتين ماديتين (S_1) و (S_2). نقول أن الجملتين في حلة **"تأثير متبادل"**، عندما يؤدي أي تغيير

في إحدى الجملتين إلى حدوث تغيير في الجملة الأخرى.



جميع التأثيرات الموجودة في الطبيعة تملك الخاصية المشتركة التي تعبر عن تناقصها، منتهية إلى الصفر، لما تصير المسافة بين الجملتين لا منتهية في الكبر. تكون " **جملة معزولة"** عندما لا تتعرض لأي تأثير خارجي ، ولذلك فكل جملة بعيدة جدا عن أي مادة أخرى تحقق شروط الجملة المعزولة. في كثير من الأحيان نكتفي في تحديد الجملة المعزولة بشروط أقل صرامة.

تثبت التجربة ، في إطار الفيزياء العيانية ، أن التأثيرات بين النقاط المادية يمكن التعبير عنها باستعمال مقادير شعاعية تسمى: **القوى** (جمع قوة). هذه القوى يمكن تركيبها وفق قاعدة متوازي الأضلاع في جمع الأشعة. إذن، عندما تكون نقطة مادية تحت عدد من التأثيرات المتبادلة في نفس الوقت، يمكن وصف تأثيرها المتبادل مع جميع الكون بواسطة قوة واحدة تساوي المجموع الشعاعي لكل القوى التي تؤثر على هذه النقطة.



في النظام العالمي $S.I.$ ، وحدة شدة القوة هي **النيوتن** $(\boldsymbol{N})$: $[F] = [N]$

سوف نرى في ما يأتي أن: $1N = 1Kg.m.s^{-2}$

التأثيرات الكونية الأساسية هي:

- **التأثير الكهرومغناطيسي** : $\vec{F_e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_2}{{r_{12}}^2}\ \vec{u}_{12}$

- **التأثير الثقالي (الجاذبية)** : وهو المسئول عن حركة جميع الأجرام السماوية ويشرح ثقل كل جسم.

هذا التأثير محدد في النظرية الكلاسيكية **" بقانون نيوتن"** ويخص جميع الأجسام سواء كانت مشحونة أو محايدة. بالنسبة لكتلتين m_1 و m_2 ، قانون نيوتن يترجم بقوة التأثير:

$$\vec{F_g} = -G\,\frac{m_1\, m_2}{{r_{12}}^2}\ \vec{u}_{12}$$

حيث G هو **ثابت الجاذبية** وقيمته في النظام العالمي: $G = 6\cdot 672\ 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot Kg^{-2}$

باستعمال عملية الجمع نجد القوة التي تؤثر على كتلة m من طرف مجموعة من الكتل $\{m_i\}$:

$\vec{F} = m\cdot\vec{\alpha}$ مع : $\vec{\alpha} = -G\cdot\sum_i \frac{m_i}{{r_i}^2}\cdot\vec{u_i}$. على المستوى **الذري** : $F_g/F_e \approx 10^{-40}$

ويعني أن قوة الجاذبية في هذا المستوى صغيرة جدا أمام القوة الكهربائية. ولكن بالنسبة للكواكب أو على مستوى أكبر من ذلك ، ونظرا لكون المادة على العموم محايدة ، فإن قوة الجاذبية هي الحاكمة.

يجب أن نشير هنا إلى مظهر ملفت لقانون نيوتن. فنفس المقدار السلمي m (الكتلة) يتدخل في قانونين مختلفين للميكانيك : - في كمية الحركة: $\vec{P} = m\vec{V}$ التي سوف نستعملها في القانون الأساسي للتحريك

- وفي قانون الجاذبية العام: $\vec{F_g} = -G\ \frac{m_1\, m_2}{{r_{12}}^2}\ \vec{u}_{12}$. في القانون الأول الكتلة m تميز خاصية العطالة للمادة وفي القانون الثاني m_i تميز قدرة الجذب لكل جسم i. منطقيا، كان علينا أن نكتب القانونين من الشكل : $\vec{P} = m_i\vec{V}$ و $\vec{F_g} = -G\ \frac{m_{g1}\, m_{g2}}{{r_{12}}^2}\ \vec{u}_{12}$ حيث m_i تمثل الكتلة الخاملة

(المسببة للعطالة) و m_g كتلة الجاذبية. جميع التجارب التي تم إجراؤها من أجل إظهار الاختلاف بين الكتلتين بينت وبالدقة المطلوبة أن: $m_i = m_g$ ، فلا مكان إذن للتفريق بين الكتلة الخاملة وكتلة الجاذبية.

تأثير الجاذبية ، مثل التأثير الكهرومغناطيسي ، لهما امتداد لا متناهي مما يبين أن تأثيرهما يبقى موجودا حتى على مسافات بعيدة جدا. ولهذا، فإن مذنب هالي - Halley - يعود ليقترب من الشمس كل 76 سنة، بعد أن ابتعد عنها بأكثر من 5 مليار كيلومتر. فحتى عند هذه المسافة، يبقى المذنب يحس بتأثير المجموعة الشمسية.

- **التأثير القوي** : مسئول عن التحام البروتونات والنيترونات في النواة الذرية. امتداده قصير جدا ولا يتعدى 10^{-13} متر.
- **التأثير الضعيف** : مسئول عن الإشعاع β.

3- المراجع الغاليلية ومبدأ العطالة :

توجد مراجع متميزة تسمى المراجع الغاليلية أو مراجع العطالة وتعرف كما يلي :

"المراجع الغاليلية أو مراجع العطالة هي التي تكون فيها حركة نقطة مادية معزولة مستقيمة منتظمة".

مبدأ العطالة كما هو الحال بالنسبة لكل مبدأ لا يمكن أن نبرهن عليه غير أنه يتطلب بعض التعقيبات. هذا المبدأ يشكل تعريفا للمراجع الغاليلية وهو يفترض وجودهم. والسؤال المطروح : هل توجد حقيقة مراجع غاليلية في الكون ؟

مرجع كوبرنيك (Copernic):

تتميز المراجع الغاليلية بكون كل قوانين المكانيك، وخاصة القانون الأساسي للتحريك، غير صحيحة إلا في مثل هذه المراجع. يمكن الوصول إلى تحديد مثل هذه المراجع عن طريق البحث من أجل التأكد من

صحة القانون الأساسي للتحريك. باستعمال مقاربات متتالية تم الوصول إلى نتيجة تفيد أن قوانين الديناميك مقبولة في مرجع كوبرنيك المعرف كما يلي:

" مرجع كوبرنيك هو مرجع مبدأه مركز الشمس ومحاوره موجهة نحو ثلاثة نجوم ثابتة وبعيدة جدا."

وكخلاصة يمكن القول أن المراجع الغاليلية هي التي تنتقل بحركة خطية منتظمة بالنسبة لنجوم مجرة درب التبانة.

ملاحظة : مرجع الأرض هو بتقريب أولي مرجع غاليلي.

كثير من التجارب يتم إجراءها على سطح الأرض علما بأن المراجع المرتبطة بها غير غاليلية بسبب دوران الأرض حول الشمس وحول نفسها. بالنسبة لأغلب التطبيقات العلمية التي لا تتطلب دقة عالية جدا، بينت التجربة أن المرجع المرتبط بالأرض يمكن اعتباره وبتقريب جيد مرجعا غاليليا.

ـ كمية الحركة و قوانين الديناميك :

في حالة جملة مكونة من نقطتين ماديتين لكل منهما كمية حركة $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ فإن كمية الحركة الكلية تساوي مجموع كميتي الحركة لكل منهما.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_1$$

عندما تشكل النقطتان الماديتان معا جملة معزولة فإن كمية الحركة الكلية للجملة تبقى ثابتة.

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \overrightarrow{Cte}$$

هذا القانون يسمى مبدأ حفظ كمية الحركة.

إذا كان لدينا عند الزمن t : $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ وعند الزمن t' : $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P'}_1 + \overrightarrow{P'}_2$ فإن العلاقتين تستلزمان أن : $\vec{P}_1 - \overrightarrow{P'}_1 = \overrightarrow{P'}_2 - \vec{P}_2$ أو $\overrightarrow{\Delta P}_1 = -\overrightarrow{\Delta P}_2$. هذه النتيجة تعني أن أي تزايد في كمية

حركة إحدى النقطتين يؤدي إلى تناقص مساو في كمية حركة النقطة الأخرى ونقول بأنه يوجد تبادل بين النقطتين الماديتين. المقدار $\vec{I} = \overrightarrow{\Delta P}$ يسمى **الدفع المستقبل** (Impulsion) من طرف النقطة المادية.

II – القوانين الأساسية للتحريك (قوانين نيوتن)

1 - قانون العطالة: عندما لا تتعرض نقطة مادية لأي تأثير خارجي (معزولة) فإنها تتحرك بكمية حركة ثابتة: $\vec{P} = m\,\vec{V} = \overrightarrow{Cte}$. عندما تكون m ثابتة فإنها تتحرك إذن بسرعة $\vec{V}$ ثابتة أي وفق حركة مستقيمة منتظمة.

2 - القانون الأساسي للتحريك: في مرجع غاليلي ، القوة التي تؤثر على نقطة مادية تساوي مشتق شعاع كمية الحركة بالنسبة للزمن، أي : $\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{dP}}}{\boldsymbol{dt}}$ مع $\vec{P} = m\,\vec{V}$. عندما تكون m ثابتة و $\vec{\gamma}$ تشير إلى تسارع النقطة المادية في المرجع الغاليلي المعتبر فإن العلاقة الأساسية تكتب : $\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{\gamma}}$

- عندما يكون حقل القوى المؤثرة معروفا فإن القانون الأساسي للتحريك يؤدي إلى معادلة تفاضلية حلها يسمح بتحديد حركة النقطة المادية.
- عندما تكون الحركة معروفة فإن القانون يؤدي إلى إيجاد حقل القوة $\vec{F}$ ، وهي الطريقة التي اتبعها نيوتن للحصول على قانون الجاذبية الكوني انطلاقا من قوانين كيبلر (*Kepler*).
- عندما تكون الحركة والقوة معروفتان ، فإن القانون الأساسي يسمح بتحديد الكتلة وهو المبدأ المستعمل في مطيافية الكتلة الخاصة بالتحليل الكيميائي.
- من العلاقة الأساسية نجد : $1\,N = 1\,Kg\,m\,s^{-2}$

3 - مبدأ الافعال المضادة : نعتبر جملة معزولة مشكلة من نقطتين ماديتين M_1 و M_2 كمية

حركتيهما $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$. كمية الحركة الكلية للجملة محفوظة :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \overrightarrow{Cte}$$

أو :
$$\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dP_1}}{dt} + \frac{\overrightarrow{dP_2}}{dt} = \vec{0}$$

القوة التي تؤثر على الجملة هي داخلية فقط. النقطة M_1 تخضع إلى قوة تتعرض لها من طرف

M_2: $\vec{F}_{21} = \frac{\overrightarrow{dP_1}}{dt}$ و M_2 تخضع لقوة من طرف M_1: $\vec{F}_{12} = \frac{\overrightarrow{dP_2}}{dt}$. وبما أن:

$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = \vec{0}$ فإنه يستلزم أن: $\boldsymbol{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$. إذن، القوة التي تؤثر من طرف M_1

على M_2 **معاكسة** للقوة التي تؤثر بها M_2 على M_1 (متساويتان في الشدة ومتعاكستان في

الاتجاه).

III - تطبيقات

1 - جملة ذات كتلة متغيرة (الصاروخ):

الصاروخ هو نظام يحقق دفعه الذاتي باستعمال الغازات التي يقذفها في الاتجاه المعاكس لحركته.

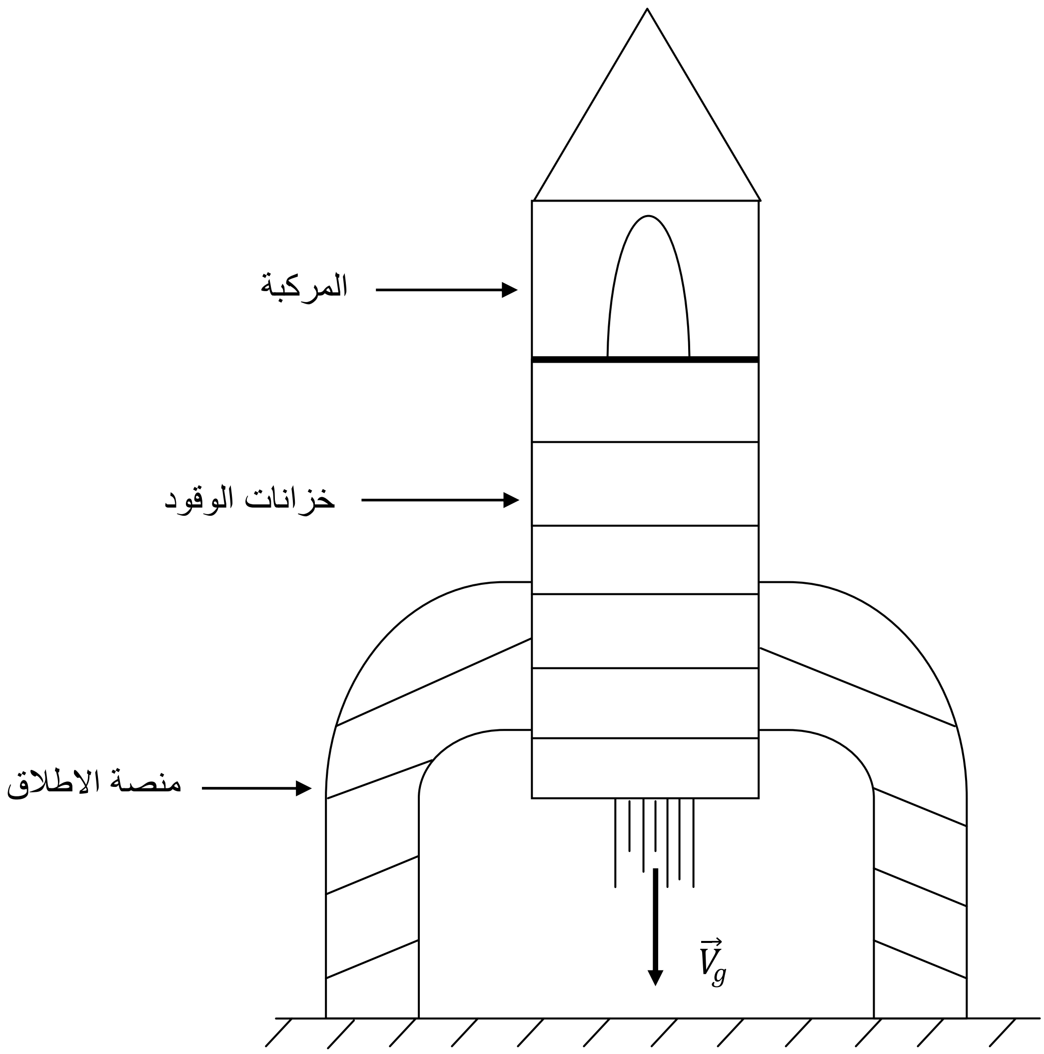
حمولته مشكلة أساسا من المعدات التي ينقلها إلى الفضاء وخزانات الوقود المستعمل للدفع.

المعطيات الخاصة بالصاروخ هي :

- نسبة الكتلة المستعملة على الكتلة الكلية m/m_0 حيث m_0 هي الكتلة الكلية مع

الوقود و m الكتلة من دون الوقود.

- سرعة الغازات المنفوثة من الصاروخ $\vec{V_g}$ (سرعتها بالنسبة للصاروخ).
- سرعة استهلاك الوقود التي تساوي سرعة تناقص الكتلة : $\mu = -\frac{dm}{dt}$.
- وضعية إطلاق الصاروخ شاقولية وسرعته الابتدائية معدومة.
- الإقلاع يتم تحت تأثير ثقله.



المعادلة الأساسية للتحريك تكتب : $\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \vec{F}_{ext} = m\,\vec{g}$

حساب السرعة التي يبلغها الصاروخ لما يصل العلو الذي يوضع عنده في مداره، أي بعد استهلاك كل الوقود، يتطلب الحصول على عبارة التغير في كمية الحركة $\overrightarrow{dP}$ بين الزمن t والزمن $t + dt$.

في اللحظة t الصاروخ يملك الكتلة m والسرعة $\vec{V}$. في اللحظة $t + dt$ الصاروخ يملك الكتلة $m + dm$ حيث dm سالبة، والسرعة $\vec{V} + \overrightarrow{dV}$ مع تحول كمية الوقود $(-dm)$ إلى غازات منبعثة بسرعة $\vec{V}_g$ بالنسبة للصاروخ وسرعة $\vec{V} + \overrightarrow{dV} + \vec{V}_g$ بالنسبة لمرجع الأرض.

في اللحظة t: $\vec{P} = m\,\vec{V}$.

وفي اللحظة $t + dt$: $\vec{P} + \overrightarrow{dP} = (m + dm)\big(\vec{V} + \overrightarrow{dV}\big) + (-dm)(\vec{V} + \overrightarrow{dV} + \vec{V}_g\,)$

أي: $\vec{P} + \overrightarrow{dP} = m\,\vec{V} + m\,\overrightarrow{dV} - \vec{V}_g\,dm$ ، أو: $\overrightarrow{dP} = m\,\vec{V} - \vec{V}_g\,dm$

وعندما نقسم المعادلة الأخيرة على dt نحصل على : $\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = m\,\frac{\overrightarrow{dV}}{dt} - \vec{V}_g\,\frac{dm}{dt} = m\,\vec{g}$

وإذن: $$m\,\frac{\overrightarrow{dV}}{dt} = m\,\vec{g} + \overrightarrow{V_g}\,\frac{dm}{dt}$$

الصاروخ هو إذن تحت تأثير قوتين : قوة الجاذبية $m\,\vec{g}$ وقوة الدفع للغازات $\overrightarrow{V_g}\,\frac{dm}{dt}$.

عندما نسقط معادلة الحركة على محور شاقولي موجه نحو الأعلى مثل شعاع السرعة $\vec{V}$

فإننا نحصل على المعادلة : $$m\,\frac{dV}{dt} = -V_g\,\frac{dm}{dt} - m\,g$$

لأن $\vec{V}_g$ و $\vec{g}$ موجهان نحو الأسفل مع $\frac{dm}{dt} < 0$. وبجداء المعادلة السابقة في dt

نحصل على معادلة تفاضلية مفصولة المتغيرات: $dV = -V_g\,\frac{dm}{m} - g\,dt$

وعندما نكامل بين الزمن $t = 0$ والزمن t نحصل على:

$$\int_0^V dV = -V_g \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

وفي النهاية نجد : $V = V_g \ ln \frac{m_0}{m} - g\ t$

السرعة النهائية للصاروخ بعد استهلاك كل الوقود تتعلق إذن :

- بسرعة نفث الغازات ، فكلما كانت V_g كبيرة كانت السرعة V أيضا كبيرة.
- بالنسبة $m_0/_m$ التي كلما كانت أيضا كبيرة كانت V كبيرة.
- بزمن الدفع t الذي يجب تقليصه إلى أقصى ما يمكن وذلك باستعمال سرعة تدفق الوقود μ الأكبر. يجب إذن استعمال الوقود الأقل وزنا (*Hydrogène*).

على العموم المشكلة ليست بسيطة لهذا الحد ، والمادة المستعملة لخزانات الوقود تشكل حمل زائد تؤثر على الاشتغال الأمثل للصاروخ. ولهذا تستعمل عادة صواريخ مشكلة من عدة طوابق وكلما فرغ خزان يتم التخلص منه لتقليص حمولة الصاروخ من أجل بلوغ السرعة V الأكبر.

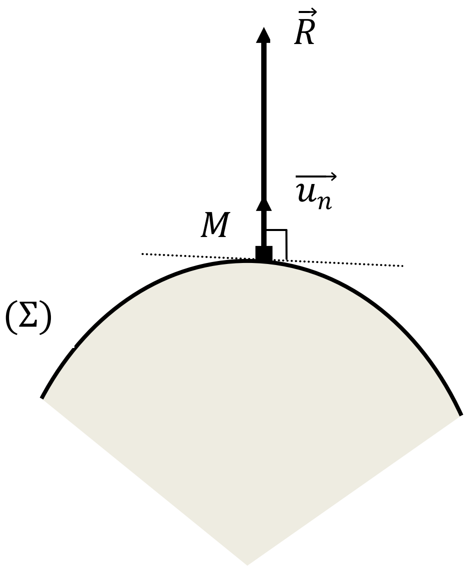
2 -قوى الالتصاق (Forces de contact) :

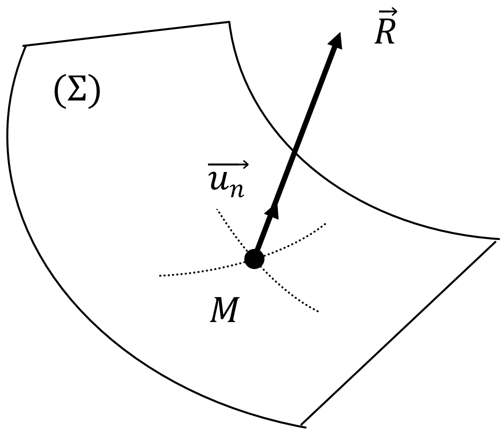
قوى الالتصاق هي تأثيرات ميكانيكية تظهر عند التلامس المباشر بين جملتين ماديتين صلبتين.

وهي نوعان:

- **قوى الالتصاق من دون احتكاك** : نحصل على رابطة من دون احتكاك بين سطح مادي (Σ) وسطح نقطة مادية M عندما لا يؤدي الالتصاق بينهما إلى أي مقاومة أثناء انزلاق النقطة المادية على السطح (Σ). عمليا نحصل على مثل هذا الالتصاق عندما يكون السطح (Σ) أملس تماما. في هذه الحالة نحصل على روابط مثالية تؤدي إلى قوى

التصاق ناظمية على السطح (Σ). الشكل الهندسي للسطح (Σ) يسمح بتحديد الاتجاه الناظمي الذي يشير إلى اتجاه قوة الالتصاق.

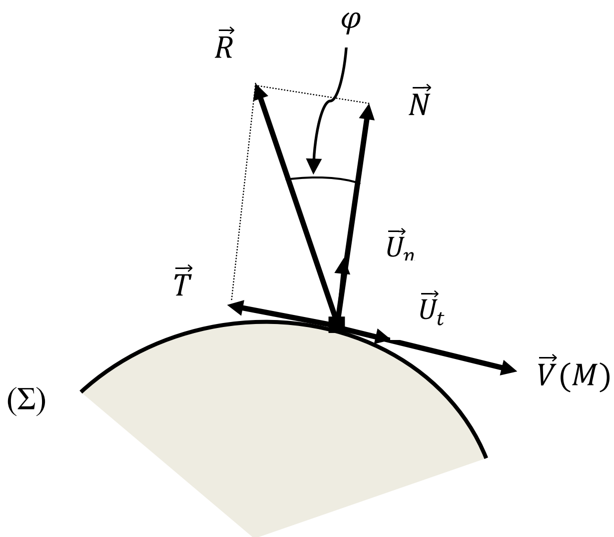


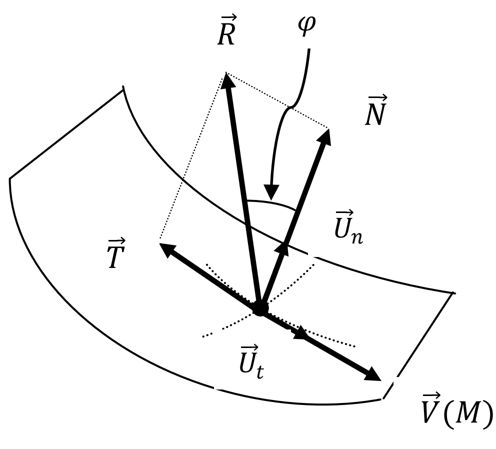


$$\vec{R} = R \cdot \vec{u}_n$$

$\vec{u}_n$ هو شعاع الواحدة العمودي على السطح (Σ) في موقع وجود النقطة M .

- **قوى الالتصاق بوجود احتكاك:** عندما يكون السطح (Σ) يتميز بقدر من الخشونة، فإن حركة M على (Σ) تتعرض إلى مقاومة في الاتجاه المعاكس لشعاع السرعة. قوة الالتصاق لا تكون إذن عمودية على السطح (Σ) وإنما تنحرف بزاوية φ في الاتجاه المعاكس لحركة النقطة المادية تسمى زاوية الاحتكاك.





لدينا من الشكل السابق: $\vec{U}_t$ هو شعاع الواحدة الذي يحدد اتجاه حركة النقطة M ، $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ ،

$\vec{V}(M) = \|\vec{V}(M)\| \, \vec{U}_t$ ، $\vec{R} \cdot \vec{U}_n = N$ ، $\vec{R} \cdot \vec{U}_t = T$ ، $tg\varphi = T/N$.

إن النتائج التجريبية الخاصة بقوى الالتصاق صلب - صلب قد أدت إلى وضع قوانين تسمى **"قوانين الاحتكاك الصلب"** وهي:

1 - تكون النقطة المادية M ساكنة على السطح (Σ) لما: $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f_s$ ، حيث f_s هو معامل يتعلق بحالة السطح (Σ) ، فكلما كان السطح خشن أكثر كلما كانت قيمة f_s عالية أكثر. هذا المعامل يسمى **"معامل الاحتكاك الستاتيكي"** أو **"معامل الاحتكاك في حالة السكون"**.

2 - تنزلق النقطة M على السطح (Σ) لما: $\frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = f_c = tg\varphi$ ، f_c يسمى **" معامل الاحتكاك الحركي"**. مركبة القوة $\vec{T}$ هي في الاتجاه المعاكس للحركة أي لشعاع السرعة $\vec{V}(M)$ ونكتب إذن: $\vec{T} = -f_c \, \|\vec{N}\| \, \frac{\vec{V}(M)}{\|\vec{V}(M)\|}$ أو: $\vec{T} = -f_c \cdot \|\vec{N}\| \cdot \vec{U_t}$. على العموم لدينا: $f_c < f_s$.

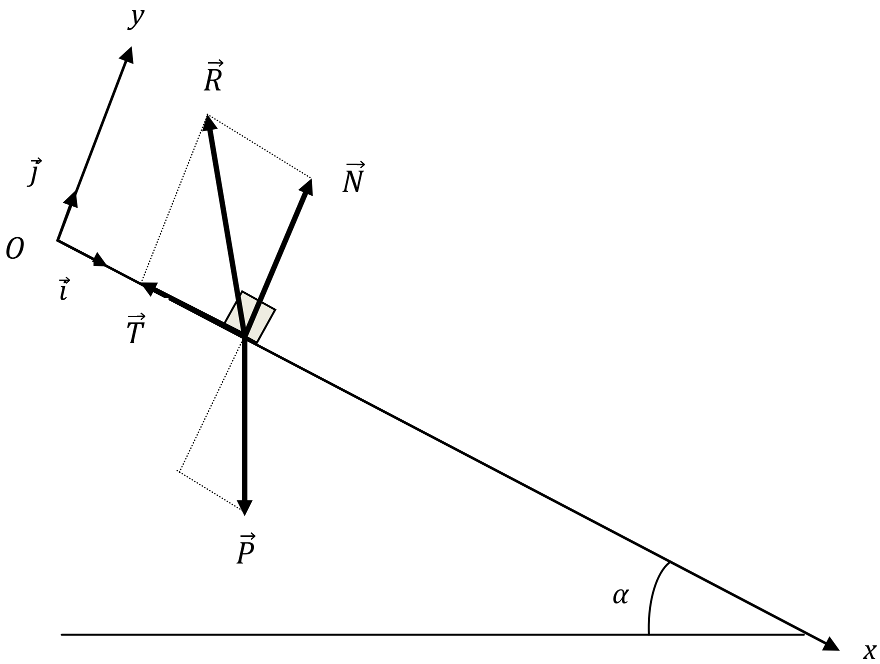
عندما تكون M في حالة سكون، اتجاه $\vec{R}$ يصنع زاوية α مع اتجاه المركبة الناظمية $\vec{N}$. α تبقى دائما أكبر أو على الأقل تساوي زاوية الاحتكاك φ ، أي: $tg\alpha \geq tg\varphi$.

تطبيق: حركة نقطة مادية على مستوي مائل.

تترك نقطة مادية M كتلتها m من دون سرعة ابتدائية على مستوي مائل يصنع زاوية α مع المستوي الأفقي. الالتصاق بين M والمستوي الأفقي يتميز بمعامل احتكاك : $f = f_c = f_s$.

1 - ادرس إمكانية سكون النقطة M على المستوي المائل.

2 - عند الحركة ، اوجد التسارع والسرعة بدلالة الزمن .



1 -في المرجع $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ المعادلة الأساسية للتحريك تكتب :

$\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{\gamma}$ مع : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

في المرجع $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ لدينا :

$\vec{P} = m\,g\,sin\alpha\,\vec{i} - m\,g\,cos\alpha\,\vec{j}$ ، $\vec{R} = -T\,\vec{i} + N\,\vec{j}$

و $\vec{\gamma} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$.

وبما أنه لا توجد حركة في الاتجاه $\overrightarrow{Oy}$ فإن: $\ddot{y} = 0$ ، ونحصل لذلك على:

$m\,g\,sin\alpha - T = m\,\ddot{x}$ و $-m\,g\,cos\alpha + N = 0$

في حالة السكون: $\ddot{x} = 0$ ، والمعادلات السابقة تكتب إذن:

$m\,g\,sin\alpha = T$ و $m\,g\,cos\alpha = N$ وعندما نقسم T على N نجد :

$$\frac{T}{N} = tg\alpha < f_s = f_c = f$$

2- فإن ، α عندما نزيد في زاوية الميل $tg\alpha < f$ تصبح غير متحققة ويؤدي ذلك إلى انزلاق M

يعطينا : $\frac{T}{N} = f$ على المستوي المائل والقانون الثاني للاحتكاك الصلب:

$$\vec{T} = -f\,N\,\vec{\imath}$$

وعندما نعوض T و N في معادلة الحركة نجد:

$$m\,\ddot{x} = m\,g\,sin\alpha - f\,N = m\,g\,sin\alpha - f\,m\,g\,cos\alpha$$

أو : $\ddot{x} = g(sin\alpha - f\,cos\alpha)$

أي : $\vec{\gamma} = g(sin\alpha - f\,cos\alpha)\,\vec{\imath}$

وعندما نكامل نحصل على: $\vec{V} = \dot{x}\,\vec{\imath} = g(sin\alpha - f\,cos\alpha)\,t\,\vec{\imath}$

السرعة $\vec{V}$ هي دائما في اتجاه الحركة ، أي : $g(sin\alpha - f\,cos\alpha) > 0$

أي : $tg\alpha > f$ أو : $tg\alpha > tg\varphi$

<u>الاحتكاك صلب – مائع :</u> عندما يتحرك جسم صلب داخل مائع (سائل أو غاز) فإنه يتعرض لقوة احتكاك تتعلق بسرعته. عندما تكون السرعة منخفضة (أقل من $1\,m\,s^{-1}$ في الهواء)، فإن هذه القوة تكتب من الشكل: $\vec{F} = -k\,\vec{V}$. معامل الاحتكاك k يتعلق بلزوجة المائع η والشكل الهندسي للجسم الصلب.

في حالة كرة نصف قطرها R : $k = 6\,\pi\,\eta\,R$.

في حالة السرعات العالية للجسم الصلب، فإن قوة الاحتكاك تصبح متناسبة مع مربع السرعة ويمكن أن نكتب : $\vec{F} = -k \cdot V \cdot \vec{V}$.

VI - العزم الحركي

1 - **تعريف:** نعتبر نقطة مادية M تملك كمية حركة $\vec{P}$ ونأخذ نقطة كيفية من الفضاء O . نعرف العزم الحركي للنقطة المتحركة M بالنسبة للنقطة O بعزم شعاع كمية الحركة $\vec{P}$ بالنسبة للنقطة O. ونكتب: $\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$.

في حالة نقطتين ماديتين M_1 و M_2 لهما على التوالي كميتي الحركة $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ فإن العزم الحركي الكلي هو: $\vec{L}_{/O} = \vec{L}_1 + \vec{L}_1 = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{P}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{P}_2$.

2 - **نظرية العزم الحركي:** خلافا لكمية الحركة، فإن العزم الحركي يتعلق بموقع النقطة O وهو على العموم يتغير معه. حساب مشتقة : $\vec{L}_{/O}$ بالنسبة للزمن يعطينا:

$$\frac{\overrightarrow{dL}_{/O}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} \bigwedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \bigwedge \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$$

إذن: $$\frac{\overrightarrow{dL}_{/O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}$$

"مشتقة العزم الحركي بالنسبة للزمن = عزم القوى المطبقة على النقطة المادية"

يكون العزم الحركي محفوظا أي ثابتا لما:

- $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ، أي في حالة جملة معزولة والتي هي محددة أساسا بمبدأ العطالة.
- $\vec{F}_{ext} // \overrightarrow{OM}$ ، أي القوة المطبقة على النقطة المتحركة مركزية وحالة الجملة تتعلق مباشرة بالعزم الحركي.

في الحالتين لدينا: $\vec{L}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = \vec{L}_0 = \overrightarrow{Cte}$. $\vec{L}_0$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\vec{P}$ في نفس الوقت وهذا يعني أنهما يوجدان في المستوي العمودي على $\vec{L}_0$ الذي يحتوي النقطة O . حركة M هي إذن مستوية وتتم في مستوي النقطة O تنتمي إليه.

3 - **تطبيق خاص بالقوى المركزية (الحركات ذات تسارع مركزي):**

تعريف: نقول أن نقطة مادية تخضع لقوة مركزية $\vec{F}$ مركزها O لما:

- النقطة O ثابتة في مرجع دراسة حركة النقطة المادية M .
- شدة القوة $\vec{F}$ تتعلق فقط بالمسافة $r = OM$.
- القوة محمولة بالمستقيم OM .

إذا أخذنا شعاع الواحدة $\overrightarrow{u_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ ، فإن عبارة القوة المركزية في جملة الإحداثيات القطبية تكتب من الشكل : $\vec{F}(r) = F(r)\vec{u}_r$.

حقل القوة $\vec{F}(r)$ الذي يتعلق بالمسافة r وفق القانون $1/r^2$ ، أي: $\vec{F}(r) = {k}/{r^2}\ \vec{u}_r$ ، يسمى **"حقل نيوتوني"** (*Newtonien*).

- عندما يكون $k > 0$: الحقل تنافري.
- عندما يكون $k < 0$: الحقل تجاذبي.

مثال: القوة الجاذبية للأرض $\vec{F}(r) = -G\ \frac{M\,m}{r^2}\ \vec{u}_r$.

خواص الحركات الناتجة عن القوى المركزية:

في مرجع غاليلي، عندما تتحرك نقطة مادية M تحت تأثير قوة مركزية مركزها O ، فإن حركتها تملك الخواص التالية:

- شعاع العزم الحركي للنقطة المادية ثابت: $\vec{L}_{/O} = \vec{L}_0$.
- M تتحرك في مستوي عمودي على $\vec{L}_0$ يمر من O .
- تدرس الحركة باستعمال جملة الإحداثيات القطبية، في هذا المرجع: $\vec{L}_0 = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{k}$ ،

حيث $\vec{k}$ هو شعاع الواحدة العمودي على المستوي القطبي.

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = r\ \ \vec{u}_r \wedge m\,(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_r)$$

أي: $$\vec{L}_0 = m\, r^2\, \dot{\theta}\, \vec{k}$$

أو : $$\vec{L}_0 = m\,\vec{C}$$

حيث $\vec{C}$ هو الشعاع الثابت في حالة الحركات ذات التسارع المركزي (الفصل الثالث).

إذن، الحركة الناتجة عن قوة مركزية تملك نفس الخواص للحركات ذات تسارع مركزي وعلى الخصوص سرعة المسح للشعاع $\overrightarrow{OM}$ التي رأينا أنها تبقى ثابتة.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{L_0}{2m}$$

المعادلة الأخيرة تمثل العلاقة الأساسية للحركات ذات قوى مركزية.

عندما تكون $F(r) = -k/r^2$ وباستعمال علاقة Binet الثانية :

$$\vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\ \vec{u}_r$$

يمكن أن نبرهن أن معادلة المسار هي من الشكل: $\boldsymbol{r} = \dfrac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{e}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta_0})}$.

لدينا : $\vec{F}(r) = -\frac{k}{r^2}\,\vec{u}_r = -m\,\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{u}_r$

أي : $\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{k}{m\,C^2}$

وعندما نضع $u(r) = \frac{1}{r}$ يمكن أن نكتب المعادلة التفاضلية السابقة بدلالة المتغيرة u من الشكل :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{m\,C^2}$$

لدينا معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها الخاص: $u_p = \frac{K}{m\,C^2}$ ، والحل من دون طرف ثاني هو

من الشكل: $u_s = u_0 \cos(\theta - \theta_0)$. الحل العام للمعادلة التفاضلية هو : $u(\theta) = u_s + u_p$.

عندما نأخذ الطور الابتدائي $\theta_0 = 0$ نحصل على:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{k}{m\,C^2} + \frac{1}{r_0}\cos\theta} = \frac{m\,\frac{c^2}{k}}{1 + \frac{m\,C^2}{k\,r_0}\cos\theta}$$

أو: $$r(\theta) = \frac{P}{1 + e\cos\theta}$$

مع: $P = m\,C^2/k$ و $e = m\,C^2/k\,r_0$.

في الإحداثيات القطبية المعادلة $\boldsymbol{r(\theta)} = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{1+e\cos\theta}}$ تمثل مسار محدد بمقطع مخروطي بحيث لما:

- $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{1}$: المسار هو **قطع مكافئ**.
- $\boldsymbol{e} < 1$: المسار هو **قطع ناقص** (إهليلج – *Ellipse*) .

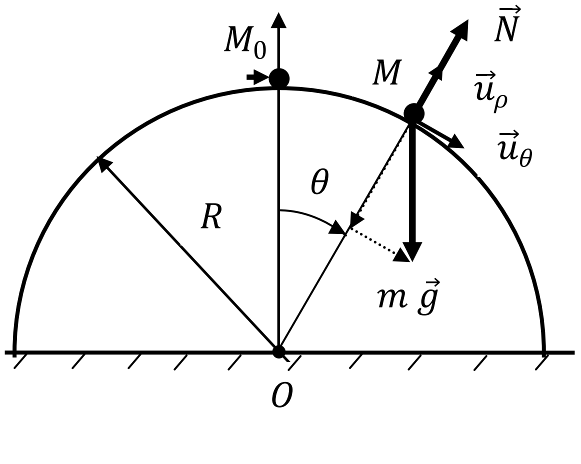
▪ $e > 1$: المسار هو **قطع زائد** (*Hyperbole*).

4 - قوانين كيبلر (Kepler):

بما أن الكواكب في المجموعة الشمسية تخضع لحقل تجاذب مركزي مركزه الشمس، فإن حركة الكواكب حول الشمس تخضع للقوانين التالية المستنتجة من طرف كيبلر والتي تسمى باسمه وهي:

- الكواكب ترسم حول الشمس مسارات إهليليجية (في شكل قطع ناقص) يمثل مركز الشمس إحدى بؤرتيها.
- شعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ (O : مركز الشمس و M : مركز الكوكب) يمسح مساحات ثابتة أثناء أزمنة ثابتة.
- مربع دور التفاف الكوكب حول الشمس (الزمن T المستغرق لإجراء دورة كاملة حول الشمس) متناسب مع مكعب المحور الكبير a للإهليلج ، أي : $T^2 = \alpha\, a^3$ حيث α هو ثابت التناسب.

تطبيق: دراسة حركة نقطة مادية بدون احتكاك على مسار دائري شاقولي.



تدفع في M_0 نقطة مادية كتلتها m من دون سرعة ابتدائية على مسار دائري شاقولي مركزه O ونصف قطره R كما هو في الشكل. ادرس حركة النقطة المادية لما تتم بلا احتكاك مع هذا المسار.

دراسة هذه المشكلة أو أي مشكلة أخرى باستعمال قوانين الديناميك يكون في الغالب وفقا للمراحل الآتية:

- **تحديد مرجع مناسب لدراسة الحركة:** اختيار المرجع المناسب محكوم بشكل المسار الذي تأخذه النقطة المادية. في حالة الحركة الدائرية (المطلوب دراستها هنا)، المرجع المناسب هو المعلم $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ للإحداثيات القطبية (يمكن أيضا استعمال الإحداثيات المنحنية).

- **تحديد القوى التي تؤثر على النقطة المادية أثناء الحركة (في نقطة كيفية من المسار):** القوى التي تؤثر على النقطة المتحركة M على المسار الدائري هي: - الثقل $\vec{P} = m\,\vec{g}$ الذي يكون دائما شاقوليا. - قوة رد الفعل للمسار الذي يتحرك عليه الجسم M . في هذه الحالة، قوة رد الفعل هي فقط المركبة الناظمية على المسار $\vec{N}$ لأن الحركة من دون احتكاك.

- **كتابة القانون الأساسي للتحريك وإسقاطه في المرجع الذي اخترناه:** هنا، القانون الأساسي يكتب: $m\,\vec{g} + \vec{N} = m\,\vec{\gamma}$ ، حيث: $m\,\vec{g} = -m\,g\,cos\theta\,\vec{u}_\rho + m\,g\,sin\theta\,\vec{u}_\theta$ و: $\vec{N} = N\,\vec{u}_\rho$

التسارع $\vec{\gamma}$ نحصل عليه انطلاقا من شعاع الموقع الذي يكتب هنا: $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_\rho$. لدينا:

$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ و $\vec{\gamma}(M) = -R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_\rho + R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$. وعندما نعوض في القانون الأساسي نكتب:

$$-m\,g\,cos\theta\,\vec{u}_\rho + m\,g\,sin\theta\,\vec{u}_\theta + N\,\vec{u}_\rho = -m\,R\,\dot{\theta}^2\,\vec{u}_\rho + m\,R\,\ddot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

المعادلة السابقة تعطينا:

في الاتجاه $\vec{u}_\rho$: $\quad -m\,g\,cos\theta + N = -m\,R\,\dot{\theta}^2 \qquad (1)$

في الاتجاه $\vec{u}_\theta$: $\quad m\,g\,sin\theta = m\,R\,\ddot{\theta} \qquad (2)$

- **حل المعادلات النهائية للحصول على طبيعة الحركة:** المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية للمتغيرة θ . حلها يعطينا شدة السرعة: $\|\vec{V}(M)\| = V = R\,\dot{\theta}$ في كل نقطة من المسار الدائري. يكفي لذلك أن نلاحظ أن المعادلة (2) يمكن أن تكتب: $g\,sin\theta = R\,\frac{d\dot{\theta}}{dt}$.

وعند جداء طرفين العبارة السابقة في $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ نحصل على: $g\ sin\theta\ \frac{d\theta}{dt} = R\ \dot{\theta}\ \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ وعند اختصار dt نكتب: $g\ sin\theta\ d\theta = R\ \dot{\theta}\ d\dot{\theta}$ وهي عبارة عن معادلة تفاضلية مفصولة المتغيرات θ و $\dot{\theta}$. يمكن إذن أن نكامل طرفي المعادلة لنجد:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} g\ sin\theta\ d\theta = \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} R\ \dot{\theta}\ d\dot{\theta}$$

$\dot{\theta}_0$ و θ_0 يمثلان الشروط الابتدائية للحركة ، أي عند نقطة الانطلاق M_0 . في هذه النقطة $\theta_0 = 0$ و $\dot{\theta}_0 = 0$ لأن الحركة انطلقت من دون سرعة ابتدائية ($V_0 = R\ \dot{\theta}_0 = 0$). إذن:

$$g \int_{0}^{\theta} sin\theta\ \ d\theta = R \int_{0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\ d\dot{\theta}$$

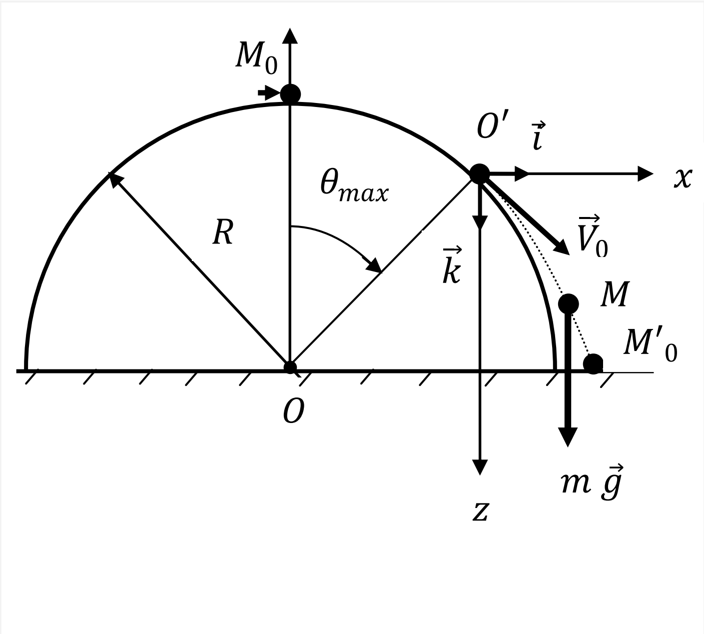
أي: $g\ [-cos\theta]_0^{\theta} = R\ \left[\dot{\theta}^2/_2\right]_0^{\dot{\theta}}$ أو: $R\ \dot{\theta}^2 = 2\ g\ (1 - cos\theta)$ وعندما نعوض في المعادلة (1) على عبارة رد الفعل N . من المعادلة الأخيرة يمكن الحصول على سرعة النقطة المتحركة بدلالة θ : $V(\theta) = R\ \dot{\theta} = \sqrt{2\ R\ g(1 - cos\theta)}$. المعادلة (1) تعطينا:

$$N = m\ g\ cos\theta - m\ R\ \dot{\theta}^2 = m\ g\ cos\theta - 2m\ g(1 - cos\theta)$$

أي: $\boldsymbol{N = m\ g(3\ cos\theta - 2)}$

بقاء النقطة المتحركة M على المسار الدائري يستلزم وجود قوة رد الفعل N ، يعني: $N > 0$. ولكن في اللحظة التي تصير فيها: $N = 0$ ، تغادر النقطة M المسار الدائري وتواصل حركتها تحت تأثير ثقلها فقط. الزاوية الحدية θ_{max} التي تغادر فيها هي لما: $3\ cos\theta_{max}\ - 2 = 0$ ، أو: $cos\theta_{max}\ = 2/_3$. إذن، النقطة المادية تغادر المسار الدائري لما: $\boldsymbol{\theta_{max} = 48 \cdot 2°}$.

شدة السرعة عندما تغادر هي: $V = \sqrt{2\,R\,g/_3}$ وشعاع السرعة مماسي للمسار.



لما تغادر النقطة المادية المسار الدائري في O' بسرعة $\vec{V}_0$ نعتبرها كسرعة ابتدائية لحركة جديدة تتم تحت تأثير الثقل $m\,\vec{g}$ فقط. يمكن اختيار المعلم $\left(\overrightarrow{O'x}, \overrightarrow{O'z}\right)$ كمرجع لدراسة حركة النقطة M بعد O' وتعيين مسارها. في هذا المرجع الجديد لدينا:

$m\,\vec{g} = m\,g\,\vec{k}$ ، $\overrightarrow{O'M} = x\,\vec{\imath} + z\,\vec{k}$ ، $\vec{V}(M) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{z}\,\vec{k}$ ، $\vec{\gamma}(M) = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{z}\,\vec{k}$ ،

$\vec{V}_0 = \sqrt{\frac{2\,g\,R}{3}}\,\left(cos\theta_{max}\ \vec{\imath} + sin\theta_{max}\ \vec{k}\right)$. المعادلة الأساسية للتحريك تكتب: $m\,\vec{g} = m\,\vec{\gamma}$ ،

أو: $g\,\vec{k} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{z}\,\vec{k}$ وهكذا نحصل على معادلتين تفاضلتين بسيطتين: $\ddot{x} = 0 \quad (1)$ و $\ddot{z} = g \quad (2)$. حل المعادلة (1) يعطينا: $\dot{x}(t) = V_x(t) = C$ ، حيث C ثابت ويساوي مركبة السرعة $\vec{V}_0$ على المحور $\overrightarrow{Ox}$. إذن: $V_x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\,g\,R}{3}}$ لأن $cos\theta_{max} = {^2/_3}$.

وعندما نكامل مرة أخرى نحصل على: $x(t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\,g\,R}{3}}\ t$ ، لأن $x_0 = 0$. حل المعادلة (2) يعطينا: $\dot{z}(t) = V_z(t) = g\ t + \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2\,g\,R}{3}}$ لأن $sin\theta_{max} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ولما نكامل مرة ثانية نجد:

$z(t) = \frac{1}{2}\,g\,t^2 + \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\frac{2\,g\,R}{3}}\ t$ ، لأن $z_0 = 0$. معادلة المسار للنقطة M في المستوي

الشاقولي $\left(\overrightarrow{O'x},\overrightarrow{O'z}\right)$ بعدما تغادر في O' هي: $z=\frac{27}{16\ R}\ x^2+\frac{\sqrt{5}}{2}\ x$ وتمثل قطع مكافئ قمته

في O'. حسب الشكل تسقط النقطة M على الأرض لما $z=\frac{2}{3}\ R$ ولما نحل المعادلة :

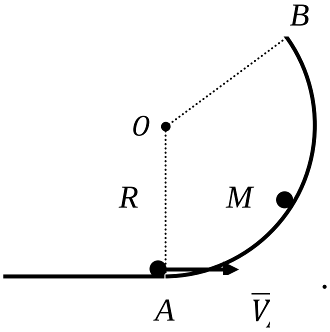
$\frac{27}{16\ R}\ x^2+\frac{\sqrt{5}}{2}\ x-\frac{2}{3}\ R=0$ نجد: $x=\frac{4}{27}\left(\sqrt{23}-\sqrt{5}\right)R\approx 0\cdot 38\ R$. إذا سمينا

M'_0 موقع السقوط على الأرض، فإن المسافة: $OM'_0=\frac{\sqrt{5}}{3}\ R+0\cdot 38\ R\approx 1\cdot 13R$.

تمرين: لتعميق استيعابك للمشكلة السابقة، أعد دراستها في الحالة التي تنطلق النقطة المادية من M_0

بسرعة ابتدائية $\vec{V}_0$ أفقية. أوجد قيمة θ_{max} وموقع السقوط على الأرض لما $V_0=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2\ g\ R}{3}}$.

امتحان 2019: في مستوي شاقولي، تتحرك نقطة مادية كتلتها m على خط مستقيم أفقي مماسي لمسار دائري AB مركزه O ونصف قطره R . تصل النقطة المتحركة على المسار المستقيم إلى A بسرعة $\overrightarrow{V_A}$. الزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ تساوي $3\pi/_4$ ($\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{3}{4}\pi$) .



1- اختر مرجعا مناسبا لدراسة حركة النقطة المادية على المسار AB ثم اكتب معادلات الحركة في نقطة M كيفية من المسار.

2- حل المعادلة التفاضلية للحركة ثم استنتج السرعة وقوة رد فعل المسار في M .

3- ما هي أصغر قيمة للسرعة V_A التي تجعل النقطة المتحركة تصل إلى B .

4- عندما تكون $V_A=\sqrt{10.g.R}$: - ما هي السرعة V_B لما تصل إلى B . - ما هي طبيعة المسار الذي تأخذه النقطة المتحركة بعد B . - أوجد سرعتها $\vec{V}$ بعد B ثم استنتج سرعتها عندما تصل ارتفاعها الأعلى h_{max} .

5- تبقى الطاقة الميكانيكية (الكلية) للنقطة المادية بعد B محفوظة ، لماذا؟ وظف هذه الطاقة للحصول على h_{max} بدلالة V_B ثم استنتج h_{max} لما $V_A=\sqrt{10.g.R}$. ت.ع.: لما $R=3m\ ,g=10m/s^2$ ، نجد ($h_{max}=10.05m\ ,V_A\approx 62Km/h$) . **(نجيب عن السؤال 5 بعد دراسة الفصل المقبل).**

أعمال موجهة

التمرين1: نقطة مادية كتلتها m تتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}(t)$ من الشكل:

$$\vec{F}(t) = (2t^2 + 1)\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2t\,\vec{k}$$

1 ـأحسب تغير كمية الحركة بين اللحظتين : $t_0 = 0$ و $t_1 = 2s$.

2 ـعند t_0 كانت: $\vec{V}(0) = \frac{1}{m}(-4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k})$ ، أوجد شعاع السرعة عند $t_1 = 2s$.

التمرين 2: نعتبر قذيفة كتلتها m تقذف بسرعة ابتدائية $\vec{V_0}$ من النقطة O مبدأ المرجع الديكارتي $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ الذي نعتبره غاليلي. السرعة $\vec{V_0}$ تصنع زاوية α مع المحور الأفقي $\overrightarrow{Ox}$ في المستوي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz})$. نهمل جميع أنواع الإحتكاك.

1- جد معادلة المسار للقذيفة ثم حدد الارتفاع الأعلى الذي تبلغه والمدى D الذي تصله عند سقوطها على المستوي الأفقي $z = 0$. ما هي الزاوية α التي تكون من أجلها D أعظمية ؟ أحسب المسافة D والارتفاع الأعلى لهذه الزاوية لما: $m = 10Kg$ ، $V_0 = 30\ m/s$ ، $g = 9.81\ m/s^2$.

نعتبر الآن أن القذيفة تتعرض، زيادة على الثقل، لاحتكاك (مقاومة الهواء) من الشكل: $\vec{F} = -k\vec{V}$.

2- حدد مركبات شعاع السرعة $\vec{V}$ وشعاع الموقع $\overrightarrow{OM}$ للقذيفة في كل لحظة t .

3- حدد الارتفاع الأعلى للقذيفة وبين أن المسار يملك خط مقارب شاقولي يجب تحديد موقعه.

4- بين أن السرعة تؤول إلى قيمة حدية مطلوب تحديدها.

5- أرسم منحنى المسار لما: $V_0 = 30\ m/s$ ، $k = 0{,}1\ Kg\,s^{-1}$ ، $m = 1\ Kg$ ، $\alpha = 45°$.

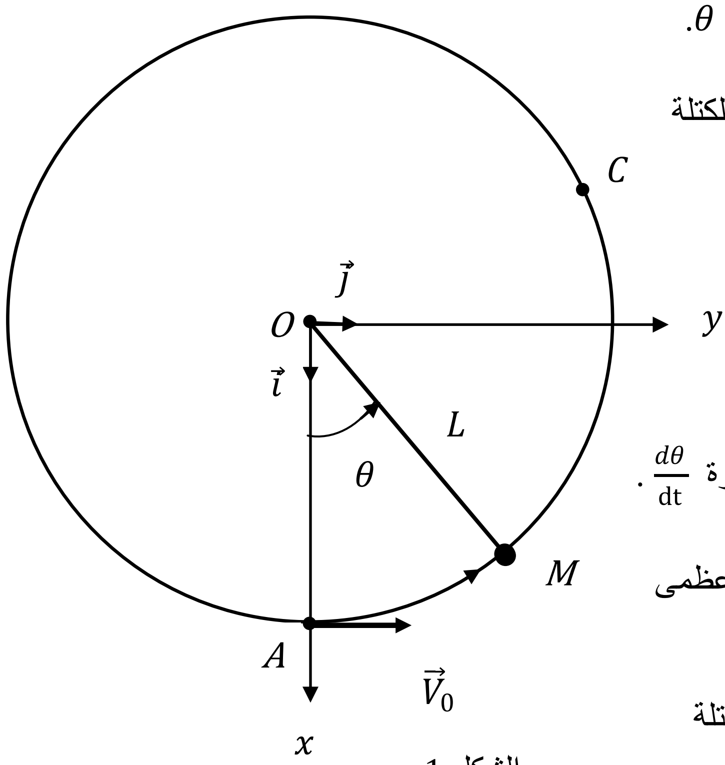
التمرين 3: يقفز رجل وزنه $m = 70\ Kg$ من فوق جسر باستعمال حبل مرن مثبت في قدميه. أثناء 20 متر الأولى من القفز، يسقط الرجل سقوطا حرا من دون أي تأثير للحبل. بعد ذلك يبدأ تأثير الحبل المرن الذي يمكن اعتباره كنابض كتلته مهملة وطوله فارغ $L_0 = 20\ m$ ومعامل مرونته $K = 120\ Nm^{-1}$. نهمل كل قوى الإحتكاك.

1. أحسب سرعة الرجل عند نهاية السقوط الحر.

2. أحسب المسافة الكلية للسقوط.

3. حدد أكبر قيمة للتسارع الذي يتعرض له الرجل.

التمرين 4: كتلة m معلقة عند النقطة O بخيط عديم الكتلة طوله L وغير قابل للتمدد (شكل 1). في البداية تكون الكتلة عند النقطة A في حالة التوازن ثم تقذف بسرعة ابتدائية أفقية $\vec{V}_0$ ، نحدد موقع الكتلة باستعمال الزاوية θ حيث $\theta = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$.



الشكل 1

1 - عين جملة الإحداثيات المناسبة لدراسة حركة الكتلة وأكتب شعاع موقعها.

2 - أكتب العلاقة الأساسية للتحريك في هذه الجملة ثم بين أن المعادلة التفاضلية للحركة تكتب: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} sin\,\theta = 0$.

يمكن حل المعادلة بجدائها في $\frac{d\theta}{dt}$. استنتج عبارة $\frac{d\theta}{\mathrm{dt}}$.

3 - أوجد عبارة توتر الخيط T ، أين تكون شدته عظمى وأين تكونصغرى ؟

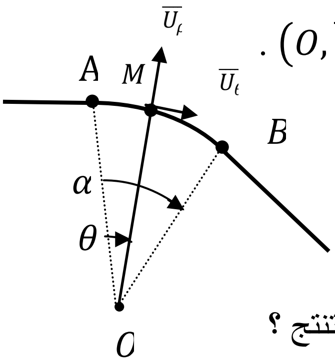
4 - ما هي أصغر قيمة للسرعة $\vec{V}_0$ التي تسمح للكتلة برسم دائرة كاملة.

5 - نفترض أن السرعة $\vec{V}_0 = \sqrt{3\, g\, L}\, \vec{j}$.

أوجد الزاوية θ_C للنقطة C التي تصبح الحركة بعدها غير دائرية. ما هي سرعة الكتلة عندها ومثلها على الرسم.

كيف تصبح الحركة بعد النقطة C ؟

التمرين 5: تواجه سيارة كتلتها $m = 1000\,Kg$ ، نعتبرها نقطة مادية، منحدرا في النقطة A بسرعة إبتدائية $V_0 = 125\,Km/h$. الجزء AB عند بداية المنحدر(أنظر الشكل) عبارة عن قوس دائري مركزه O ونصف قطره $R = 130m$ وزاويته $\alpha = 15^\circ$. نعتبر قوة الدفع لمحرك السيارة مماسية للطريق وقيمتها الجبرية $\bar{F}$ ثابتة (موجبة أثناء التسريع وسالبة عند الكبح). نهمل كل قوى الاحتكاك.



1 - أكتب معادلات الحركة للنقطة $M(R,\theta)$ في الجملة القطبية $\left(O,\overrightarrow{U_\rho},\overrightarrow{U_\theta}\right)$.

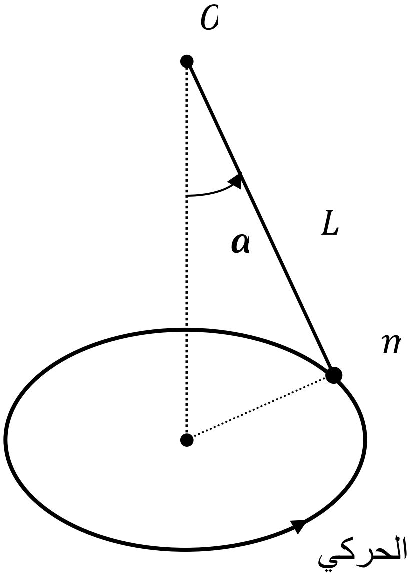
2 - كامل المعادلة الناتجة عن الإسقاط في الاتجاه $\overrightarrow{U_\theta}$.

3 - استنتج قوة رد الفعل R_N بدلالة: V_0 ، m ، g ، θ ، R و $\bar{F}$.

4 - اوجد عبارة الزاوية θ_d التي تغادر السيارة عندها سطح الأرض.

5 - أحسب هذه الزاوية عندما يوقف السائق المحرك عند النقطة A . ماذا تستنتج ؟

6 - أحسب قيمة V_0 التي تجعل السيارة تصل إلى النقطة B من دون خطر.



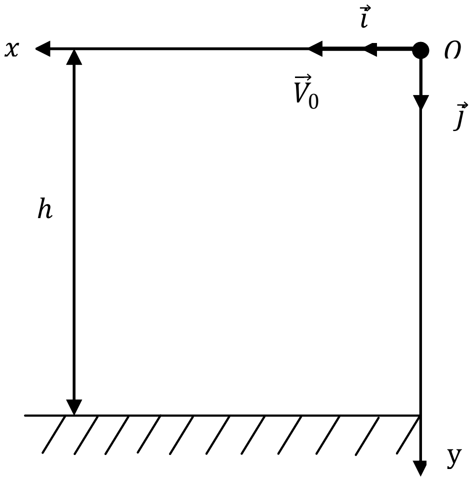
التمرين06: كتلة $\boldsymbol{m}$ معلقة بخيط طوله $\boldsymbol{L}$ ، طرفه الآخر مثبت عند النقطة $\boldsymbol{O}$ ، تقوم بحركة دائرية منتظمة بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega_1}$.

1- أوجد العلاقة بين $\boldsymbol{\omega_1}$ ، $\boldsymbol{L}$ ، $\boldsymbol{g}$ و $\boldsymbol{Cos\alpha}$ ، ثم أحسب توتر الخيط.

2- بين أن الحركة تكون ممكنة فقط إذا كانت $\omega_1 \geq \omega_0$ ،عين هذه القيمة.

3- أحسب كمية الحركة $\vec{P} = m\vec{V}$ و العزم الحركي $\vec{L}$ لهذه الكتلة، ثم أحسب عزم محصلة القوى بالنسبة للنقطة O و تحقق من نظرية العزم الحركي

4- نفترض أن النقطة المادية تتحرك هذه المرة دون احتكاك على السطح الجانبي لمخروط نصف زاوية رأسه $\boldsymbol{\alpha}$ ، بسرعة زاوية $\boldsymbol{\omega_2}$ حيث $\boldsymbol{\omega_2} < \boldsymbol{\omega_1}$ ، أحسب رد فعل المخروط . ماذا يحدث في حالة $\boldsymbol{\omega_2} > \boldsymbol{\omega_1}$ ؟



امتحان 2013: <u>الجزء I</u>: يقذف جسم كتلته m في نقطة O توجد على ارتفاع h من سطح الأرض بسرعة ابتدائية أفقية $\vec{V}_0$. نختار المعلم الشاقولي $(O,\vec{i},\vec{j})$ كما هو في الشكل لدراسة حركة الجسم.

1 - بتطبيق القانون الأساسي للتحريك، استنتج شعاع التسارع للجسم، ثم شعاع السرعة.

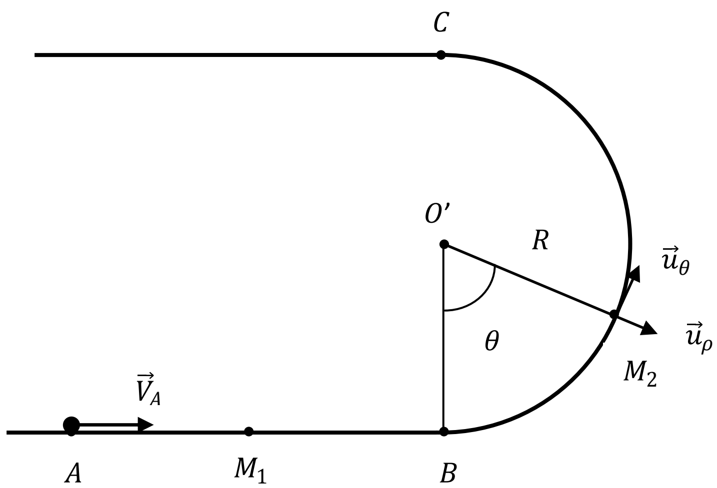
2 - استخرج معادلة مسار الحركة وارسمه ثم حدد موقع ارتطام الجسم بالأرض.

الجزء II: **(الحركة بدون احتكاك).**

يقذف ولد كرة كتلتها m من النقطة A نحو النقطة B على المسار الأفقي $AB = 3R$ ، بسرعة ابتدائية أفقية $\vec{V}_A$.

1 - مثل عند النقطة M_1 مجموع القوى المؤثرة ، واستنتج السرعة عندها ، ثم عند النقطة B.

2 - بعد النقطة B ، تواصل الكرة حركتها على مسار موجه دائري وشاقولي BC نصف قطره R ومركزه O' (أنظر الشكل)



أ - مثل عند النقطة M_2 مجموع القوى التي تؤثر في الكرة.

ب -اكتب معادلة الحركة ثم أسقطها في المعلم القطبي $(O', \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

ت -استنتج بمكاملة المعادلة التفاضلية عبارة السرعة في النقطة M_2 ،ثم استخرج قوة رد الفعل في هذه النقطة.

4- ما هو الشرط اللازم لكي تصل الكرة إلى النقطة C .

5- في حالة توفرهذا الشرط، اوجد سرعة الكرة عند النقطة C . كيف تواصل الكرة حركتها بعد هذه النقطة ؟

6- بعد النقطة C ، نريد أن تسقط الكرة عند النقطة الابتدائية A ، ليتمكن الولد من إعادتها مرة أخرى. ما هي السرعة الابتدائية $\vec{V}_A$ التي تحقق ذلك ؟

امتحان 2020: نقطة مادية M كتلتها m تتحرك على المسار المبين في الشكل. المسلك AB عبارة عن مسار مستقيم أفقي طوله L والمسلك BC هو محيط ربع دائرة مركزها O ونصف قطرها R توجد في مستوي شاقولي.

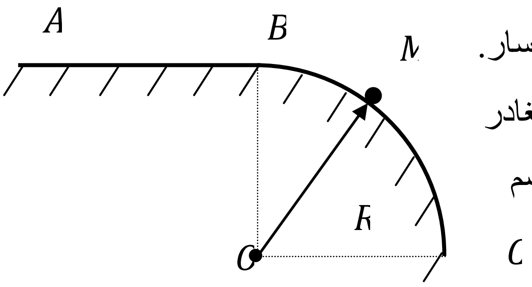
1 - **المسلك AB**: تنطلق النقطة من A بسرعة ابتدائية $\vec{V}_0$ موازية للمسلك وتتعرض أثناء حركتها إلى قوة احتكاك ثابتة $\vec{F}_f$ ، لتتوقف عند النقطة B.

أ - مثل مجموع القوى المؤثرة على النقطة المادية ثم أكتب القانون الأساسي للتحريك. استنتج قوة الاحتكاك $\vec{F}_f$ بدلالة $\|\vec{V}_0\| = V_0$ و L .

ب -مرة ثانية، تنطلق النقطة من A ولكن بسرعة ابتدائية $\vec{V}_1 = 2\vec{V}_0$. احسب السرعة $\vec{V}_B$ عند النقطة B .

2 - **المسلك BC (بدون احتكاك):** تصل النقطة M إلى المسلك BC بالسرعة $\vec{V}_B$ السابقة ونحدد موقعها على المسار بدلالة الزاوية $\theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM})$.

أ - اختر مرجعا مناسبا لدراسة الحركة ثم حدد القوى المؤثرة على M في نقطة كيفية من المسار ثم اكتب القانون الأساسي للتحريك . بالإسقاط في المعلم المختار ، استنتج معادلات الحركة ثم اوجد قيمة شدة السرعة $V(M)$ وقيمة شدة رد الفعل N .



ب -حدد قيمة الزاوية θ_f التي تغادر عندها النقطة هذا المسار.

ت -من دون إجراء أي حساب، مثل شعاع السرعة عندما تغادر النقطة المسار ثم صف طبيعة الحركة بعد ذلك وارسم بالتقريب شكل المسار المنتظر.

امتحان استدراكي 2018: يتكون مسار للتزلج على الجليد (أنظر الشكل) من منحدر مستقيم AB طوله L مائل بزاوية α عن المستوي الأفقي ثم جزء من دائرة BC مركزها O ونصف قطرها R ومماسيٌ للمستقيم AB في B ثم مستقيم أفقي CD طوله $d = 8\,R$ غير مهيأ للتزلج. ينتهي المسار بمنحدر مائل آخر DE طوله $1\,Km$. يوجد احتكاك معامله f فقط على المنحدرين AB و DE (نهمل الاحتكاك على BC وكذلك مقاومة الهواء).

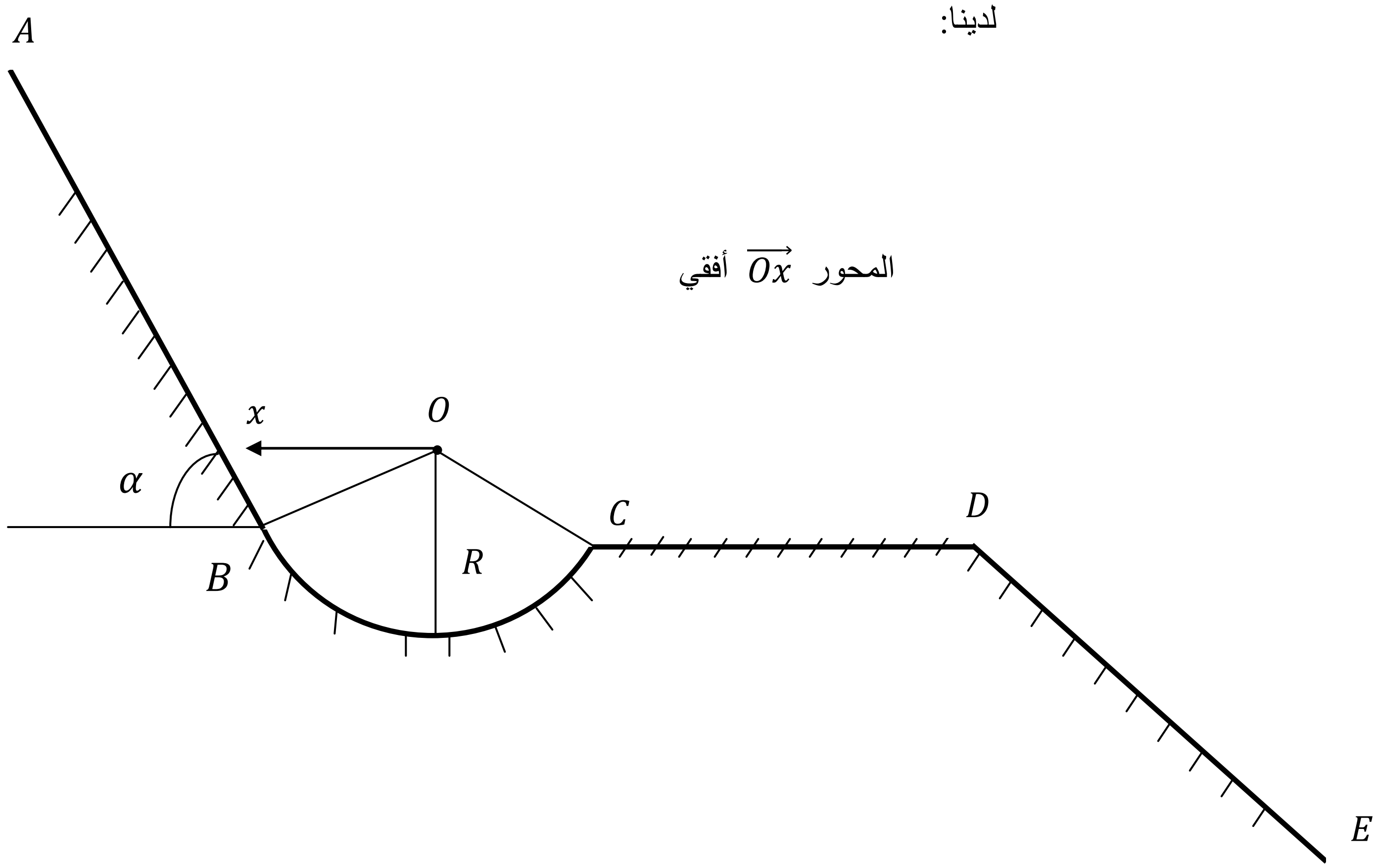
ينطلق متزلج، نعتبره كنقطة مادية كتلتها m ، من دون سرعة إبتدائية من النقطة A .

1 - أكتب القانون الأساسي للتحريك على AB ثم استنتج سرعة الرياضي لما يصل إلى B ومثلها على الشكل.

2 - أختر مرجعا مناسبا لدراسة الحركة على الجزء الدائري BC ثم أكتب معادلة الحركة في هذا المرجع واستنتج سرعة الرياضي عندما يصل النقطة C ومثل شعاع السرعة على الشكل.

لدينا:

المحور $\overrightarrow{Ox}$ أفقي



3 - ما هي طبيعة الحركة بعد C . أختر مرجعا لدراسة هذه الحركة ثم استنتج شكل المسار الذي يأخذه الرياضي بعد C .

4 - نأخذ : $L = 10\ R$ و $f = 1/4$ وقيم θ_0 و θ_1 المعطاة مع الشكل. أعط قيمة زاوية الميل α ثم حدد المدى الذي يصله الرياضي من دون المرور على الجزء CD الغير قابل للتزلج.

ما هي أصغر قيمة للطول L بدلالة R التي ينطلق منها الرياضي ليتجنب السقوط على الجزء CD .