Université frères Mentouri Constantine 1
Département de Physique
3éme année Physique Energétique
Matière : Méthodes numériques appliquées à l'énergétique

TP N°9 : Problèmes à valeur initiale

I. Comparaison de la précision des résultats des méthodes numériques étudiés

1. Ecrire un programme Matlab qui permet de résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \cos(t)\, e^{-2u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Par les méthodes numériques :

- Euler explicite
- Euler implicite
- Runge-Kutta d'ordre 2
- Runge-kutta d'ordre 4
- Adams-Bashforth d'ordre 4

Domaine de calcul :$0 < t \leq 5$ et pas de calcul : $h = 0.1$

2. Comparer graphiquement les résultats numériques obtenus, avec la solution exacte :

$$u_{ex}(t) = \frac{\log(e^2 + 2\sin(x))}{2}$$

II. Résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre 2

Ecrire un programme Matlab, qui permet de résoudre l'équation différentielle suivante, par la méthode d'Euler et par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\dfrac{dx}{dt} + xe^{-\pi x} = 0 \\ x(0) = 0.5 \\ \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0 \end{cases}$$

On donne : $t \in]0\,, 2\pi]$ et $\Delta t = \frac{\pi}{10}$

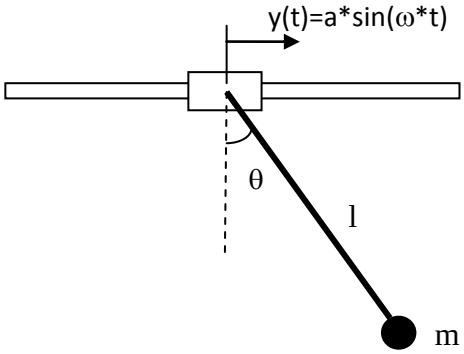
Le programme doit écrire les résultats dans un fichier avec un format choisi et tracer les résultats des deux méthodes sur le même graphe.

III. Utilisation des fonctions internes de Matlab pour résoudre les problèmes à valeur initiale

Utiliser la fonction interne ode45, pour résoudre les équations différentielles qui modélisent les problèmes physiques suivants :

1. Mouvement d'un pendule

On considère le système physique suivant:



Le mouvement du système est modélisé par l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} * \sin(\theta) - \frac{\omega^2}{l} * a * \cos(\theta) * \sin(\omega * t) = 0$$

A t=0, le système au repos et le collier est animé d'un mouvement sinusoïdal.

a. Ecrire le programme qui permet de résoudre l'équation différentielle du mouvement du système.

b. Tracer les courbe de variation de θ en fonction du temps, pour : ω=0.5, 1.5 , 2 et 3.5 rd/s (utiliser la commande subplot).

Données du problème:

l =1.0 m , g = 9.81 m/s2 , a = 0.25 m ; 0 ≤ t ≤ 20 , Δt = 0.1

2. Oscillateur de Duffing

L'oscillateur de Duffing est modélisé par le l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \ddot{y} + \alpha\dot{y} - (y - y^3) = \delta\cos(t) \\ y(0) = \delta \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

On donne : $\alpha = 0.03$, $\delta = 0.06$, $0 < t \leq 40\pi$ et $\Delta t = \frac{\pi}{10}$

Tracer la courbe de variation de y en fonction de t.

3. Circuit RLC

Dans un circuit RLC, la variation de la charge électrique q en fonction de t est donnée par l'équation différentielle:

$$\begin{cases} L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 100\sin(63t)\sin(710t) \\ q(0) = 0 \\ \left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Déterminer la variation du courant électrique i ($i = \frac{dq}{dt}$) , en fonction du temps.

Données : L=2H , R=400ω , C=10^{-6}F , 0 < t ≤ 0.3

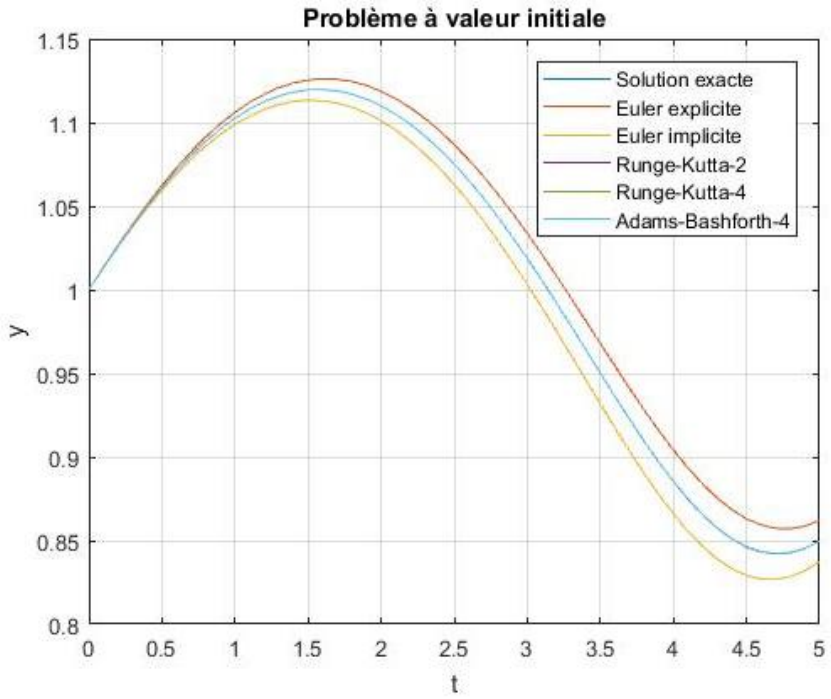
Corrigé du TP n°9 : Problèmes à valeur initiale

I. Comparaison de la précision des résultats des méthodes numériques étudiés

1. Programme Matlab.

```
clc
clear all
f=@(t,u) cos(t)*exp(-2*u)
t0=0;tm=5;u0=1;h=0.1;
n=(tm-t0)/h+1;
t=linspace(t0,tm,n)
%solution exacte: uex(t)
uex=log(exp(1)^2+2*sin((t)))/2
% Euler explicite: ue(t)
ue(1)=u0;
for i=2:n
ue(i)=ue(i-1)+h*f(t(i-1),ue(i-1));
end
% Euler implicite, avec Prédicteur-correcteur: um(t)
um(1)=u0;
for i=2:n
um_p(i)=um(i-1)+h*f(t(i-1),um(i-1));
um(i)=um(i-1)+h*f(t(i),um_p(i))
end
% Runge-kutta d'ordre 2: ur2(t)
ur2(1)=u0;
for i=2:n
    k1=h*f(t(i-1),ur2(i-1))
    k2=h*f(t(i-1)+h/2,ur2(i-1)+k1/2)
    ur2(i)=ur2(i-1)+k2
end
% Runge-kutta d'ordre 4: ur4(t)
ur4(1)=u0;
for i=2:n
    k1=h*f(t(i-1),ur4(i-1))
    k2=h*f(t(i-1)+h/2,ur4(i-1)+k1/2)
    k3=h*f(t(i-1)+h/2,ur4(i-1)+k2/2)
    k4=h*f(t(i),ur4(i-1)+k3)
    ur4(i)=ur4(i-1)+(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)
end
% Adams-Bashforth d'ordre 4: ud(t)
ud(1)=u0;ud(2)=ur4(2),ud(3)=ur4(3);ud(4)=ur4(4);
for i=5:n
    ud(i)=ud(i-1)+(h/24)*(-9*f(t(i-4),ud(i-4))+...
          37*f(t(i-3),ud(i-3))-59*f(t(i-2),ud(i-2))+...
          55*f(t(i-1),ud(i-1)))
end
plot(t,uex,t,ue,t,um,t,ur2,t,ur4,t,ud);
legend('Solution exacte','Euler explicite',...
       'Euler implicite','Runge-Kutta-2',...
       'Runge-Kutta-4','Adams-Bashforth-4')
xlabel('t')
ylabel('y')
title('Problème à valeur initiale')
grid on
```

2. Comparaison graphique des résultats numériques avec la solution exacte



Pour bien analyser les résultats, il suffit de zoomer sur une zone du graphe.

II. Résolution numérique d'une équation différentielle d'ordre 2

Transformation de l'équation différentielle d'ordre 2, en un système d'équations d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y & \ldots\ldots\ldots\ f(y) \\ \frac{dy}{dt} = (1-x^2)y - xe^{-\pi x} & \ldots\ldots\ldots\ g(x,y) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Résolution du système d'équations différentielles par la méthode d'Euler :

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + \Delta t * f(y_{i-1}) \\ y_i = y_{i-1} + \Delta t * g(x_{i-1}, y_{i-1}) \end{cases}$$

Résolution du système d'équations différentielles par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

On considère Δt l'accroissement sur t
On considère k l'accroissement sur x
On considère l l'accroissement sur y

Les paramètres $k1$, $l1$, $k2$, $l2$, $k3$, $l3$, $k4$, $l4$ sont calculés pour chaque nœud i, et utilisés pour calculer y(i) et x(i).

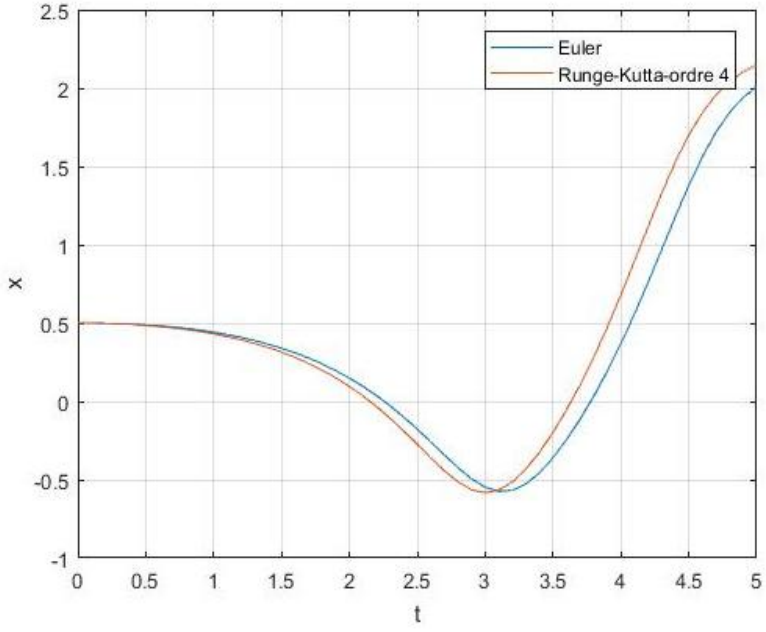
Pour une équation différentielle d'ordre 3, par exemple, il faut introduire un autre paramètre m.

Programme

```
clc
clear all
e=fopen('r.dat','w');
f=@(y) y;
g=@(x,y) (1-x^2)*y-x*exp(-pi*x);
t0=0;tm=5;h=0.1;
n=(tm-t0)/h+1;
t=linspace(t0,tm,n);
x0=0.5;y0=0;
% Méthode d'Euler:
xe(1)=x0;ye(1)=y0;
for i=2:n;
    xe(i)=xe(i-1)+h*f(ye(i-1));
    ye(i)=ye(i-1)+h*g(xe(i),ye(i-1));
end
xr(1)=x0;yr(1)=y0;
for i=2:n;
    k1=h*f(yr(i-1));
    l1=h*g(xr(i-1),yr(i-1));
    k2=h*f(yr(i-1)+l1/2);
    l2=h*g(xr(i-1)+k1/2,yr(i-1)+l1/2);
    k3=h*f(yr(i-1)+l2/2);
    l3=h*g(xr(i-1)+k2/2,yr(i-1)+l2/2);
    k4=h*f(yr(i-1)+l3);
    l4=h*g(xr(i-1)+k3,yr(i-1)+l3);
    xr(i)=xr(i-1)+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6;
    yr(i)=yr(i-1)+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6;
end
xr
fprintf(e,'%8.4f%8.4f%8.4f\n',[t;xe;xr]);
plot(t,xe,t,xr);
xlabel('t')
ylabel('x')
legend('Euler','Runge-Kutta-ordre 4')
grid on
```

Exécution

0.0000	0.5000	0.5000
0.1000	0.5000	0.4995
0.2000	0.4990	0.4978
0.3000	0.4968	0.4949
0.4000	0.4934	0.4908
0.5000	0.4888	0.4852
0.6000	0.4827	0.4780
0.7000	0.4751	0.4692
0.8000	0.4658	0.4586
0.9000	0.4548	0.4459
1.0000	0.4418	0.4310
1.1000	0.4266	0.4138
1.2000	0.4091	0.3938
1.3000	0.3889	0.3709
1.4000	0.3660	0.3447
1.5000	0.3398	0.3149
1.6000	0.3102	0.2811
1.7000	0.2768	0.2427
1.8000	0.2391	0.1995
.....	.....	.....
4.9000	1.9396	2.1037
5.0000	2.0087	2.1479



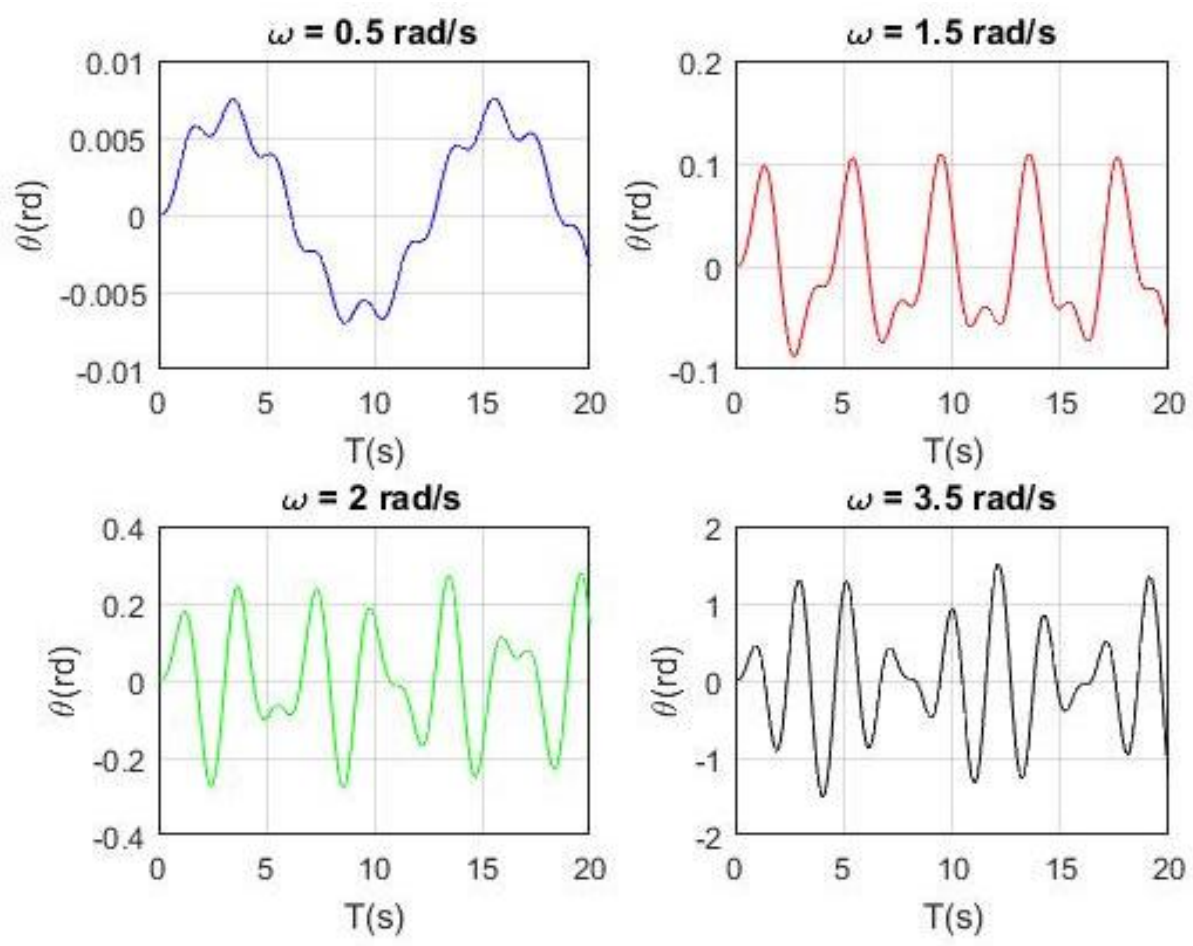
III. Utilisation des fonctions internes de Matlab pour résoudre des problèmes à valeur initiale

1. Mouvement d'un pendule

Programme

```
clc
clear all
% Système Physique
g=9.81;l=1;a=0.25;
couleur=['b' 'r' 'g' 'k'];
omega=[0.5 1.5 2 3.5];
t=0:0.1:20;
for i=1:length(omega)
f=@(t,teta) [teta(2);-(g/l)*sin(teta(1))+(omega(i)^2/l)*a* ...
cos(teta(1))*sin(omega(i)*t)];
[t,teta]=ode45(f,t,[0 0])
subplot(2,2,i)
plot(t,teta(:,1),couleur(i))
xlabel('T(s)')
ylabel('\theta(rd)')
title(['\omega = ',num2str(omega(i)),' rad/s'])
grid on
end
```

Exécution

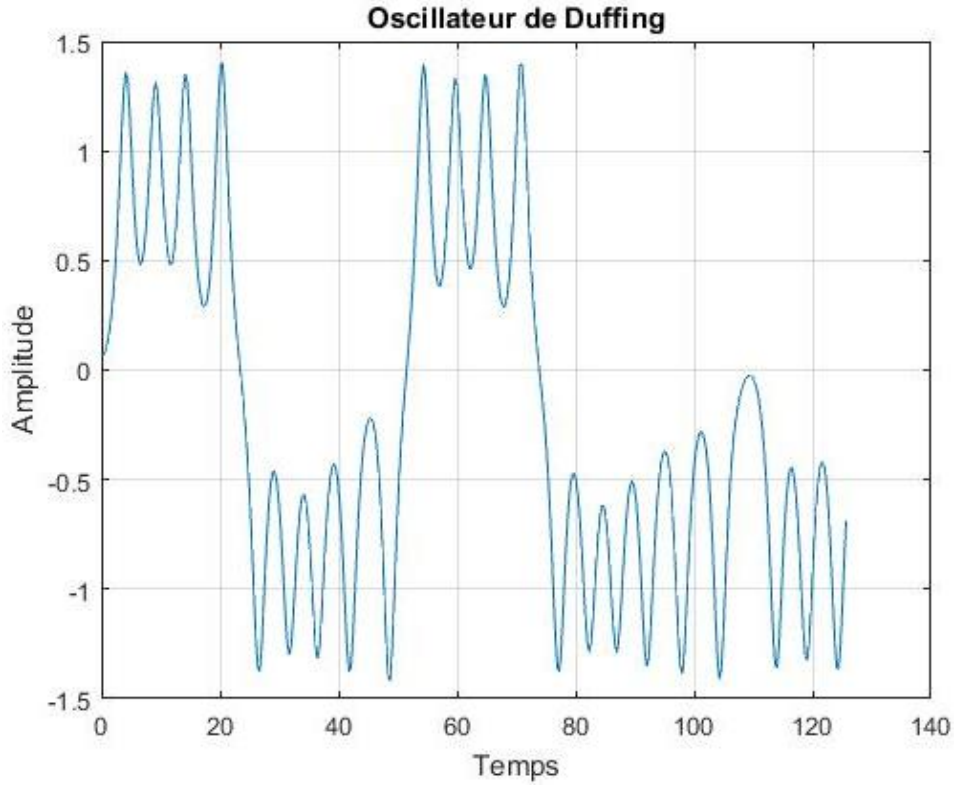


2. Oscillateur de Duffing

Programme

```
clc
clear all
alpha=0.03;delta=0.06;
t=[0:pi/10:40*pi]
f=@(t,y) [y(2);-alpha*y(2)+(y(1)-y(1).^3)+delta*cos(t)]
[t,y]=ode45(f,t,[delta 0])
plot(t,y(:,1))
xlabel('Temps')
ylabel('Amplitude')
title('Oscillateur de Duffing')
grid on
```

Exécution

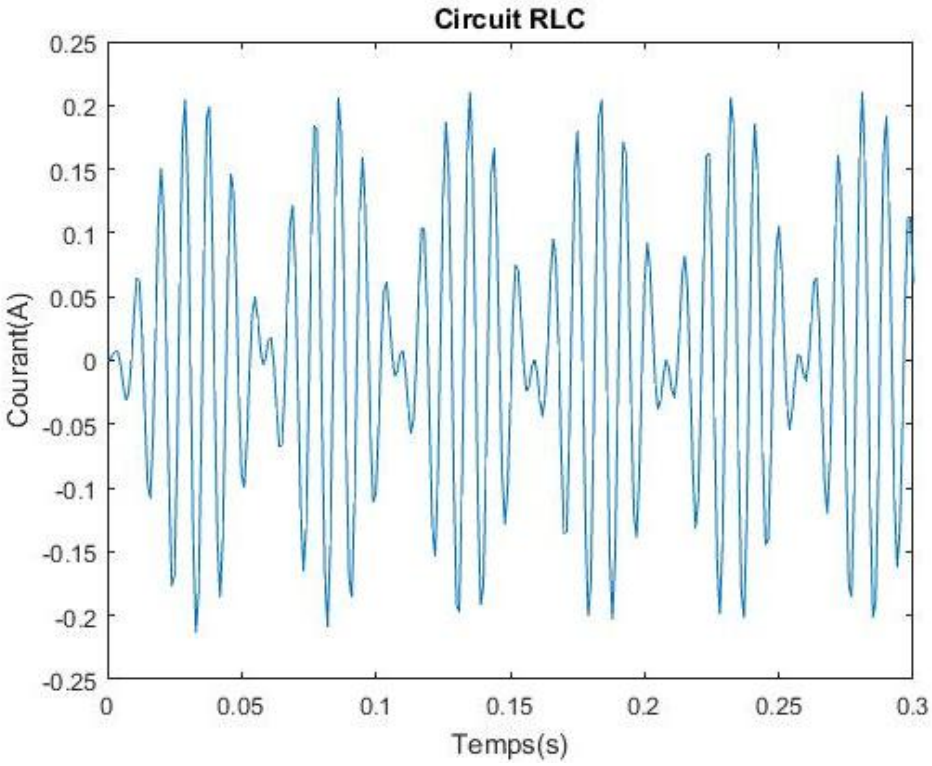


3. Circuit RLC

Programme

```
clc
clear all
R=400;L=2;C=1e-6;
f=@(t,q) [q(2);(1/L)*(100*sin(63*t)*sin(710*t)-R*q(2)-(1/C)*q(1))];
[t,q]=ode45(f,[0:1e-3:0.3],[0 0])
plot(t,q(:,2))
xlabel('Temps(s)')
ylabel('Courant(A)')
title('Circuit RLC')
```

Exécution



Dans le programme, on trace la composante q(:,2) , qui représente la dérivée de la variable q(:,1) , qui le courant électrique.