Université frères Mentouri Constantine 1
Département de Physique
3$^{\text{éme}}$ année Physique Energétique
Matière : Méthodes numériques appliquées à l'Energétique

TD. N° 5 : Problèmes à valeur initiale

Exercice (1)

Utiliser la méthode de Picard pour résoudre le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = t - y \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Comparer la solution obtenue avec la solution exacte : $u_{ex} = -1 + t + 2e^{-t}$

Exercice (2)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' + 4y = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Utiliser la méthode d'Euler avec un pas de calcul, $h = 0.1$, pour calculer la valeur y(0.2).

Exercice (3)

Résoudre le problème à valeur initiale suivant, par la méthode d'Euler :

$$\begin{cases} y'' + 0.1y' + x = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$0 < x \leq 0.5$, avec : $\Delta x = 0.25$

Exercice (4)

1. Effectuer trois itérations pour résoudre le problème à valeur initiale suivant, par la méthode d'Euler et par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \cos(t)\, e^{-2u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Pas de calcul : $\Delta t = 0.25$

2. Comparer les résultats numériques obtenus avec la solution exacte :

$$u_{ex}(t) = \frac{\log(e^2 + 2\sin(x))}{2}$$

Exercice(5)

Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode d'Adams-Bashforth d'odre 3 :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + 4x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Domaine de calcul : $]0\,, 1]$ et, pas de calcul : $\Delta x = 0.2$

Solution de l'exercice (1)

$$u(t) = u(0) + \int_0^t \big(s - u(s)\big)ds$$

On démarre les calculs par la condition initiale :$u(s) = u(0) = 1$

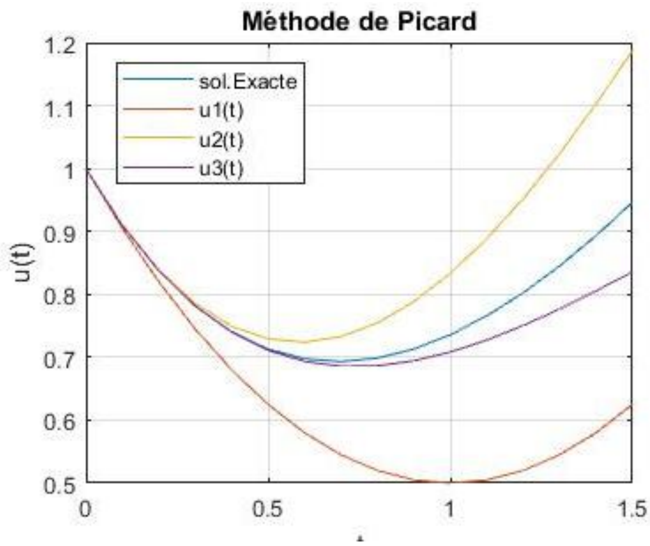
$$u^{(1)} = 1 + \int_0^t (s-1)ds = 1 + \left[\frac{s^2}{2} - s\right]_0^t = \frac{t^2}{2} - t + 1$$

$$u^{(2)} = 1 + \int_0^t \big(s - u^{(1)}\big)ds = 1 + \int_0^t \left[s - \frac{s^2}{2} + s - 1\right] ds = -\frac{t^3}{6} + t^2 - t + 1$$

$$u^{(3)} = 1 + \int_0^t \big(s - u^{(2)}\big)ds = 1 + \int_0^t \left[s + \frac{s^3}{6} - s^2 + s - 1\right] ds = \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{3} + t^2 - t + 1$$

Programme Matlab pour comparer les solutions obtenues avec la solution exacte :

```
clc
clear all
t=[0:0.1:1.5]
u1=t.^2/2-t+1
u2=-t.^3/6+t.^2-t+1
u3=t.^4/24-t.^3/3+t.^2-t+1
uex=-1+t+2*exp(-t)
plot(t,uex,t,u1,t,u2,t,u3)
legend('sol.Exacte','u1(t)','u2(t)','u3(t)')
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
title('Méthode de Picard')
```

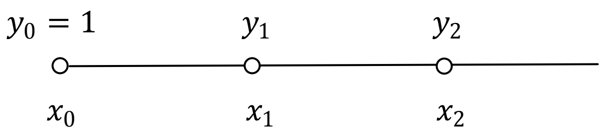


La solution itérative u3(t), est la plus proche de la solution exacte $u_{ex}(t)$.

Solution de l’exercice (2)

Discrétisation du domaine de calcul :

Pour calculer y(0.2), avec un pas $h = 0.1$, on doit effectuer deux itérations de calcul :



$x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + h = 0.1$, $x_2 = x_1 + h = 0.2$

Ecriture de l’équation différentielle sous la forme résoluble par Euler :

$$\begin{cases} y' = x^2 - 4y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$y_i = y_{i-1} + h * f(x_{i-1}, y_{i-1})$, avec : $f(x, y) = x^2 - 4y$

$\boldsymbol{y(0.1)} = \boldsymbol{y_1} = y_0 + \Delta t * (x_0^2 - 4y_0) = 1 + 0.1(0 - 4 * 1) = \mathbf{0.6000}$

$\boldsymbol{y(0.2)} = \boldsymbol{y_2} = y_1 + \Delta t * (x_1^2 - 4y_1) = 0.6 + 0.1 * (0.01 - 4 * 0.6) = \mathbf{0.3610}$

Solution de l’exercice (3)

Transformation de l’équation différentielle d’ordre 2, en un système d’équations d’ordre 1 :

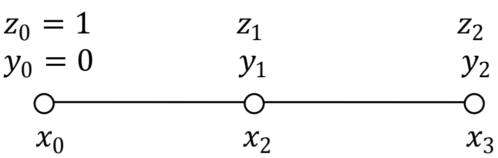
$$\begin{cases} y' = z & \dots\dots\dots\dots(1) \\ z' = -0.1z - x & \dots\dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$$

Discrétisation du domaine de calcul :

Nombre de nœuds : $\boldsymbol{n} = \frac{x_m - x_0}{\Delta x} + 1 = \frac{0.5 - 0}{0.25} + 1 = \mathbf{3}$



$x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.50$

Résolution du système d'équations différentielles par la méthode d'Euler :

$$\begin{cases}(2) \rightarrow \quad z_i = z_{i-1} + \Delta x * (-0.1 * z_{i-1} - x_{i-1}) \\ (1) \rightarrow \quad y_i = y_{i-1} + \Delta x * (z_{i-1})\end{cases}$$

i=1

$$z_1 = z_0 + \Delta x * (-0.1 * z_0 - x_0) = 1 + 0.25 * (-0.1 * 1 - 0) = 0.9750$$

$$y_1 = y_0 + \Delta x * z_0 = 0 + 0.25 * 1 = 0.2500$$

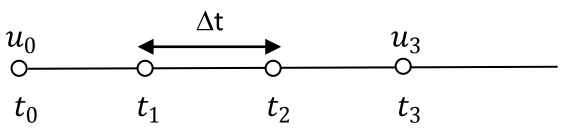
i=2

$$z_2 = z_1 + \Delta x * (-0.1 * z_1 - x_1) = 0.975 + 0.25 * (-0.1 * 0.975 - 0.25) = 0.8881$$

$$\boldsymbol{y_2} = y_1 + \Delta x * z_1 = 0.25 + 0.25 * 0.975 = \mathbf{0.4937}$$

Solution de l'exercice (4)

Dans trois itérations, on doit calculer u_1 , u_2 et u_3 :



Abscisses des nœuds : $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$

1. **Résolution numérique de l'équation différentielle.**

   a. Méthode d'Euler

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t * f(t_{i-1}, u_{i-1}) \quad , \quad \text{avec : } f(t, u) = \sin(t)\, e^{-2u}$$

$$\boldsymbol{u_1} = u_0 + \Delta t * f(t_0, u_0) = 1 + 0.25 * \cos(0(\mathrm{rd})) * e^{-2*1} = \mathbf{1.0338}$$

$$\boldsymbol{u_2} = u_1 + \Delta t * f(t_1, u_1) = 1.0338 + 0.25 * \cos(0.25) * e^{-2*1.0338} = \mathbf{1.0644}$$

$$\boldsymbol{u_3} = u_2 + \Delta t * f(t_2, u_2) = 1.0644 + 0.25 * \cos(0.5) * e^{-2*1.0644} = \mathbf{1.0905}$$

   b. Méthode de Runge-kutta d'ordre 4

i=1

$$k1 = \Delta t * f(t_0, u_0) = 0.25 * f(0\ , 1) = 0.25 * \cos(0) * \mathrm{e}^{-2*1} = 0.0338$$

$$k2 = \Delta t * f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, u_0 + \frac{k1}{2}\right) = 0.25 * f(0.125, 1.0169) = 0.25 * \cos(0.125) * \mathrm{e}^{-2*1.0169} = 0.0325$$

$$k3 = \Delta t * f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, u_0 + \frac{k2}{2}\right) = 0.25 * f(0.125, 1.0163) = 0.25 * \cos(0.125) * \mathrm{e}^{-2*1.0163} = 0.0325$$

$$k4 = \Delta t * f(t_0 + \Delta t, u_0 + k3) = 0.25 * f(0.25, 1.0163) = 0.25 * \cos(0.25) * \mathrm{e}^{-2*1.0163} = 0.0307$$

$$\boldsymbol{u_1} = u_0 + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 1 + \frac{0.0338}{6} + \frac{0.0325}{3} + \frac{0.0325}{3} + \frac{0.0307}{6} = \mathbf{1.0324}$$

i=2

$k1 = \Delta t * f(t_1, u_1) = 0.25 * f(0.25, 1.0324) = 0.25 * \cos(0.25) * e^{-2*1.0324} = 0.0307$

$k2 = \Delta t * f\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}, u_1 + \frac{k1}{2}\right) = 0.25 * f(0.375, 1.0477) = 0.25 * \cos(0.375) * e^{-2*1.0477} = 0.0286$

$k3 = \Delta t * f\left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}, u_1 + \frac{k2}{2}\right) = 0.25 * f(0.375, 1.0467) = 0.25 * \cos(0.375) * e^{-2*1.0467} = 0.0287$

$k4 = \Delta t * f(t_1 + \Delta t, u_1 + k3) = 0.25 * f(0.5, 1.0611) = 0.25 * \cos(0.5) * e^{-2*1.0611} = 0.0263$

$$\boldsymbol{u_2} = u_1 + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 1.0324 + \frac{0.0307}{6} + \frac{0.0286}{3} + \frac{0.0287}{3} + \frac{0.0263}{6} = \mathbf{1.0610}$$

i=3

$k1 = \Delta t . f(t_2, u_2) = 0.25 * f(0.5, 1.0610) = 0.25 * \cos(0.5) * e^{-2*1.0610} = 0.0263$

$k2 = \Delta t * f\left(t_2 + \frac{\Delta t}{2}, u_2 + \frac{k1}{2}\right) = 0.25 * f(0.625, 1.0741) = 0.25 * \cos(0.625) * e^{-2*1.0741} = 0.0237$

$k3 = \Delta t * f\left(t_2 + \frac{\Delta t}{2}, u_2 + \frac{k2}{2}\right) = 0.25 * f(0.625, 1.0728) = 0.25 * \cos(0.625) * e^{-2*1.0728} = 0.0237$

$k4 = \Delta t * f(t_2 + \Delta x, u_2 + k3) = 0.25 * f(0.75, 1.0847) = 0.25 * \cos(0.75) * e^{-2*1.0847} = 0.0209$

$$\boldsymbol{u_3} = u_2 + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 1.0610 + \frac{0.0263}{6} + \frac{0.0237}{3} + \frac{0.0237}{3} + \frac{0.0209}{6} = \mathbf{1.0847}$$

2. **Comparaison des résultats numériques avec la solution analytique :**

i	x	u_e	u_{rk}	u_{ex}	$\lvert u_{ex} - u_e \rvert$	$\lvert u_{ex} - u_{rk} \rvert$
1	0.25	1.0338	1.0324	1.0324	0.0014	≈ 0
2	0.50	1.0644	1.0610	1.0610	0.0034	≈ 0
3	0.75	1.0905	1.0847	1.0847	0.0058	≈ 0

La méthode d'Euler est d'ordre 1 et la méthode de Runge-Kutta est d'ordre 4. Par conséquence, les résultats obtenus par la méthode de Runge-Kutta sont plus proche à la solution exacte que les résultats obtenus par la méthode d'Euler.

Solution de l'exercice (5)

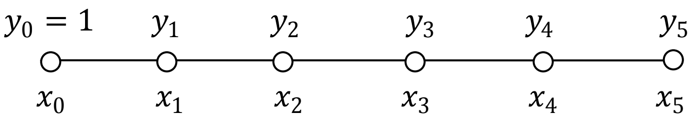
La solution par la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 4, est donnée par la formule :

$$y_i = y_{i-1} + \frac{\Delta x}{24}[-9f(x_{i-4}, y_{i-4}) + 37f(x_{i-3}, y_{i-3}) - 59f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 55f(x_{i-1}, y_{i-1})]$$

avec : $f(x, y) = \frac{y-x}{y+4x}$ et $y_0 = 1$

1. <u>Discrétisation du domaine de calcul :</u>

Nombre de nœuds : $\boldsymbol{n} = \frac{x_m - x_0}{\Delta x} + 1 = \frac{1-0}{0.2} + 1 = \mathbf{6}$



Abscisses des nœuds :

$x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1$

2. <u>Calcul des valeurs de démmarage y_1 , y_2 et y_3 :</u>

Ces valeurs seront calculées par une méthode à pas simple de Runge-Kutta d'ordre 4.

<u>i=1</u>

$$k1 = \Delta x * f(x_0\,, y_0) = 0.2 * f(0\ ,\ 1) = 0.2 * \frac{y_0 - x_0}{y_0 + 4x_0} = 0.2 * \frac{1-0}{1+4*0} = 0.2000$$

$$k2 = \Delta x * f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\,, y_0 + \frac{k1}{2}\right) = 0.2 * f(0.1\,, 1.1) = 0.2 * \frac{1.1 - 0.1}{1.1 + 4 * 0.1} = 0.1333$$

$$k3 = \Delta x * f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\,, y_0 + \frac{k2}{2}\right) = 0.2 * f(0.1\,, 1.0666) = 0.2 * \frac{1.0666 - 0.1}{1.0666 + 4 * 0.1} = 0.1318$$

$$k4 = \Delta x * f(x_0 + \Delta x\,, y_0 + k3) = 0.2 * f(0.2\,, 1.1318) = 0.2 * \frac{1.1318 - 0.2}{1.1318 + 4 * 0.2} = 0.0965$$

$$\boldsymbol{y_1} = y_0 + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 1 + \frac{0.2}{6} + \frac{0.1333}{3} + \frac{0.1318}{3} + \frac{0.0965}{6} = \mathbf{1.1378}$$

<u>i=2</u>

$$k1 = \Delta x * f(x_1\,, y_1) = 0.2 * f(0.2{,}1.1378) = 0.2 * \frac{y_1 - x_1}{y_1 + 4x_1} = 0.2 * \frac{1.1378 - 0.2}{1.1378 + 4 * 0.2} = 0.0968$$

$$k2 = \Delta x * f\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\,, y_1 + \frac{k1}{2}\right) = 0.2 * f(0.3\,, 1.1862) = 0.2 * \frac{1.1862 - 0.3}{1.1862 + 4 * 0.3} = 0.0743$$

$$k3 = \Delta x * f\left(x_1 + \frac{\Delta x}{2}\,, y_1 + \frac{k2}{2}\right) = 0.2 * f(0.3\,, 1.1749) = 0.2 * \frac{1.1749 - 0.3}{1.1749 + 4 * 0.3} = 0.0737$$

$$k4 = \Delta x * f(x_1 + \Delta x\,, y_1 + k3) = 0.2 * f(0.4\,, 1.2115) = 0.2 * \frac{1.2115 - 0.4}{1.2115 + 4 * 0.4} = 0.0577$$

$$\boldsymbol{y_2} = y_1 + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 1.1378 + \frac{0.0968}{6} + \frac{0.0743}{3} + \frac{0.0737}{3} + \frac{0.0577}{6} = \mathbf{1.2129}$$

i=3

$$k1 = \Delta x . f(x_2 , y_2) = 0.2 * f(0.4{,}1.2129) = 0.2 * \frac{y_2 - x_2}{y_2 + 4x_2} = 0.2 * \frac{1.2129 - 0.4}{1.2129 + 4 * 0.4} = 0.0578$$

$$k2 = \Delta x * f\left(x_2 + \frac{\Delta x}{2} , y_2 + \frac{k1}{2}\right) = 0.2 * f(0.5 , 1.2418) = 0.2 * \frac{1.2418 - 0.5}{1.2418 + 4 * 0.5} = 0.0458$$

$$k3 = \Delta x * f\left(x_2 + \frac{\Delta x}{2} , y_2 + \frac{k2}{2}\right) = 0.2 * f(0.5 , 1.2358) = 0.2 * \frac{1.2358 - 0.5}{1.2358 + 4 * 0.5} = 0.0455$$

$$k4 = \Delta x * f(x_2 + \Delta x , y_2 + k3) = 0.2 * f(0.6 , 1.2584) = 0.2 * \frac{1.2584 - 0.6}{1.2584 + 4 * 0.6} = 0.0360$$

$$\boldsymbol{y_3} = y_2 + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 1.2129 + \frac{0.0578}{6} + \frac{0.0458}{3} + \frac{0.0455}{3} + \frac{0.0360}{6} = \mathbf{1.2589}$$

3. Calcul des valeurs y_4 et y_5 , par la méthode d'Adams-Bashforth d'ordre 4 :

$$\boldsymbol{y_4} = y_3 + \frac{\Delta x}{24}[-9 * f(x_0 , y_0) + 37 * f(x_1 , y_1) - 59 * f(x_2 , y_2) + 55 * f(x_3, y_3)]$$

$$= 1.2589 + \frac{0.2}{24}\left[-9 * \frac{1-0}{1+4*0} + 37 * \frac{1.1378-0.2}{1.1378+4*0.2} - 59 * \frac{1.2129-0.4}{1.2129+4*0.4} + 55 * \frac{1.2589-0.6}{1.2589+4*0.6}\right]$$

$$= \mathbf{1.2736}$$

$$\boldsymbol{y_5} = y_4 + \frac{\Delta x}{24}[-9 * f(x_1 , y_1) + 37 * f(x_2 , y_2) - 59 * f(x_3 , y_3) + 55 * f(x_4, y_4)]$$

$$= 1.2736 + \frac{0.2}{24}\left[-9 * \frac{1.1378-0.2}{1.1378+4*0.2} + 37 * \frac{1.2129-0.4}{1.2129+4*0.4} - 59 * \frac{1.2589-0.6}{1.2589+4*0.6} + 55 * \frac{1.2736-0.8}{1.2736+4*0.8}\right]$$

$$= \mathbf{1.2864}$$