COUCHE LIMITE LAMINAIRE (II)

(SOLUTION APPROCHEE DE VON KARMAN-POHLHAUSEN)

Pour les cas où des solutions exactes de la couche limite ne peuvent être trouvées, on cherche des solutions approchées. La méthode d'approximation classique qui est largement utilisée fut introduite par Von Karman (équation) et développée par Pohlhausen. Cette méthode consiste à donner une approximation polynomiale de la vitesse réduite (u/U) dans la couche limite en fonction de l'épaisseur réduite (y/δ) :

$$\frac{u}{U} = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{y}{\delta}\right)^i \quad \text{avec } a_i : \text{constante}$$

Les constantes (a_i) et le degré du polynôme (n) sont déterminés à partir des conditions aux limites du problème étudié (forme géométrique de l'obstacle, l'écoulement potentiel,...)

La résolution d'un problème dynamique de couche limite consiste à trouver les composantes $u(x,y)$ et $v(x,y)$ de la vitesse satisfaisant aux équations (en régime permanent) :

$$\begin{cases} u.\dfrac{\partial u}{\partial x} + v.\dfrac{\partial u}{\partial y} = U.\dfrac{\partial U}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{(eq. C.L)} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & \text{(éq. continuité)} \end{cases}$$

Pour des conditions aux limites :

$$\begin{cases} y = 0 ; \quad u = v = 0 & \text{(condition d'adhérence)} \\ y \to +\infty ; \quad u \to U & (\quad '' \quad \text{à l'infini}) \end{cases}$$

Une solution exacte a pu être trouvée pour des répartitions spéciales de $U(x)$ mais ceci reste insuffisant pour couvrir tous les autres cas pratiques importants. Pour cela on a besoin de méthodes dont l'application peut peut être généralisée à un grand nombre de cas de vitesse extérieure $U(x)$.

Un autre problème, dans l'étude de la couche limite, consiste à rechercher les lois de variation de τ_0, δ_1 et δ_2 en fonction de x. Ces quantités qui représentent un grand intérêt peuvent être calculées si on connait $u(x,y)$.

La méthode de Pohlhausen est fondée sur les éqts globales de la couche limite, en particulier, l'équation globale de quantité de mouvement (Equation de Karmann). Elle peut être appliquée aux calculs de la couche limite, aussi bien laminaire que turbulente.

II.2 : Procédure d'approximation simple:

Pour un écoulement permanent sur une plaque plane avec une vitesse de l'écoulement potentiel U constante :

Par application de l'éqt. de Bernoulli à l'écoult. potentiel

on a: $$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = U.\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{car } U = \text{cste}$$

Les equations de la couche limite sont :

$$\begin{cases} u.\dfrac{\partial u}{\partial x} + v.\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (1) : \text{éqt. intégrale de qtité de mvt} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & (2) : \text{éqt. de continuité} \end{cases}$$

Par combinaison des deux équations $((1) + u.(2))$ on a:

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(u.v) = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(u.v) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (3)$$

En intégrant localement l'éqt. (3) par rapport à y entre (0 et δ)

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2).dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(u.v)dy = \int_0^\delta \nu.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.dy \qquad (4)$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2).dy + [u.v]_0^\delta = \nu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0^\delta$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}.dy + \left[u(x,\delta).v(x,\delta) - u(x,0).v(x,0)\right] = \nu\left[\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\right]$$

D'après les conditions aux limites :

$$\underbrace{y=0 \Rightarrow \begin{cases} u(x,0) = v(x,0) = 0 \\ \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \tau_0 \text{ (contrainte à la paroi)} \end{cases}}_{\text{condition sur la paroi}} \quad \text{et} \quad \underbrace{y=\delta \Rightarrow \begin{cases} u(x,\delta) = U \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0 \text{ (contrainte nulle à la frontière)} \end{cases}}_{\text{condition à la frontière de la couche limite}}$$

L'application de l'équation de la couche limite (4) donne :

$$\boxed{\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}.dy + U.v(x,\delta) = -\frac{\mu}{\rho}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{\tau_0}{\rho}} \qquad (4)$$

cherchons $v(x,\delta)$ par intégration de l'éqt. de continuité :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy + (v(x,\delta) - \cancel{v(x,0)}) = 0$$

$$\boxed{v(x,\delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}.dy}$$

L'éqt (4) s'écrit alors :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy - U.\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \qquad (5)$$

Appliquons la loi de Leibnitz (*) aux termes de l'éqt. (5) :

$$\begin{cases} \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2.dy - u^2(x,\delta).\frac{d\delta}{dx} + \cancel{u^2(x,0)}.\frac{d0}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dy - U^2.\frac{d\delta}{dx} \\ \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy - U.\frac{d\delta}{dx} \end{cases}$$

(*) $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y).dy - f(x,\beta).\frac{d\beta}{dx} + f(x,\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$

l'équation (5) donne :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dy - U^2\frac{d\delta}{dx} - U\left(\frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy - U\frac{d\delta}{dx}\right) = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u)\,dy = \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}\left[U^2\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy\right]$$

Soit : $\frac{d}{dx}\left[U^2 . \delta_2\right] = \frac{\tau_0}{\rho}$ ou $\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}}$ (6)

Cette équation (6) montre que la variation de la qtité de mouvement en n'importe quelle section de la couche limite est égale à la force produite par la contrainte de cisaillement en cette section.

Pour calculer cette intégrale et obtenir une équation différentielle ordinaire, on exprime $\left(\frac{u}{U}\right)$ comme un développement polynomial de la variable $\left(\frac{y}{\delta}\right)$:

a/ Polynôme de degré (2) :

$$\frac{u}{U} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$ où a_0, a_1, a_2 seront déterminés par les conditions aux limites

$y=0 \Rightarrow u(x,0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$$y=\delta \Rightarrow \begin{cases} u(x,\delta) = U \Rightarrow \frac{u}{U} = 1 = a_1 + a_2 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0 \Rightarrow U.\left\{\frac{a_1}{\delta} + \frac{2a_2}{\delta}\right\} = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

on trouve : $a_1 = 2$

$a_2 = -1$

La vitesse réduite s'écrit comme un polynome :

$$\frac{u}{U} = 2.\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2 \quad \left(\text{avec } \eta = \frac{y}{\delta(x)}\right) \qquad (7)$$

L'éqt. intégrale de la quantité de mouvement (6) s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u).dy = \frac{d}{dx}\Big[U^2.\underbrace{\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right).dy}_{\delta_2}\Big] = \frac{\tau_0}{\rho}$$

On remplace $\frac{u}{U}$ par son polynôme en η :

$$\frac{d}{dx}\left[U^2.\delta.\int_0^1 (2\eta-\eta^2)(1-2\eta+\eta^2).d\eta\right] = \frac{d}{dx}\left[U^2.\delta.\frac{2}{15}\right] = \frac{\tau_0}{\rho} \qquad (8)$$

Aussi on a : $\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{y=0} = \nu\frac{U}{\delta}.\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{u}{U}\right)_{\eta=0} = \frac{\nu U}{\delta}.2 \quad (9)$

Par égalisation entre les eqts (8) et (9) : $\frac{d}{dx}\left[U^2\delta.\frac{2}{15}\right] = \frac{2\nu U}{\delta}$

on obtient : $\delta.\frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U} \Longrightarrow \delta.d\delta = \frac{15\nu}{U}.dx$

L'intégration donne : $\delta^2(x) = \frac{30\nu.x}{U}$ donc $\delta(x) = \sqrt{30}.\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ (9)

Soit $\boxed{\delta(x) = \frac{5,48.x}{R_{ex}^{1/2}}}$ et $\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,73}{R_{ex}^{1/2}}$ {résultats approximés}

et $\boxed{\delta(x) = \frac{5x}{R_{ex}^{1/2}}}$ et $\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,664}{R_{ex}^{1/2}}$ {résultats de la solution exacte}

Une solution exacte vérifie les équations de base en tout points (x,y) de l'écoulement mais une solution approchée satisfait l'équation de la couche limite plutôt en moyenne qu'en tout points du fluide. Les résultats obtenus par l'approximation seront raisonnablement précis et exacts dans la plupart des cas.

b) Procédure d'approximation généralisée de Karman - Pohlhausen.

Dans le cas d'une couche limite laminaire avec gradient de pression c-à-d : $U(x)$ et $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$, le profil des vitesse s'écrit en polynôme de degré 4.

$$\frac{u}{U} = a + b.\eta + c.\eta^2 + d.\eta^3 + e.\eta^4 \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \qquad (10)$$

Pour déterminer les 5 coefficients du polynôme $(a, b, c\ldots)$ on applique les 5 conditions aux limites suivantes :

Deux conditions de paroi : $(y=0)$ et trois conditions sur $(y=\delta)$:

$u(x,0) = 0$ ①

$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = -\frac{U(x)}{\nu} \cdot \frac{dU(x)}{dx}$ ②

$u(x,\delta) = U(x)$ ③

$\frac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0$ ④

$\frac{\partial^2 u(x,\delta)}{\partial y^2} = 0$ ⑤

La réécriture des conditions aux limites en variables adimensionnelles $\left(\frac{u}{U}\right)$ et η donne :

Conditions de paroi $(\eta=0)$

① $\frac{u}{U} = 0$

② $\frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = -\frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{dU}{dx} = -\Lambda(x)$

avec $\Lambda(x)$: un facteur de forme sans dimension.

Conditions de l'écoulement potentiel $(\eta=1)$

③ $\frac{u}{U} = 1$

④ $\frac{\partial(u/U)}{\partial \eta} = 0$

⑤ $\frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = 0$

L'application des conditions aux limites à l'éqt. (10) donne :

$$\left.\begin{array}{l} ① \Rightarrow \frac{u}{U} = 0 = a \\ ② \ \frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = 2c = -\Lambda \Rightarrow c = -\frac{\Lambda}{2} \end{array}\right\} \text{pour } \eta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} ③ \ \frac{u}{U} = 1 = \overset{0}{\cancel{a}} + b + c + d + e \\ ④ \ \frac{\partial(u/U)}{\partial \eta} = 0 = b + 2c + 3d + 4e \\ ⑤ \ \frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = 0 = 2c + 6d + 12e \end{array}\right\} \text{pour } \eta = 1$$

La résolution du système donne les valeurs en fonction de Λ :

$a = 0; \quad b = 2 + \frac{\Lambda}{6}; \quad c = -\frac{\Lambda}{2}; \quad d = -2 + \frac{\Lambda}{2}; \quad e = 1 - \frac{\Lambda}{6}$

méthodes dont l'application peut peut être généralisée à un grand nombre de cas de vitesse extérieure $U(x)$.

Un autre problème, dans l'étude de la couche limite, consiste à rechercher les lois de variation de τ_0, δ_1 et δ_2 en fonction de x. Ces quantités qui représentent un grand intérêt peuvent être calculées si on connait $u(x,y)$.

La méthode de Pohlhausen est fondée sur les éqts globales de la couche limite, en particulier, l'équation globale de quantité de mouvement (Equation de Karmann). Elle peut être appliquée aux calculs de la couche limite, aussi bien laminaire que turbulente.

II.2 : Procédure d'approximation simple:

Pour un écoulement permanent sur une plaque plane avec une vitesse de l'écoulement potentiel U constante ;

Par application de l'éqt. de Bernoulli à l'écoult. potentiel on a: $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = U.\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ car $U = cste$

Les equations de la couche limite sont :

$$\begin{cases} u.\dfrac{\partial u}{\partial x} + v.\dfrac{\partial u}{\partial y} = \nu.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (1) : \text{éqt. intégrale de qtité de mvt} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 & (2) : \text{éqt. de continuité} \end{cases}$$

Par combinaison des deux équations $((1) + u.(2))$ on a:

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + u\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(u.v) = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(u.v) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (3)$$

En intégrant localement l'éqt. (3) par rapport à y entre (0 et δ)

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2).dy + \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}(u.v)dy = \int_0^\delta \nu.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.dy \qquad (4)$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}(u^2).dy + [u.v]_0^\delta = \nu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_0^\delta$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}.dy + \left[u(x,\delta).v(x,\delta) - u(x,0).v(x,0)\right] = \nu\left[\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\right]$$

D'après les conditions aux limites :

$$\underbrace{y=0 \Rightarrow \begin{cases} u(x,0) = v(x,0) = 0 \\ \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \tau_0 \text{ (contrainte à la paroi)} \end{cases}}_{\text{condition sur la paroi}} \quad \text{et} \quad \underbrace{y=\delta \Rightarrow \begin{cases} u(x,\delta) = U \\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0 \text{ (contrainte nulle à la frontière)} \end{cases}}_{\text{condition à la frontière de la couche limite}}$$

L'application de l'équation de la couche limite (4) donne :

$$\boxed{\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}.dy + U.v(x,\delta) = -\frac{\mu}{\rho}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{\tau_0}{\rho}} \qquad (4)$$

cherchons $v(x,\delta)$ par intégration de l'eqt. de continuité :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy + \left(v(x,\delta) - \cancel{v(x,0)}\right) = 0$$

$$\boxed{v(x,\delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}.dy}$$

L'eqt (4) s'écrit alors :

$$\int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy - U.\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy = -\frac{\tau_0}{\rho} \qquad (5)$$

Appliquons la loi de Leibnitz (*) aux termes de l'eqt. (5) :

$$\begin{cases} \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2.dy - u^2(x,\delta).\frac{d\delta}{dx} + \cancel{u^2(x,0)}.\frac{d0}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dy - U^2.\frac{d\delta}{dx} \\ \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy - U.\frac{d\delta}{dx} \end{cases}$$

(*) $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy = \frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y).dy - f(x,\beta).\frac{d\beta}{dx} + f(x,\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$

l'équation (5) donne :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2 dy - U^2\frac{d\delta}{dx} - U\left(\frac{d}{dx}\int_0^\delta u\,dy - U\frac{d\delta}{dx}\right) = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u)\,dy = \frac{\tau_0}{\rho} = \frac{d}{dx}\left[U^2\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy\right]$$

$$\text{Soit : } \frac{d}{dx}\left[U^2\delta_2\right] = \frac{\tau_0}{\rho} \quad \text{où} \quad \boxed{\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2}} \quad (6)$$

Cette équation (6) montre que la variation de la qtité de mouvement en n'importe quelle section de la couche limite est égale à la force produite par la contrainte de cisaillement en cette section.

Pour calculer cette intégrale et obtenir une équation différentielle ordinaire, on exprime $\left(\frac{u}{U}\right)$ comme un développement polynomial de la variable $\left(\frac{y}{\delta}\right)$:

a/ Polynôme du degré (2) :

$$\frac{u}{U} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$ où a_0, a_1, a_2 seront déterminés par les conditions aux limites

$$y = 0 \Rightarrow u(x,0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$y = \delta \Rightarrow \begin{cases} u(x,\delta) = U \Rightarrow \dfrac{u}{U} = 1 = a_1 + a_2 \\[2ex] \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\delta} = 0 \Rightarrow U\left\{\dfrac{a_1}{\delta} + \dfrac{2a_2}{\delta}\right\} = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

on trouve : $a_1 = 2$

$a_2 = -1$

La vitesse réduite s'écrit comme un polynome :

$$\frac{u}{U} = 2.\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 2\eta - \eta^2 \quad \left(\text{avec } \eta = \frac{y}{\delta(x)}\right) \qquad (7)$$

L'éqt. intégrale de la quantité de mouvement (6) s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta u(U-u).dy = \frac{d}{dx}\Big[U^2 . \underbrace{\int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right).dy}_{\delta_2}\Big] = \frac{\tau_0}{\rho}$$

On remplace $\frac{u}{U}$ par son polynôme en η :

$$\frac{d}{dx}\left[U^2.\delta.\int_0^1 (2\eta-\eta^2)(1-2\eta+\eta^2).d\eta\right] = \frac{d}{dx}\left[U^2.\delta.\frac{2}{15}\right] = \frac{\tau_0}{\rho} \qquad (8)$$

Aussi on a : $\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{y=0} = \frac{\nu U}{\delta}.\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{u}{U}\right)_{\eta=0} = \frac{\nu U}{\delta}.2 \qquad (9)$

Par égalisation entre les éqts (8) et (9) : $\frac{d}{dx}\left[U^2\delta.\frac{2}{15}\right] = \frac{2\nu U}{\delta}$

on obtient : $\delta.\frac{d\delta}{dx} = \frac{15\nu}{U} \Longrightarrow \delta.d\delta = \frac{15\nu}{U}.dx$

L'intégration donne : $\delta^2(x) = \frac{30\nu.x}{U}$ donc $\delta(x) = \sqrt{30}.\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ (9)

Soit $\boxed{\delta(x) = \frac{5,48.x}{R_{ex}^{1/2}}}$ et $\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,73}{R_{ex}^{1/2}}$ {résultats approximés}

et $\boxed{\delta(x) = \frac{5x}{R_{ex}^{1/2}}}$ et $\frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,664}{R_{ex}^{1/2}}$ {résultats de la solution exacte}

Une solution exacte vérifie les équations de base en tout points (x,y) de l'écoulement mais une solution approché satisfait l'équation de la couche limite plutôt en moyenne qu'en tout points du fluide. Les résultats obtenus par l'approximation seront raisonnablement précis et exacts dans la plupart des cas.

b) Procédure d'approximation généralisée de Karman - Pohlhausen.

Dans le cas d'une couche limite laminaire avec gradient de pression c-à-d : $U(x)$ et $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$, le profil des vitesse s'écrit en polynôme de degré 4.

$$\frac{u}{U} = a + b\cdot\eta + c\cdot\eta^2 + d\cdot\eta^3 + e\cdot\eta^4 \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \qquad (10)$$

Pour déterminer les 5 coefficients du polynôme $(a, b, c...)$ on applique les 5 conditions aux limites suivantes :

Deux conditions de paroi : $(y=0)$ et trois conditions sur $(y=\delta)$:

$$u(x,0) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2} = -\frac{U(x)}{\nu}\cdot\frac{dU(x)}{dx} \quad (2)$$

$$u(x,\delta) = U(x) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\delta)}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

La réécriture des conditions aux limites en variables adimensionnells $\left(\frac{u}{U}\right)$ et η donne :

Conditions de paroi $(\eta=0)$

(1) $\frac{u}{U} = 0$

(2) $\frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = -\frac{\delta^2}{\nu}\cdot\frac{dU}{dx} = -\Lambda(x)$

avec $\Lambda(x)$: un facteur de forme sans dimension.

Conditions de l'écoulement potentiel $(\eta=1)$

(3) $\frac{u}{U} = 1$

(4) $\frac{\partial(u/U)}{\partial \eta} = 0$

(5) $\frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = 0$

L'application des conditions aux limites à l'éqt. (10) donne :

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \frac{u}{U} = 0 = a \\ (2)\ \frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = 2c = -\Lambda \Rightarrow c = -\frac{\Lambda}{2} \end{array}\right\} \text{pour } \eta = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (3)\ \frac{u}{U} = 1 = \overset{0}{\cancel{a}} + b + c + d + e \\ (4)\ \frac{\partial(u/U)}{\partial \eta} = 0 = b + 2c + 3d + 4e \\ (5)\ \frac{\partial^2(u/U)}{\partial \eta^2} = 0 = 2c + 6d + 12e \end{array}\right\} \text{pour } \eta = 1$$

La résolution du système donne les valeurs en fonction de Λ :

$$a = 0; \quad b = 2 + \frac{\Lambda}{6}; \quad c = -\frac{\Lambda}{2}; \quad d = -2 + \frac{\Lambda}{2}; \quad e = 1 - \frac{\Lambda}{6}$$