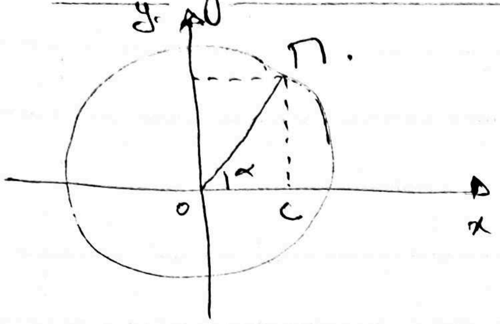
Chapitre 6. | Fonctions réciproques | 2020 - 2021. SEM_1ère A.

1 - Cercle trigonométrique.



OM : Hypoténuse.
CM : Côté opposé.
OC : Côté Adjacent.

2 - Fonctions circulaires

a/ Sinus.

- $\sin x = \dfrac{CM}{OM}$.
- Continue, définie sur $\mathbb{R}$.
- périodique de 2π.
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\sin(-x) = -\sin x$.
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
- $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$.
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$.
- $(\sin x)' = \cos x$.

b/ Cosinus.

- $\cos x = \dfrac{OC}{OM}$.
- Continue, définie sur $\mathbb{R}$.
- périodique de 2π.
- $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- $\cos(-x) = \cos x$.
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$.
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
- $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$.
- $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.
- $(\cos x)' = -\sin x$.

Remarque:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Tangente.

- $y = \operatorname{Tan} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
- $\operatorname{Tan} x = \dfrac{CM}{OC}$.
- Continue, définie sur $\mathbb{R} - \{(2K+1)\pi/2, K \in \mathbb{Z}\}$.
- périodique de π.
- $\operatorname{Tan}(-x) = -\operatorname{Tan} x$.
- $\operatorname{Tan}(\pi + x) = \operatorname{Tan} x$.
- $\operatorname{Tan}(\pi - x) = -\operatorname{Tan} x$.
- $\operatorname{Tan}(\pi/2 + x) = \dfrac{-1}{\operatorname{Tan} x}$.
- $\operatorname{Tan}(\pi/2 - x) = \dfrac{1}{\operatorname{Tan} x}$.
- $(\operatorname{Tan} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{Tan}^2 x$.

2- Cotangente.

- $y = \operatorname{Cotan} x = \dfrac{1}{\operatorname{Tan} x}$.
-
- Continue, définie sur $\mathbb{R} - \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.
- périodique de π.
- $\operatorname{Cotan}(-x) = -\operatorname{Cotan} x$.
- $\operatorname{Cotan}(\pi + x) = \operatorname{Cotan} x$.
- $\operatorname{Cotan}(\pi - x) = -\operatorname{Cotan} x$.
- $\operatorname{Cotan}(\pi/2 + x) = -\operatorname{Tan} x$.
- $\operatorname{Cotan}(\pi/2 - x) = \operatorname{Tan} x$.
- $(\operatorname{Cotan} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{Cotan}^2 x)$.

3- Angles.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\operatorname{Tan} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

4- Formules

- $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \cdot \sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

- $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \sin b$.

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
- $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$.

5- Résolution d'équations trigonométriques.

- $\cos a = \cos b \iff \begin{cases} a = b + 2\pi K \\ \text{ou} \\ a = -b + 2\pi K, \; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

- $\sin a = \sin b \iff \begin{cases} a = b + 2\pi K \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2\pi K, \; K \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

- $\tan a = \tan b \iff a = b + \pi K, \; K \in \mathbb{Z}$.

Fonctions Circulaires inverses

a/ ArcSinus

- $y = \text{Arcsin}\, x$
- Continue, définie sur $[-1, 1]$
- $x = \sin y \Leftrightarrow y = \text{Arcsin}\, x$.
- $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsin}\, x \leq \frac{\pi}{2}$.
- $\left[\text{ArcSin}\, f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$
- $\text{ArcSin}\, x = \begin{cases} \text{ArcSin}\, x + 2\pi K. \\ \pi - \text{ArcSin}\, x + 2\pi K. \end{cases}$

b/ ArcCosinus.

- $y = \text{ArcCos}\, x$.
- Continue, définie sur $[-1, 1]$
- $x = \cos y \Leftrightarrow y = \text{ArcCos}\, x$.
- $0 \leq \text{ArcCos}\, x \leq \pi$.
- $\left[\text{ArcCos}\, f(x)\right]' = \dfrac{-\left[f'(x)\right]}{\sqrt{1 - f^2(x)}}$.
- $\text{ArcCos}\, x = \begin{cases} \text{ArcCos}\, x + 2\pi K. \\ -\text{ArcCos}\, x + 2\pi K. \end{cases}$

Remarque:

$\forall x \in]-1, 1[$.

$\text{ArcSin}\, x + \text{ArcCos}\, x = \pi/2$.

c/ Arctangente

- $x = \tan y \Leftrightarrow y = \text{Arctan}\, x$.
- Continue, définie sur $\mathbb{R}$.
- $\left[\text{Arctan}\, f(x)\right]' = \dfrac{\left[f(x)\right]'}{1 + f^2(x)}$
- $-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arctan}\, x \leq \pi/2$
- $\text{Arctan}\, x = \text{Arctan}\, x + \pi K$.

Fonctions Hyperboliques :

Définition :

a. sh

$sh : \sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- $(sh\,x)' = ch\,x$.

b. ch

$ch = \cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longrightarrow \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- $(ch\,x)' = sh\,x$.

c. th

$th = \tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longrightarrow \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

propriétés

- $ch\,x + sh\,x = e^x$.
- $ch\,x - sh\,x = e^{-x}$.
- $ch^2 x - sh^2 x = 1$.
- $ch\,x = \dfrac{e^x}{2}\left[1 + e^{-2x}\right]$.
- $sh\,x = \dfrac{e^x}{2}\left[1 - e^{-2x}\right]$.
- $ch(a+b) = ch\,a . ch\,b + sh\,b\, sh\,a$.
- $sh(a+b) = sh\,a\, ch\,b + sh\,b\, ch\,b$.