Chapitre 5. | Fonctions Continues. | 2020 - 2021. SEM. 1ère A.

Continuité en un point:

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

f Continue en x_0. $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I. \\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{cases}$

- f Continue à droite. $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = f(a)$.
- f " à gauche $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = f(a)$.

prolongement par Continuité:

$f : I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

f est prolongeable par Continuité en x_0. si,

$\lim\limits_{x_0} f = l$.

$\check{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\check{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ l, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

$\check{f}$ est le prolongement par Continuité de f en x_0.

Continuité d'une fonction composée.

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$. $\quad f(I) \subset J$.

$g: J \longrightarrow \mathbb{R}$.

f Continue en $x_0 \in I$
et g Continue en $f(x_0)$. $\Big\} \Longrightarrow g \circ f$ est Continue en x_0.

Théorème des valeurs intermédiaires

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

f est Continue sur $[a,b]$.

$\forall r \in \mathbb{R}$, $f(a) < r < f(b)$.

$\exists\ c \in [a,b]$, $f(c) = r$.

Corollaire

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. $\quad f$ Continue sur $[a,b]$.

$$f(a) \times f(b) < 0 \Longrightarrow \begin{cases} \exists c \in]a,b[, \\ f(c) = 0. \end{cases}$$