

# Chapitre 4 } Limites des fonctions

2020-2021  
SEM 11, page 1

## • la limite :

Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon \end{cases}$$

## • Limite à gauche et à droite :

### 1/ Limite à droite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad \text{ou}$$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = l$$

### 2/ Limite à gauche :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \quad \text{ou}$$

$$\lim_{x \leq x_0} f(x) = l$$

## • Limite finie et infinie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, \\ x > B \implies |f(x) - l| < \epsilon \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, \\ x > B \implies f(x) > A \end{array} \right.$$

• Si  $f$  admet une limite, elle est unique.

## Opérations algébriques sur les limites.

$f, g$  deux fonctions,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$ , alors:

$$\lim_{x_0} (\lambda f) = \lambda l, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x_0} (f+g) = l + l'.$$

$$\lim_{x_0} (f \times g) = l \times l'.$$

$$\text{Si } l \neq 0, \quad \lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{l}.$$

Limite d'une fonction composée:

$$\lim_{x_0} f = l \quad \text{et} \quad \lim_{l} g = l' \quad \Rightarrow \quad \lim_{x_0} g \circ f = l'.$$

Règle de l'Hôpital

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables,  $x_0 \in I$ .

$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, g'(x) \neq 0, f(x_0) = g(x_0)$ .

$$\lim_{x_0} \frac{f'}{g'} = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x_0} \frac{f}{g} = l$$