Chapitre 2 — Structure de Corps des nombres réels sur $\mathbb{R}$.

2020-2021. EEP. 1ère A.

• Valeur Absolue.

$|x|$ est la valeur absolue d'un nombre réel x.

$$|x| = \begin{cases} +x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

• Propriétés

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $|-x| = |x|$.
- $|xy| = |x||y|$.
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, $a \in \mathbb{R}_+$.
- $|x+y| \leq |x| + |y|$.
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

• Intervalle

a/ Intervalle bornée :

1/ Ouvert : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$.

2/ fermé : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$.

3/ Semi ouvert (ou semi fermé) : $\begin{cases} [a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}. \\ ]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\} \end{cases}$

b/ Intervalle non bornés

- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq b\}$.
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$.

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Ensembles fermés

1 _ Majorant, Minorant :

$F \subset E$, $F \neq \emptyset$.

- M majorant de $F \Leftrightarrow \forall x \in F, x \leq M$.
- m minorant de $F \Leftrightarrow \forall x \in F, m \leq x$.

2 _ Maximum, Minimum.

- F admet un minimum si : $\exists b \in F, \forall x \in F, b \leq x$, $b = \min F$.
- F " " maximum si : $\exists a \in F, \forall x \in F, x \leq a$, $a = \max F$.
- a, b s'ils existent, ils sont uniques.

3 _ Borne inférieure et supérieure :

- $\mathrm{Sup}(F)$ est le plus petit des majorants de F.
- $\mathrm{Inf}(F)$ est le plus grand des minorants de F.

Raisonnement par récurrence

R relation binôme, n_0 entier fixé,

1/ $R(n_0)$ est vraie.

2/ $\forall k \geq n_0$, $R(k) \Longrightarrow R(k+1)$.

Alors $R(n)$ est vraie, $\forall n \geq n_0$