Chapitre 1. | Théorie des ensembles | 2020-2021. SEM. 1ère Année

Généralités:

- A, B, C. trois ensembles.

1/ A un sous ensemble de B.

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$.

2/ A et B sont égaux:

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$.

3/ réunion de A et B.

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$.

4/ Intersection de A et B.

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$.

5/ $C_E A$ (A^c), Complémentaire de A dans E.

6/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

7/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8/ $C_E\left[C_E A\right] = A$.

9/ $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$.

10/ $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

Ensemble des parties.

- Soit E un ensemble.
- $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.

Exp:

$E = \{1, 2\}$.

$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Image directe et réciproque:

1/ $f : E \longrightarrow F$, $A \subset E$.

L'image directe de A par f est:

$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$.

2/ $f : E \longrightarrow F$, $B \subset F$.

L'image réciproque de B par f est:

$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

proposition: Soit $f : E \longrightarrow F$

1/ $\forall A, B \subset E$.

- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2/ $\forall A, B \subset F$.

- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Injectivité, Surjectivité, Bijectivité :

$f : E \longrightarrow F$.

1/ f injective si,

$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.

2/ f surjective si,

$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.

3/ f bijective si,

$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

4/ f bijective $\Leftrightarrow$ f injective et f surjective.

Relation Binaire :

Soit, A, B deux ensembles.

- R est une relation binaire de A vers B.
- On note : aRb. ou. $R(a,b)$.

Exp :

$E = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x < y$.

Définitions.

- Soit E un ensemble.
- R une relation binaire sur E.

1/ R réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ x R x$.

2/ R symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ x R y \Rightarrow y R x$.

3/ R antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \left.\begin{array}{l} x R y \\ \text{et } y R x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$.

4/ R transitive $\Leftrightarrow \forall x, y \in E,\ \left.\begin{array}{l} x R y \\ \text{et } y R z \end{array}\right\} \Rightarrow x R z$.

Relation d'équivalence :

E. un ensemble et R relation binaire.

R est une relation d'équivalence $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R \text{ réflexive.} \\ \text{et } R \text{ symétrique.} \\ \text{et } R \text{ transitive.} \end{array}\right.$

Relation d'ordre

E un ensemble. et R. relation binaire.

R est une relation d'ordre $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R \text{ réflexive.} \\ \text{et } R \text{ antisymétrique.} \\ \text{et } R \text{ transitive.} \end{array}\right.$