مراقبة قصيرة في الميكانيك

- التمرين 01: (06 نقاط)

في معلم ديكارتي نعرف الشعاعين : $\vec{V_1} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ و $\vec{V_2} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

1- أحسب الجداء السلمي : $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ ، ثم استنتج الزاوية $(\vec{V_1},\vec{V_2})$

2- أحسب الجداء الشعاعي : $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

3- أستنتج دون حساب قيمة الجدائين : $(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}).\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}.(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})$

- التمرين 02: (14 نقطة)

نقطة مادية M تتحرك في المستوي (Oxy) ، تملك المعادلتين الوسيطيتين:

$$x(t) = a.Cos(\omega t) + c \quad \text{و} \quad y(t) = b.Sin(\omega t) + d$$

حيث a , b , c , d , ω ثوابت موجبة

1- أستخرج معادلة المسار وبين طبيعته، ثم أرسمه في معلم ديكارتي، حدد نقطة بداية الحركة و اتجاهها
2- عرف شعاع الموقع، ثم أحسب عبارة شعاع السرعة و استنتج طويلتها
3- أحسب عبارة شعاع التسارع و استنتج طويلته
4- أحسب كل من قيمة التسارع المماسي و التسارع ألناظمي

1

حل مراقبة الميكانيك

التمرين الأول :-

- حساب $\vec{V_1}.\vec{V_2}$:

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = -11$$ (1) (OK)

* حساب الزاوية $(\vec{V_1},\vec{V_2})$:

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|\,\|\vec{V_2}\|\cos(\vec{V_1},\vec{V_2}) \Leftarrow \cos(\vec{V_1},\vec{V_2}) = \frac{\vec{V_1}.\vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\|.\|\vec{V_2}\|} = \frac{-11}{\sqrt{29}.\sqrt{14}}$$ (1)

$$(\vec{V_1},\vec{V_2}) = 236,9°$$ (0,5)

- حساب $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$:

$$\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 4 & 3 & -2 & 4 & 3\\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix} = 11\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$$ (1)

- إلجداء المختلط دوري لذلك :

$$(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}).\vec{V_1} = (\vec{V_1}\wedge\vec{V_1}).\vec{V_2} = \vec{0}.\vec{V_2} = 0$$ (OK)

$$\vec{V_2}.(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = (\vec{V_2}\wedge\vec{V_2}).\vec{V_1} = \vec{0}.\vec{V_1} = 0$$ (0,5)

التمرين الثاني :-

1- معادلة المسار :

$$\left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-d}{b}\right)^2 = 1$$ (1)

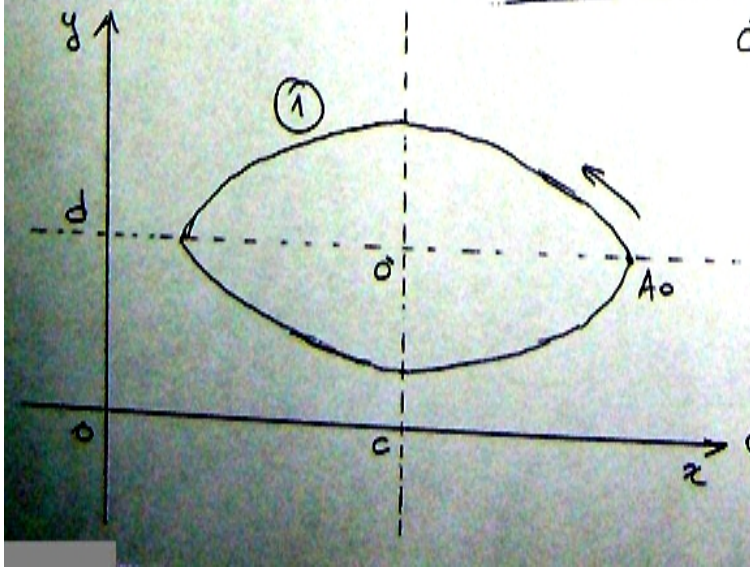
قطع ناقص مركزه $O(c,d)$ (OK) (0,5)

تبدأ الحركة عند $t=0$ ونقطة البداية هي $A_0(a+c,d)$ (1)

$\cos\omega t$: دالة متناقصة

$\sin\omega t$: دالة متزايدة

ومنه إتجاه الحركة محدد بالسهم على الرسم (1)



2- شعاع السرعة :- نكتب شعاع الموقع : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ①

وشعاع السرعة : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -a\omega \sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$ ①

طويلة السرعة : $\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2\omega^2\sin^2\omega t + b^2\omega^2\cos^2\omega t} = \omega\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\omega t + b^2}$ ①

3- شعاع التسارع : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -a\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$ ①

طويلة التسارع : $\|\vec{\gamma}\| = \omega^2\sqrt{a^2\cos^2\omega t + b^2\sin^2\omega t} = \omega^2\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2\omega t + b^2}$ ①

4- * التسارع المماسي :

$\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$ (0,5)

$\|\vec{\gamma}_T\| = \frac{\omega^2(a^2-b^2)\sin\omega t\cos\omega t}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\omega t + b^2}}$ ① + (0,5)

* التسارع الناظمي :

$\|\vec{\gamma}_N\|^2 = \|\vec{\gamma}\|^2 - \|\vec{\gamma}_T\|^2 = \frac{a^2b^2\omega^4}{(a^2-b^2)\sin^2\omega t + b^2}$ (0,5) ①

$\|\vec{\gamma}_N\| = \frac{ab\omega^2}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2\omega t + b^2}}$ (0,5)