جامعة قسنطينة السنة الجامعية 2008/2007

مراقبة قصيرة في الميكانيك

- التمرين 01 : (05 نقاط)

في معلم متعامد و متجانس $(O , \vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$, نعرف الشعاعين :

$\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

1- أحسب الجداء السلمي : $\vec{V}_1.\vec{V}_2$

2- أحسب الجداء الشعاعي : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

3- أحسب الزاوية : $(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$

4- أستنتج دون حساب قيمة الجدائين : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2).\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$

- التمرين 02 : (05 نقاط)

لتكن الدالة الشعاعية تابعة للزمن t من الشكل : $\vec{V}(t) = Vx(t)\ \vec{i} + Vy(t)\ \vec{j} + Vz(t)\ \vec{k}$

1- بين في الحالة العامة أن : $d||\vec{V}||/dt \neq ||d\vec{V}/dt||$ ، متى نحصل على المساواة

2- بين كذلك أن المساواة : $\vec{V}.d\vec{V}/dt = ||\vec{V}||.d||\vec{V}||/dt$ صحيحة دائما

3- إذا كانت $||\vec{V}|| = Cte$ بين أن $d\vec{V}(t)/dt \perp \vec{V}(t)$

4- إذا كانت عبارة الدالة من الشكل : $\vec{V}(t) = (4t)\ \vec{i} - (3t^2)\ \vec{j} + (2t^2 + 4t)\ \vec{k}$

أ- أحسب : $d\vec{V}(t)/dt$ و $d^2\vec{V}(t)/dt^2$

ب- أحسب : $||d\vec{V}/dt||$ و $d||\vec{V}||/dt$ ، ماذا تلاحظ

- التمرين 03 : (10 نقاط)

تتحرك نقطة مادية **M** على مسار مستوي وفق المعادلة الزمنية : $\vec{\gamma} = 4\ \vec{i}$

حيث في اللحظة الإبتدائية كان لدينا :

$\mathbf{V_x(0) = -8m/S}$ ، $\mathbf{V_y(0) = 2m/S}$ ، $\mathbf{x(0) = 2m}$ ، $\mathbf{y(0) = 6m}$.

1- أستخرج عبارة السرعة و طويلتها عند اللحظة **t** .

2- أستخرج موقع النقطة **M(x,y)** عند نفس اللحظة **t** .

3- أستخرج معادلة المسار و مثله في المعلم **Oxy** ، حدد نقطة البداية و إتجاه الحركة و طبيعة هذا المسار

4- مثل شعاعي السرعة و التسارع عند الأزمنة : **t = 0S** و **t = 2S** .

السنة الأولى LMD (1) مقياس M.P.

تصحيح مراقبة الميكانيك

- التمرين 01 :-

1) $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} = -16$ (1)

2) $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -3\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k}$ (1)

3) (0,5) $\cos(\vec{V_1},\vec{V_2}) = \dfrac{\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}}{\|\vec{V_1}\|\cdot\|\vec{V_2}\|} = \dfrac{-16}{\sqrt{29}\times\sqrt{9}}$

(0,5) $|\sin(\vec{V_1},\vec{V_2})| = \dfrac{\|\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\|}{\|\vec{V_1}\|\cdot\|\vec{V_2}\|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}\times\sqrt{9}}$

$(\vec{V_1},\vec{V_2}) = 187{,}95°$ (0,5)

4) $\vec{V_1} \perp (\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) \Rightarrow (\vec{V_1}\wedge\vec{V_2})\cdot\vec{V_1} = 0$ (0,5)

$\vec{V_2} \perp (\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) \Rightarrow \vec{V_2}\cdot(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}) = 0$ (0,5)

- التمرين 02 :-

1) $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{dV_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dV_y}{dt}\vec{j} + \dfrac{dV_z}{dt}\vec{k}$.

(0,25) $\left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\dfrac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dV_z}{dt}\right)^2}$, $\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ (0,25)

$\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\left[V_x\dfrac{dV_x}{dt} + V_y\dfrac{dV_y}{dt} + V_z\dfrac{dV_z}{dt}\right]}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \dfrac{\vec{V}\cdot\dfrac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|} = \left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\|\cdot\cos\left(\vec{V},\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right)$ (0,25)

في الحالة العامة :

$\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} \neq \left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\| \Leftarrow \cos\left(\vec{V},\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right) \neq 1 \Leftarrow \dfrac{d\vec{V}}{dt} \not\parallel \vec{V}$ (0,25)

2

-(2 0,5 $\vec{V}\cdot\vec{V} = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot\cos(\vec{V},\vec{V}) = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{V}\|$

بالإشتقاق: $\dfrac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V} + \vec{V}\cdot\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}\cdot\|\vec{V}\| + \|\vec{V}\|\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}$

$\Rightarrow \quad 2\vec{V}\cdot\dfrac{d\vec{V}}{dt} = 2\|\vec{V}\|\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} \Rightarrow \vec{V}\cdot\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \|\vec{V}\|\cdot\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt}$ 0,5

-(3 $\|\vec{V}\| = ct \Rightarrow \|\vec{V}\|^2 = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{V}\| = \vec{V}\cdot\vec{V} = ct^2$ 0,25

بالإشتقاق: $\left(\dfrac{d\,\vec{V}\cdot\vec{V}}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{d\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} \perp \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ 0,25 0,5

-(4 أ- $\vec{V} = \begin{pmatrix} 4t \\ -3t^2 \\ 2t^2+4t \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6t \\ 4t+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{d^2\vec{V}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ 0,5 0,5

ب-

$\left\|\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{16 + 36t^2 + (4t+4)^2} = \sqrt{52t^2 + 32t + 32}$

$= 2\sqrt{13t^2 + 8t + 8}$ 0,5

$\|\vec{V}\| = \sqrt{(4t)^2 + (-3t^2)^2 + (2t^2+4t)^2} = \sqrt{16t^2 + 9t^4 + 4t^4 + 16t^3 + 16t^2}$

$= \sqrt{13t^4 + 16t^3 + 32t^2}$

$\dfrac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{52t^3 + 48t^2 + 64t}{\sqrt{13t^4 + 16t^3 + 32t^2}}$ 0,5

القيمتان مختلفتان

(3)

- التمرين 03 :-

$$\vec{\gamma}=4\vec{i} \Rightarrow \vec{\gamma}\begin{pmatrix}\gamma_x=4\\ \gamma_y=0\end{pmatrix}$$

1)-

(0,5) $V_x=\int \gamma_x\,dt + V_{x_0} = 4t-8$

$\Rightarrow \vec{V}\begin{pmatrix}4t-8\\ 2\end{pmatrix}$ (0,5)

(0,5) $V_y=\int \gamma_y\,dt + V_{y_0} = 0.t+2$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(4t-8)^2+4} = 2\sqrt{4t^2-16t+17}$$ (0,5)

2)-

(0,5) $x=\int V_x\,dt + x_0 = 2t^2-8t+2$, $t=0$, $x(0)=2$

(1)

(0,5) $y=\int V_y\,dt + y_0 = 2t+6$ $y(0)=6$

3)- معادلة المسار :-

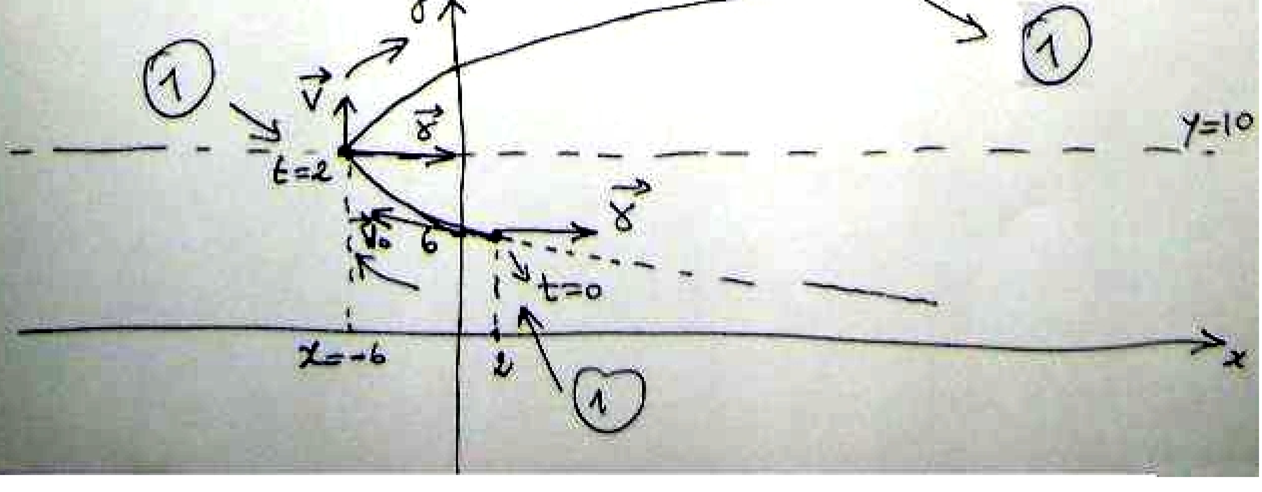
$$t=\left(\frac{y-6}{2}\right)$$

$$x = 2\left(\frac{y-6}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{y-6}{2}\right)+2$$ (1)

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}y^2-10y+44$$

أو

$$(x+6)=\frac{1}{2}(y-10)^2$$ (1)



4

المسار هو قطع مكافئ محوره موازي لـ ox ، يمر من النقطة $(-6,10)$
مقعر نحو $x>0$

1 $t=0$ ، $x(0)=2$ ، $y(0)=6$ نقطة بداية الحركة
$t=2$ $x(2)=-6$ ، $y(2)=10$ ذروة القطع المكافئ