

Écoulement sur un cylindre et sur une sphère

L'écoulement sur un cylindre et sur une sphère est d'égale importance que celui sur une plaque plane. Néanmoins, la forme géométrique de la sphère et du cylindre rend le comportement de l'écoulement différent, en particulier le comportement de la couche limite. En effet, pour ce cas on constate que le gradient de pression présente trois formes de variation: à partir du point de stagnation (Figure 1) le gradient de pression décroît jusqu'à une position donnée où il s'annule. Au delà, il devient positif et on assiste à une séparation de la couche limite. Pour le cas d'une plaque plane, le gradient de pression est négatif et la séparation de l'écoulement ne peut pas avoir lieu. D'une manière générale, l'écoulement sur des cylindres et des sphères peut avoir une couche limite laminaire suivie d'une couche limite turbulente.

- L'écoulement laminaire est très faible par rapport au gradient de pression défavorable de sorte que la séparation se produit à un angle $\theta = 80^\circ$ et de ce fait, provoque de larges sillages comme le montre la figure 2a.

- Par contre, l'écoulement turbulent est plus résistant au gradient de pression, entraînant ainsi, le déplacement de la séparation de la couche limite à un angle $\theta = 120^\circ$ et provoque des sillages étroits comme le montre la figure 2b.

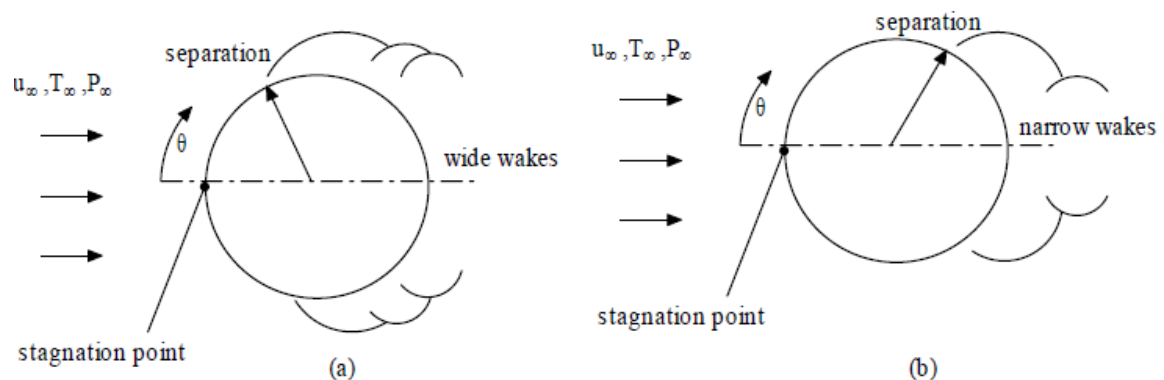
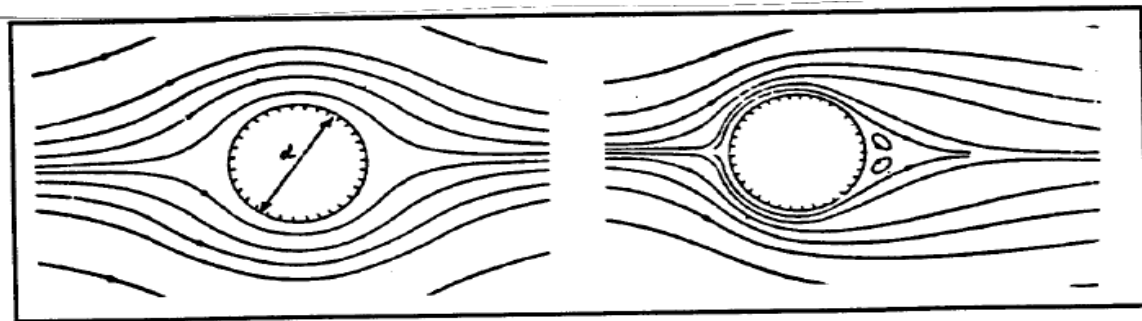


Figure 2 : Couche limite laminaire (a) et turbulent (b)

L'écoulement sur une sphère et un cylindre dépend fortement du nombre de Reynolds et présente différents aspects en fonction de la valeur de ce dernier. Sur la figure 3, ci-dessous, on présente les différents comportements d'un écoulement autour d'un cylindre pour différentes valeurs de Reynolds.

1. $Re \ll 1$ (cas rare) : écoulement purement visqueux symétrique (figure 3 a)
2. Lorsque Re augmente mais reste inférieur à 40, on constate la présence de 2 tourbillons attachés derrière le cylindre (Figure 3 b).
3. Lorsque Re augmente d'avantage, la couche limite qui se développe sur la surface du cylindre à partir du point d'arrêt (ou point de stagnation en $\theta = 0$) devient turbulente et décolle à un angle θ égal à:

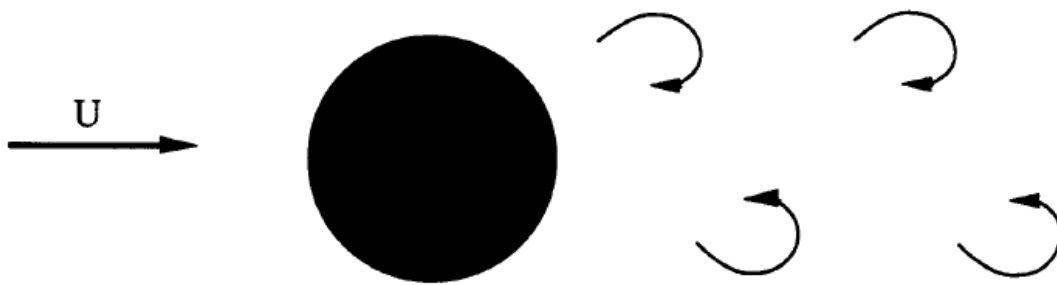
- 80° pour $Re < 3.10^5$ (figure 3c à gauche)
- 120° pour $Re > 3.10^5$ (figure 3c à droite)



$Re \ll 1$

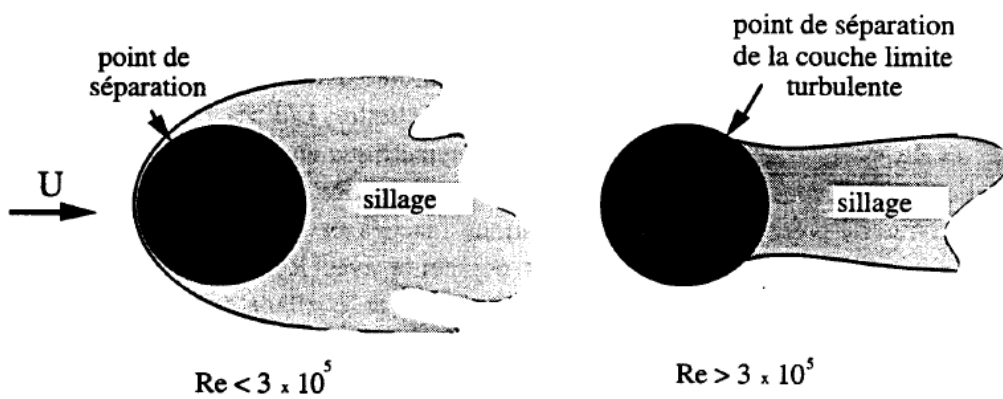
$Re = 10$

(a)



$Re > 40$: Rue de tourbillons de Von Karman

(b)



$Re < 3 \times 10^5$

$Re > 3 \times 10^5$

(c)

Figure 3: Écoulement autour d'un cylindre

Notons que dans ce cas, les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie sont exprimées en coordonnées cylindrique (pour le cas du cylindre) et en coordonnées sphériques (pour le cas de la sphère)

Comme pour le cas d'une plaque plane, l'expression du flux de chaleur échangé est donnée par la loi de Newton, $f = h \times S \times \Delta T$ où h est le coefficient d'échange par convection entre la paroi externe du cylindre ou de la sphère et l'écoulement fluide.

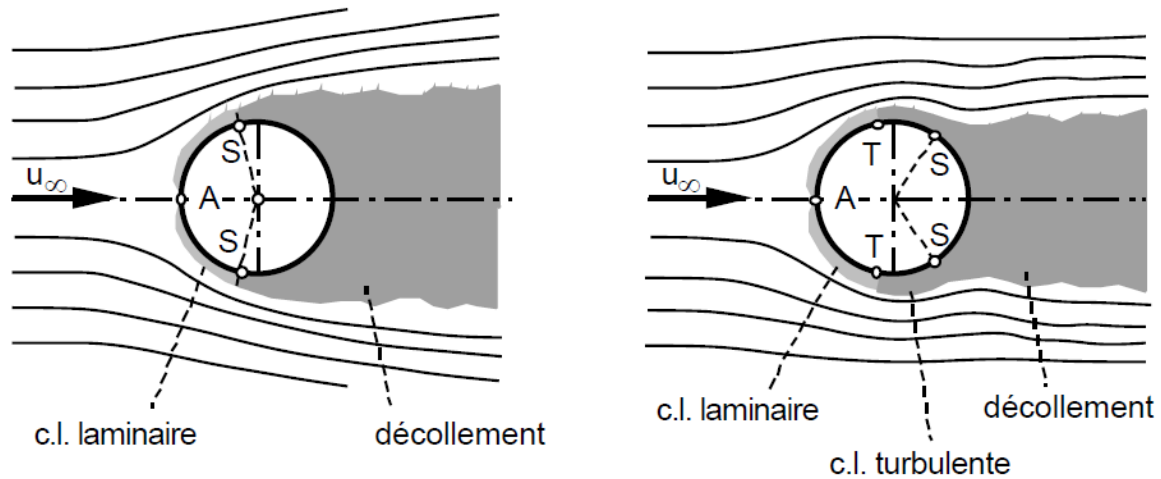


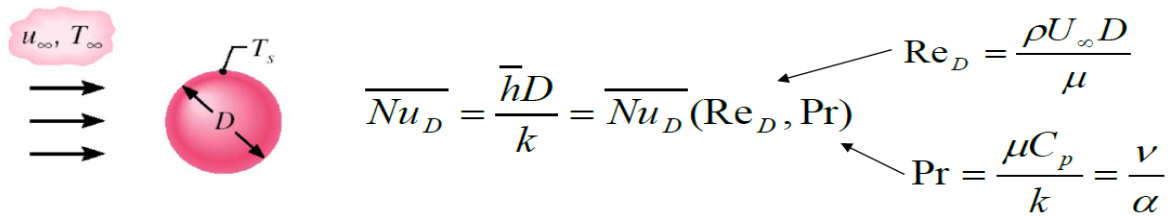
Figure 4: Couches limites laminaires et turbulentes pour un écoulement autour du cylindre.

A: point de stagnation, S: point de séparation de la couche limite, T: point de transition de l'écoulement L-T

Comme l'équation de conservation de l'énergie dans les deux cas est couplée avec les équations de Navier-Stokes, donc l'obtention du champ de température dans l'écoulement fluide nécessite, dans un premier temps, la résolution des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement pour obtenir le champ de vitesse. Une fois le champ de vitesse est obtenu, nous procédons à la résolution de l'équation de conservation de l'énergie pour obtenir le champ de température et par la suite la détermination du coefficient d'échange de chaleur. Finalement, on est en mesure de déterminer le flux de chaleur échangé entre l'écoulement fluide et le cylindre ou la sphère.

Malheureusement, la résolution de l'ensemble de ces équations est très délicate et sort du cadre de ce module. Pour cela, nous allons utiliser uniquement des corrélations qui donnent directement la valeur du nombre de Nusselt dont l'expression est de la forme:

• Cylindres et sphères de diamètre D :



Corrélations utilisées pour la détermination du nombre de Nusselt

Une fois le nombre de Nusselt est calculé, le coefficient d'échange moyen est facilement déduit en utilisant l'expression $\bar{h} = \overline{Nu} * k/D$ où k et D sont la conductivité thermique et le diamètre du cylindre ou de la sphère. Finalement, le flux de chaleur est obtenu grâce à l'expression $\phi = h.s.\Delta T$ où $\Delta T = T_p - T_\infty$.

Remarques:

1. Ces corrélations sont généralement valables dans un intervalle de valeurs de Reynolds et Prandtl, comme nous allons le voir.
2. Le symbole k au lieu de λ est souvent utilisé pour la conductivité thermique.

CORRÉLATIONS EN CONVECTION FORCÉE EXTERNE POUR LE CALCUL DU NOMBRE DE NUSSELT

a) Écoulement autour d'un cylindres

a-1) cas d'un écoulement d'un gaz

$$Nu = C \times Re^m \times Pr^{0.33} \quad (1)$$

a-2) cas d'un écoulement liquide

$$Nu = 1,11 \times C \times Re^m \times Pr^{0.33} \quad (2)$$

Les valeurs de C et m pour différentes valeurs de Re sont reportées dans le tableau ci-dessous

Re	C	m
0,4-4	0,989	0,330
4-40	0,911	0,385
40-4000	0,683	0,466
4000-40 000	0,193	0,618
40 000- 400 0000	0,027	0,805

Remarque: D'une manière générale, les deux corrélations ci-dessus sont valable pour $Pr > 0,7$.

On peut aussi utiliser la corrélation de Churchill and Bernstein, valable pour $Pr > 0,2$.

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} = 0.3 + \frac{0.62Re^{1/2}Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad (3)$$

b) Écoulement autour d'une sphère

$$Nu = 2 + \left(0,4 \times Re_D^{0,5} + 0,06 \times Re_D^{0,66}\right) \times Pr^{0,4} \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right) \quad (4)$$



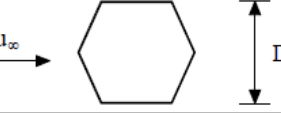
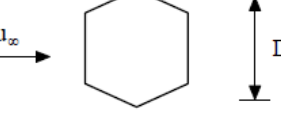

avec:

$$\left[\begin{array}{l} 0,71 < Pr < 380 \\ 3,5 < Re_D < 7,6 \cdot 10^4 \\ 1,0 < \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_p}\right) < 3,2 \end{array} \right]$$

Toutes les propriétés sont déterminées à la température T_∞ sauf la viscosité dynamique μ_p du fluide qui se calcule à la température T_p . Le symbole "p" réfère à la température de la paroi et ∞ à la condition loin de la paroi.

Remarque 1: Pour calculer les nombres de Reynolds et de Prandtl, les viscosités (cinématique ou dynamique), la conductivité et la masse volumique sont prises à partir des tables, qu'on trouve dans les références bibliographiques, à la température du film T_f définie par : $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$

Remarque 2: Les corrélations (1) et (2) peuvent être utilisées pour d'autres géométries. Le tableau ci-dessous reporte les valeurs de "m" et de "C" pour chaque géométrie.

Geometry	Re_D	C	m
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
	$5 \times 10^3 - 1.95 \times 10^4$ $1.95 \times 10^4 - 10^5$	0.16 0.0385	0.638 0.782
	$4 \times 10^3 - 1.5 \times 10^4$	0.228	0.731

ÉCOULEMENTS INTERNES

L'objectif principal de l'étude du transfert de chaleur par convection forcée à l'intérieur d'une conduite est de déterminer le flux de chaleur échangé entre le fluide et la paroi, comme pour le cas des écoulements externes. Néanmoins, on note certains caractères particuliers des écoulements internes par rapport à un écoulement externe, à savoir:

1. L'absence des conditions aux limites à l' ∞ , contrairement au cas des écoulements externes;
2. L'influence des parois se manifeste dans toutes les directions, sauf éventuellement aux sections d'entrée et de sortie du fluide;
3. L'expression du nombre de Reynolds est indépendante des conditions de l'écoulement. La seule différence réside dans la longueur caractéristique, L_c , et la vitesse caractéristique, U_c , et on écrit: $Re = U_c \times L_c / \nu$;
4. La vitesse caractéristique, U_c , est déterminé en utilisant le débit volumique $Q_v = \int u \, ds$, et on introduit une vitesse débitante $V_d = Q_v / S$ où S est la section de passage de l'écoulement (section droite). Cette vitesse débitante V_d est choisie comme vitesse caractéristique. La longueur caractéristique est prise égale au diamètre hydraulique de la conduite noté D_H où

$D_H = (2 \times \text{la section de passage}) / \text{le périmètre mouillé}$.

En appliquant cette définition, on trouve pour un cylindre $D_H = D$ diamètre du cylindre, alors que pour une conduite rectangulaire $D_H = 2 \times$ son épaisseur.

Comme pour les écoulements externes, on distingue différents régime d'écoulement, en particulier le régime laminaire et le régime turbulent. On distingue aussi un nombre de Reynolds critique qui caractérise la transition laminaire-turbulent:

- pour une section rectangulaire, $Re_c \cong 2500$
- pour une section circulaire, $Re_c \cong 2000$

Par contre, dans un écoulement interne, on note l'absence de décollement de la couche limite constaté pour un écoulement autour d'une sphère et d'un cylindre.

Comme pour les écoulements externes, le phénomène de couche limite dynamique et thermique se manifeste dès l'entrée de la conduite au voisinage de la paroi. Comme la paroi enveloppe complètement le fluide dans le sens perpendiculaire à l'écoulement, la couche limite vient interférer avec elle même au niveau de l'axe de la conduite et donne naissance à une nouvelle structure de l'écoulement appelé: Écoulement établi, comme on le voit sur les deux figures ci-dessous.

Sur cette figure, on distingue la zone d'entrée dynamique et la zone d'entrée thermique à l'intérieur desquelles l'épaisseur des deux couches limites varie. Au delà de cette zone, l'écoulement est développé.

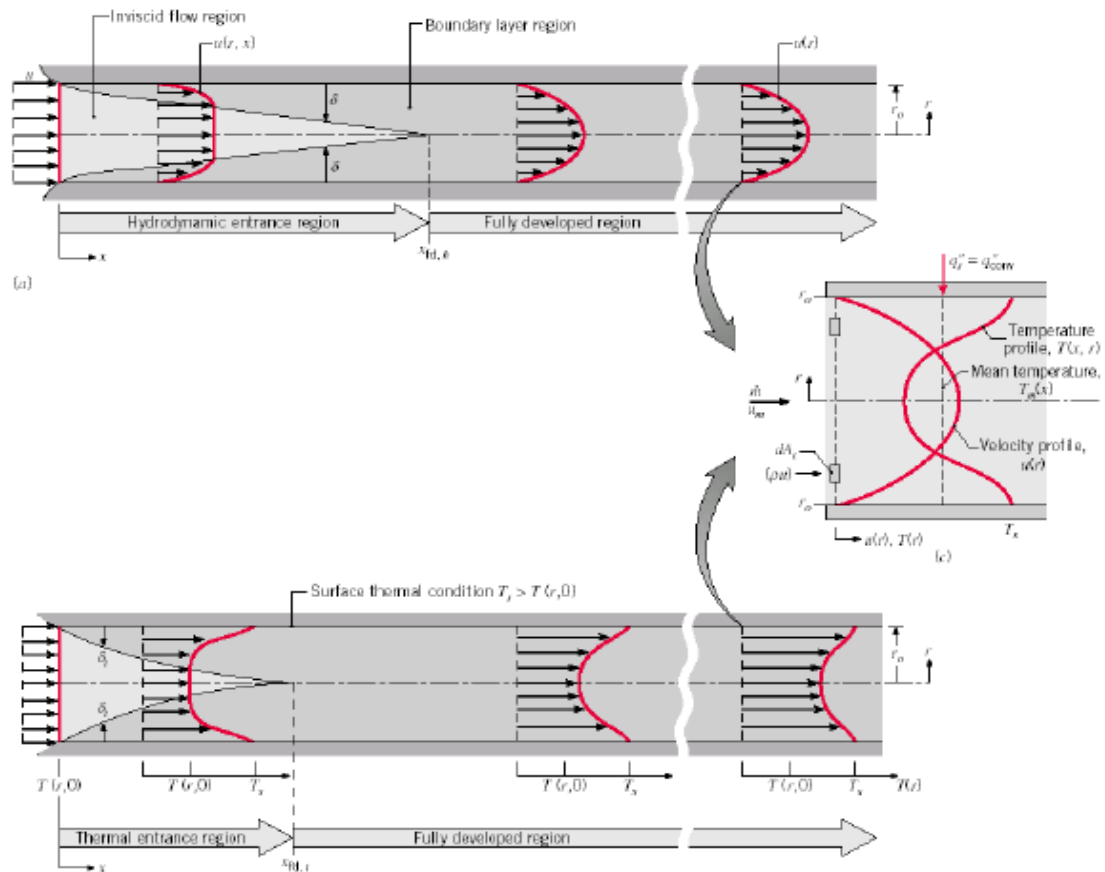


Figure 5: Développement de la couche limite: dynamique en haut et thermique en bas de la figure

La longueur des ces deux zones en régime laminaire dans le cas d'une conduite cylindrique est donnée par les formules suivantes:

$$L_{h, \text{laminar}} \approx 0.05 \text{ Re } D$$

$$L_{t, \text{laminar}} \approx 0.05 \text{ Re Pr } D = \text{Pr } L_{h, \text{laminar}}$$

Remarque: on distingue l'écoulement complètement établi ou établi tout court lorsqu'on est en dehors des deux couches limites thermique et dynamique. Lorsqu'on est en dehors de la couche limite thermique et qu'on est encore dans la zone de développement de la couche limite dynamique, on parle d'un développement thermique uniquement. Dans le cas contraire, on parle d'un développement dynamique uniquement. Le paramètre qui crée ces trois situations est évidemment le nombre de Prandtl, de la même manière que pour un écoulement sur une plaque plane que nous déjà traiter.

Équations de quantité de mouvement dans la zone dynamiquement établi

Suivant "ox" (direction de l'écoulement)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Dans la zone établie, la composante de vitesse "u" ne dépend pas de la variable "x", donc sa dérivée par rapport à x est nulle, c'est-à-dire que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ et $v = 0$. Donc, l'équation (1) se réduit à: $0 =$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ ou bien:}$$

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2)$$

L'existence d'une solution en tout point de l'écoulement de l'équation (2) exige que

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \text{Constante}$$

Suivant la direction perpendiculaire à l'écoulement, c'est - à-dire suivant "y", on a:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

Comme $v = 0$, l'équation (3) se réduit à: $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, donc la pression dans la zone établie ne dépend pas de "y".

Remarque: l'intégration de l'équation (2) par rapport à "y" permet d'obtenir le profil de vitesse dans une géométrie rectangulaire. **A faire comme devoir ????**

On procédons de la même manière, on peut obtenir l'équation qui nous permet de calculer le profil de vitesse dans la zone établie pour le cas d'une conduite cylindrique, en utilisant toujours les conditions relatives au cas rectangulaire, à savoir composante verticale (suivant "r") de vitesse nulle ($v = 0$) et dérivée par rapport à "x" de la composante longitudinale "u" nulle.

En utilisant les équations de conservation de quantité de mouvement suivant "r" et suivant "x" en utilisant les deux conditions précédentes, on arrive aux résultats suivants:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = 0, \text{ suivant "r"} \quad (4)$$

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (5)$$

L'existence d'une solution en tout point de l'écoulement de l'équation (5) exige que:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \text{constante} = A \quad (6)$$

De même, l'intégration de l'équation (6) par rapport à "r" donne le profil de vitesse dans la zone établie pour un cylindre: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = A$ donc $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = A$ ou $A = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$

-la première intégrale donne: $d\left(r \frac{du}{dr}\right) = Cr dr$ (7) on passe à la dérivée totale car "u" ne dépend que de "r".

Le résultat de l'intégrale de (7) est : $\frac{du}{dr} = A \frac{r}{2} + C1$ où C1 est une constante d'intégration.

Une deuxième intégration donne $u = A \frac{r^2}{4} + C1Ln(r) + C2$. En remplaçant la valeur de A, on trouve: $u = \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + C1Ln(r) + C2$. Pour déterminer les constante C1 et C2, on utilise deux conditions aux limites: 1) sur l'axe du cylindre ($r = 0$) et à la paroi ($r = R$) où R est le rayon du cylindre.

Donc, en $r = 0$, $u(0) = \infty$ car $Ln(0)$ est infini. Comme la vitesse est finie, donc C1 doit être égale à zéro. En $r = R$, $u(R) = 0$ (condition de non glissement à la paroi), donc $C2 = -\frac{R^2}{4} \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$ est donc

$$\text{finalement, } u(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} (r^2 - R^2) = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Le profil obtenu est parabolique et la vitesse est maximale en $r = 0$. Donc, on peut ce profil sous la forme: $u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ où $u_{max} = -\frac{R^2}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial x} > 0$ car le gradient de pression est négative.

Développement thermique

Le but de l'étude est de pouvoir déterminer le flux de chaleur échangé entre la paroi cylindrique et l'écoulement fluide interne. Pour ce faire, on utilise comme pour les écoulements externes la loi de Newton qui s'écrit d'une manière générale $\varphi = h.s(T_p - T_{ref})$. Ce dernier ne peut être obtenu sans l'obtention du coefficient d'échange h. De son coté, la connaissance de "h" est conditionnée par la connaissance du champ de température à l'intérieur de la conduite. La connaissance du champ de température est obtenue par la résolution des équations de conservations de quantité de mouvement et de l'énergie qui sort du cadre de ce cours.

Dans la loi de Newton apparait la température de référence T_{ref} qui représente T_∞ dans le cas d'un écoulement externe, alors que dans le cas d'un écoulement interne on n'a pas de condition à l' ∞ , donc cette température **est à déterminé ?** Dans le cas d'un écoulement interne, la température de référence T_{ref} dans la loi de Newton est remplacée par la température moyenne du fluide et on écrit la loi de Newton $\varphi = h.s(T_p - T_{moyenne\ fluide})$.

Pour le développement thermique dans un écoulement interne, nous constatons que dès l'entrée du fluide à l'intérieure de la conduite, une couche limite thermique commence à se développer (figure 5 en bas) de la même manière que la couche limite cinématique. L'épaisseur de cette couche limite croit d'une manière continue jusqu'à ce qu'elle remplit toute l'épaisseur du conduit. On distingue deux zones; la région du conduit à partir de l'entrée jusqu'à la distance "x" où l'épaisseur de la couche limite atteint le centre ($r = 0$) est appelée " zone d'entrée thermique" et la zone située après jusqu'à la sortie est appelée "zone thermiquement établie ou thermiquement développée". Dans la

première zone la température est fonction de "x" et de "r", alors que dans la deuxième la température est fonction uniquement de "r".

CALCUL DU FLUX DE CHALEUR À L'INTERFACE PAROI-FLUIDE

Connaissant le champ de température, on peut déterminer le flux de chaleur à l'interface paroi-fluide

moyennant l'expression suivante: $\varphi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}_{r=R} = h \cdot (T_P - T_{moyenne\ fluide})$

$$\text{d'où } h = \frac{-\lambda \frac{\partial T}{\partial r}_{r=R}}{(T_P - T_{moyenne\ fluide})}$$

L'expression de la température moyenne du fluide est obtenue en utilisant l'intégrale suivant:

$$T_{moyenne\ fluide} = \frac{\int_0^R T(x,r) \cdot u(r) \cdot 2\pi r dr}{\int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr} \text{ et } T_P = T(x, r = R)$$

On constate donc que pour calculer le flux de chaleur à l'interface (en $r = R$) il faut connaître le champ de température qui passe obligatoirement par la résolution des équations de conservations de quantité de mouvement et de l'énergie qui sort du cadre de ce cours, comme nous l'avons précisé plus haut.

Comme pour le cas des écoulements externes, le calcul de "h" passe le calcul du nombre de Nusselt en utilisant des corrélations. De même pour les écoulements internes, nous allons utiliser des corrélations pour déterminer le nombre de Nusselt, par la suite on calcule le coefficient d'échange et finalement on calcule le flux de chaleur échangé en utilisant la loi de Newton.

Corrélation permettant le calcul du nombre de Nusselt

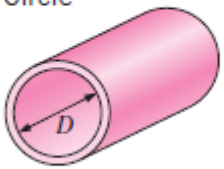
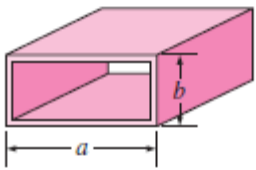
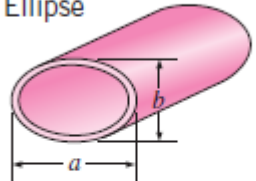
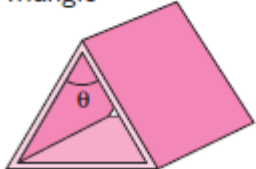
I-Régime laminaire

Pour les corrélations dans les écoulements internes, on distingue deux zones: la zone d'entrée et la zone établie.

1- dans la zone établie: dans cette zone le nombre de Nusselt moyen est constant. Il ne dépend que de la condition aux limites thermiques imposées sur la surface externe de la conduite, à savoir température imposée ou flux de chaleur imposé.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de Nu pour deux conditions aux limites "température imposée" et "flux de chaleur imposé" et pour différentes géométries

Nusselt number for fully developed laminar flow in tubes of various cross sections ($D_h = 4A_c/p$, $Re = \rho_m D_h/v$, and $Nu = hD_h/k$)

Tube Geometry	a/b or θ°	Nusselt Number	
		$T_s = \text{Const.}$	$\dot{q}_s = \text{Const.}$
Circle 	—	3.66	4.36
Rectangle 	a/b 1 2 3 4 6 8 ∞	2.98 3.39 3.96 4.44 5.14 5.60 7.54	3.61 4.12 4.79 5.33 6.05 6.49 8.24
Ellipse 	a/b 1 2 4 8 16	3.66 3.74 3.79 3.72 3.65	4.36 4.56 4.88 5.09 5.18
Triangle 	θ 10° 30° 60° 90° 120°	1.61 2.26 2.47 2.34 2.00	2.45 2.91 3.11 2.98 2.68

2- Dans la zone d'entrée:

2. 1. Conduite cylindrique de longueur L soumise à une condition de température constante et uniforme:

$$\text{Corrélation (Edwards et al., 1979)} \quad Nu = 3.66 + \frac{0.065 \cdot \left(\frac{D}{L}\right) \cdot Re \cdot Pr}{1 + 0.4 \cdot \left[\left(\frac{D}{L}\right) \cdot Re \cdot Pr\right]^{2/3}}$$

Lorsque la différence de température entre la paroi et le fluide est importante, la variation de la viscosité en fonction de la température est non négligeable et la corrélation ci-dessus est remplacée par la corrélation de Sieder and Tate 1936:

$$Nu = 1.86 \times \left(\frac{Re \cdot Pr \cdot D}{L}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_b}{\mu_s}\right)^{0.14}$$

L'indice "b" signifie qu'il faut calculer cette grandeur à la température moyenne du fluide, alors que l'indice "s" signifie qu'il faut la grandeur à la température de la paroi solide.

2. 2. Pour un écoulement entre deux plaques planes parallèles, on utilise la corrélation de (Edwards et al., 1979):

$$Nu = 7.54 + \frac{0.03 \cdot \left(\frac{D_h}{L}\right) \cdot Re \cdot Pr}{1 + 0.016 \times \left[\left(\frac{D_h}{L}\right) Re \cdot Pr\right]^{2/3}}$$

II-Régime turbulent

Corrélation de Colburn $Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{1/3}$ valable pour $\left\{ \begin{array}{l} 0.7 \leq Pr \leq 160 \\ Re > 4000 \end{array} \right\}$

La précision de cette corrélation peut être amélioré en la remplaçant par:

$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^n$ connue sous le nom de *Dittus-Boelter* équation

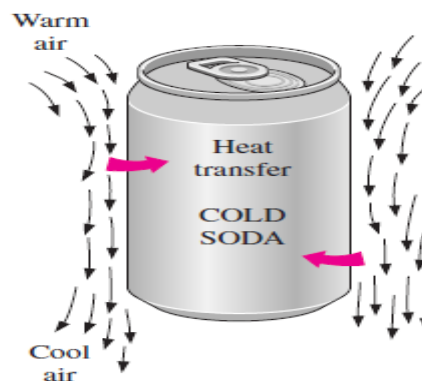
$$\text{où } n = \left\{ \begin{array}{l} 0.4 \text{ pour le cas du chauffage} \\ 0.3 \text{ pour le cas du refroidissement} \end{array} \right\}$$

CONVECTION NATURELLE

Dans le chapitre précédent, nous avons traité le transfert de chaleur par convection forcée externe et interne où nous avons vu que le fluide est forcé de se déplacer sur une surface ou à l'intérieur d'un conduit et ce par un moyen externe tel que une pompe ou un ventilateur. Dans ce chapitre, nous allons considérer le transfert de chaleur par convection naturelle. Dans ce cas, le fluide se met en mouvement d'une façon naturelle, c'est-à-dire sans l'intervention d'un agent externe.

Le coefficient de transfert de chaleur par convection dépend fortement de la vitesse d'écoulement du fluide: lorsqu'on augmente la vitesse du fluide, le coefficient de transfert de chaleur augmente à son tour. Or, les vitesses d'écoulement du fluide en convection naturelle sont faibles comparées à celles de la convection forcée. L'ordre de grandeur de la vitesse en convection naturelle est de 1m/s. Par conséquent, le taux de transfert de chaleur rencontré en convection forcée est plus élevé que celui relatif à la convection naturelle. Cependant, dans beaucoup d'applications, l'échange de chaleur est assuré par convection naturelle car ce mode de transfert de chaleur ne nécessite pas le recours à un moyen externe pour assurer le mouvement du fluide.

On trouve la convection naturelle dans beaucoup de domaines, tels que le refroidissement des composants électroniques, Réfrigérateurs (échange entre le serpentin et le milieu ambiant),



lignes de transport d'énergie, chauffage des locaux, transfert de chaleur entre le corps humain et le milieu ambiant, etc. Le chauffage d'une canette de boisson est un exemple quotidien de la convection naturelle, Figure ci-dessus.

En convection naturelle, le mouvement du fluide résulte exclusivement du champ de température qui crée un gradient de masse volumique au sein du fluide. De ce fait, on peut dire que la masse volumique du fluide est à la fois constante (pour le fluide situé loin de la source de chaleur) et variable (pour le fluide situé tout près de la source de chaleur). En convection naturelle, on considère que les gradients de masse volumique sont dus principalement aux écarts de température qu'aux écarts de pression. Cette hypothèse est connue sous le nom: hypothèses de **Boussinesq**.

Donc, on a $\rho = \rho(T)$ et ρ est une fonction décroissante de la température. En désignant par T_∞ une température caractéristique du fluide et on définit un coefficient liée à l'expansion du fluide sous l'effet de la température noté β est appelé coefficient d'expansion thermique du fluide:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \text{ dont l'unité est } 1/K. \text{ Pour une variation de la température } \Delta T, \text{ on a:}$$

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta T} \right)_P = - \frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T} \text{ d'où } \rho_\infty - \rho = -\rho\beta(T_\infty - T)$$

T_∞, ρ_∞ sont les conditions de références.

Cas particulier d'un gaz parfait $P = \rho RT$ et par dérivation, on obtient l'expression de $\beta = \frac{1}{T}$. **A vérifier.**

ÉQUATIONS DE CONSERVATION EN CONVECTION NATURELLE

Considérons le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle entre une paroi verticale chaude de température T_p et un fluide froid de température $T_\infty < T_p$ comme le montre la figure ci-dessous. Sur cette figure, on remarque en particulier que la vitesse est nulle à la paroi et en dehors de la couche limite, et ce contrairement au cas de la convection forcée ou nous avons vu qu'en dehors de la couche limite la vitesse est égale à U_∞ .

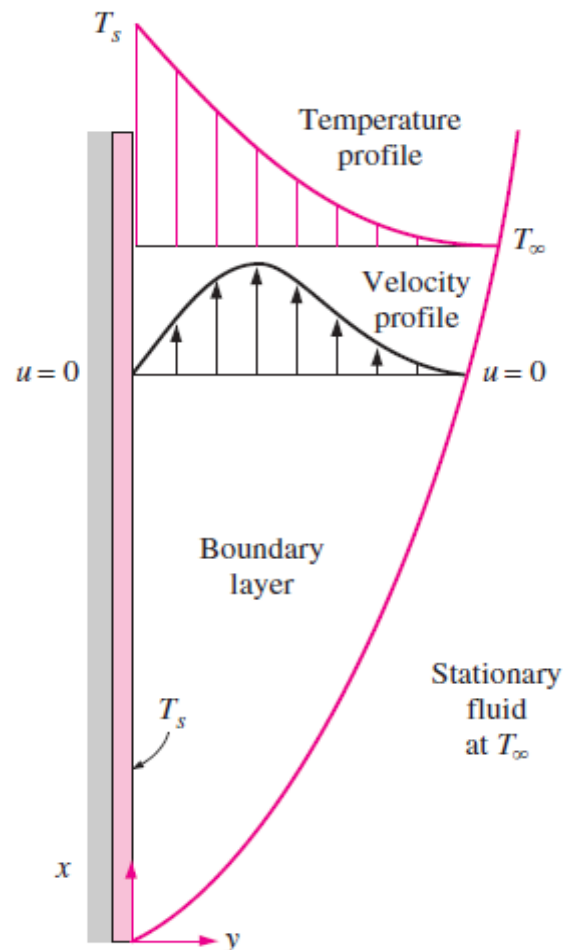
Dans le cas de la convection naturelle, le transfert de chaleur est gouverné par l'équation de continuité et de quantité de mouvement suivant l'axe "x" et l'équation d'énergie, de la même manière que pour le cas de la convection forcée, à l'exception du nouveau terme qu'on rajoute dans l'équation de quantité de mouvement dans la direction de l'écoulement. Ces équations s'écrivent comme suit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1}$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

Notons que ces équations sont obtenues en utilisant les hypothèses de la couche limite déjà vues lors du traitement de la convection forcée sur une plaque plane. La seule différence, comme nous l'avons mentionné plus haut, réside dans le fait que dans ce cas on a un terme en plus dans l'équation de conservation de la quantité suivant l'axe "x" (direction de l'écoulement) qui est le terme de la force de volume ($-\rho g$). Le signe moins est dû au fait que $T_p > T_\infty$ donc l'écoulement se fait vers le haut et l'axe "ox" est choisi dans le sens de l'écoulement (voir figure ci-dessous) et donc le vecteur de pesanteur $\vec{g} \equiv -g\vec{i}$ d'où le signe moins dans l'équation (2).



Profil de vitesse et de température dans un écoulement de convection naturelle ($T_p > T_\infty$)

T_s est T_p dans notre cours qui est la température de la paroi

Dans la zone du fluide au repos (en dehors de la couche limite), on $U = 0$, $P = P_\infty$ et $T = T_\infty$. Par application de la loi de Bernoulli, on a $P_\infty + \rho_\infty g x = C^{te}$ ce qui donne, en dérivant $\frac{\partial P_\infty}{\partial x} + \rho_\infty g = 0$.

Lors de l'application des hypothèses de la couche limite en convection forcée, nous avons vu que $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ c.-à-d. que la pression ne dépend pas de la variable "y". Par conséquent, pour chaque position

$$\text{"x"} \text{ on a } P = P(x) = P_\infty(x) \text{ et donc, } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P_\infty}{\partial x} = -\rho_\infty g \quad (4).$$

En remplaçant l'expression de la dérivée de la pression de l'équation (4) dans l'équation (2), on obtient: $\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rho_\infty g - \rho g$ ou bien $\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\rho_\infty - \rho)g$

Finalement, en remplaçant le terme en bleu par le terme en rouge (voir plus haut la démonstration de cette expression) $\rho_\infty - \rho = -\rho\beta(T_\infty - T)$, on obtient l'expression finale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en convection naturelle qui s'écrit comme suit:

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T_\infty - T) \quad (4)$$

$$\text{En divisant par } \rho \text{ cette équation devient: } (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta (T_\infty - T) \quad (5)$$

Donc l'ensemble des équations de conservation à résoudre dans le cas de la convection naturelle s'écrivent:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

$$(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g \beta (T_\infty - T) \quad (7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (8)$$

Remarque: dans l'équation (7), le terme en bleu représente la résultante de la force d'ascension (قوی الصعود) par unité du volume. C'est cette force qui donne naissance aux courants de convection. Dans le cas où on a $\rho_\infty = \rho$ cette force est nulle et donc il n'y aura pas de mouvement d'ascension du fluide.

A ces équations on rajoute les conditions aux limites:

$$\text{Cas d'une paroi isotherme } \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \quad u = v = 0, T = T_p \\ y \rightarrow \infty \quad u = 0, \quad T = T_\infty \end{array} \right\}$$

MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE ET CRITÈRE DE SIMILITUDE

Pour mettre les équations (6)-(7) et (8) sous forme adimensionnelle, des grandeurs de références doivent être choisies; vitesse de référence, température, etc. Le problème en convection naturelle se

pose au niveau du choix de la vitesse de référence car en convection forcée, il existe un mouvement du fluide de vitesse U_∞ indépendante de la température alors qu'en convection naturelle le mouvement du fluide est engendré par le gradient de température au sein du fluide et l'on pas une vitesse mesurable comme en convection forcée.

Pour palier à ce problème, on cherchera un terme homogène à une vitesse. Comme l'écoulement du fluide, est dû au gradient de température et à la propriété de dilatation du fluide, donc cette vitesse de référence doit contenir ces deux termes.

Les variables adimensionnelles sont choisies en divisant toutes les variables dépendantes et indépendantes par une grandeur adéquate. A cet effet, on définit d'une manière générale, une longueur caractéristique, L_C , une vitesse caractéristique, V_C , et une température caractéristique, θ_C :

$$x^* = \frac{x}{L_C}, y^* = \frac{y}{L_C}, u^* = \frac{u}{V_C}, v^* = \frac{v}{V_C}, T^* = \frac{T-T_\infty}{T_p-T_\infty} = \frac{T-T_\infty}{\theta_C} \quad (9)$$

Dans ce cas, nous avons choisie comme température caractéristique: $\theta_C = T_p - T_\infty$

En remplaçons ces termes dans l'équation de quantité de mouvement (7), on obtient:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{g\beta(T_p-T_\infty)L_C^3}{\nu^2} \frac{T^*}{Re_L^2} \quad (10)$$

Le terme en rouge est sans dimension, il représente le nombre de Grashof. Donc, l'équation ci-dessus devient comme suit:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{Gr \times T^*}{Re_L^2} \quad (11)$$

Remarque: le nombre de Grashof représente un critère de similitude en convection naturelle.

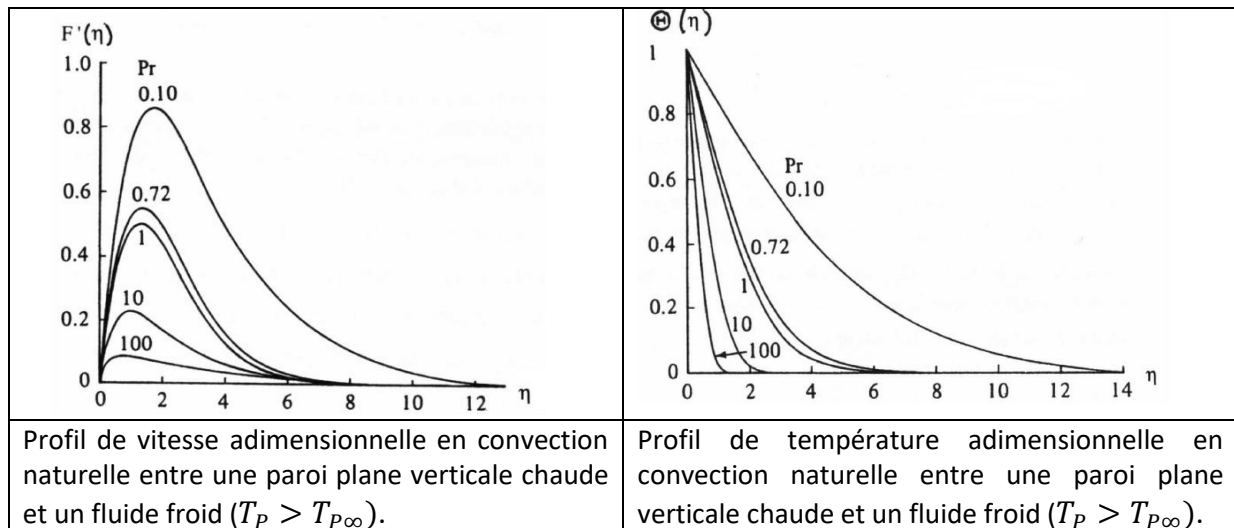
Comme pour le cas de la convection forcée, les équations différentielles à dérivée partielles peuvent être réduites à des équations différentielles ordinaires, dépendants de la seule variable $\eta = \frac{y}{x} Gr^{1/4}$.

Ainsi, les équations de quantité de mouvement (7) et de l'énergie (8) devient comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''' - \frac{1}{2}f'^2 + \frac{3}{4}ff'' + \theta = 0 \\ \theta'' + \frac{3}{4}Prf\theta' = 0 \\ \textbf{Conditions aux limites} \\ \text{1. en } \eta = 0 \\ u = 0 \quad \Rightarrow f'(0) = 0 \\ v = 0 \quad \Rightarrow f(0) = 0 \\ T_p = 0 \quad \Rightarrow \theta(0) = 0 \\ \text{2. } \eta \rightarrow \infty \\ u = 0 \quad \Rightarrow f'(\infty) = 0 \\ T = T_\infty \quad \Rightarrow \theta(\infty) = 0 \end{array} \right.$$

Ce système d'équation n'a pas de solution analytique, par contre sa résolution numérique ne présente pas de difficultés particulières moyennant les conditions aux limites appropriées mentionnées ci-dessus de la même manière que pour le cas de la convection forcée sur une plaque plane.

Ci-dessous, on présente le profil de $f'(\eta)$ et $(\theta(\eta) = T^*)$ pour différentes valeurs du nombre de Prandtl.






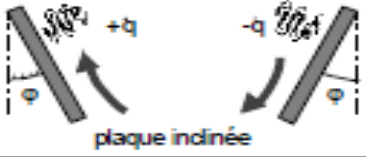


Sur ces deux figures, on constate une faible variation de la vitesse et de la température aux valeurs élevées du nombre de Prandtl.

Pour résoudre les problèmes de convection naturelle on utilise des corrélations (comme pour le cas de la convection forcée) car la résolution des équations de conservations pour chaque cas et chaque géométrie n'est pas facile d'un côté et de l'autre côté sort du cadre de ce programme.

La forme générale donnant le nombre de Nusselt moyen de ces corrélations est comme suit:

$$Nu = \frac{hL_c}{\lambda} = Cte(GrPr)^n = Cte(Ra)^n$$

$$\text{où } Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta(T_P - T_\infty)L_c^3}{\nu^2} Pr \text{ est le nombre de Rayleigh}$$

Géométrie	Équations	Domaine de validité
<p>configuration</p>  <p>plaque verticale</p>	Équation 1	$\forall Ra$
 <p>plaque horizontale</p>	Équation 2 Équation 3	$10^4 < Ra < 10^7$ $10^7 < Ra_L < 10^{11}$
 <p>plaque horizontale</p>	Équation 4	$10^5 < Ra_L < 10^{10}$
 <p>plaque inclinée</p>	Équation 5 Équation 6	$Ra_L > 10^9$ et $\varphi < 60^\circ$ $Ra_L < 10^9$ et $\varphi > 60^\circ$ $g \Rightarrow g \cos \varphi$
 <p>cylindre horizontal</p>	Équation 7	$10^{-5} < Ra_D < 10^{12}$
 <p>sphère</p>	Équation 8	$Ra_D < 10^{11}$ $Pr > 0.7$

Remarques:

- comme pour le cas de la convection forcée, les propriétés physiques sont calculées à la température du film donnée par l'expression: $T_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$.
- En convection forcée, le régime d'écoulement est caractérisé par le nombre de [Reynolds qui représente le rapport des forces d'inertie et des forces de viscosité](#). En convection naturelle, le régime d'écoulement est caractérisé par le nombre de [Grashof qui représente le rapport des forces de flottabilité et des forces de viscosité](#).

EXPRESSIONS DES ÉQUATIONS 1-8

Équation 1 (plaque verticale): Le nombre de Nusselt est défini selon **CHURCHILL** et **CHU** pour tout le domaine de Ra_L par:

$$Nu_D = \left\{ 0.825 + \frac{0.387Ra_L^{0.166}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{0.563}\right]^{0.2963}} \right\}^2 \quad \forall Ra$$

En régime laminaire l'équation ci-dessous est plus précise que l'**Équation 1**

$$Nu_D = 0.68 + \frac{0.670Ra_L^{0.25}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{0.563}\right]^{0.444}} \quad 0 < Ra_D < 10^9$$

Équation 2 (plaque horizontale): Si la surface supérieure de la plaque est chauffée ou inférieure de la plaque est refroidie

$$Nu_D = 0.54Ra_L^{0.25} \quad 10^4 < Ra_L < 10^7$$

Équation 3 (plaque horizontale): Si la surface supérieure de la plaque est chauffée ou inférieure de la plaque est refroidie

$$Nu_D = 0.15Ra_L^{0.33} \quad 10^7 < Ra_L < 10^{11}$$

Remarque: dans ce cas la longueur caractéristique L_c est définie comme suit

$$L_c = \frac{A_S(\text{surface de la plaque})}{P(\text{périmètre de la plaque})}$$

-Équation 4 (plaque horizontale): Si la surface inférieure de la plaque est chauffée ou supérieure de la plaque est refroidie

$$Nu_D = 0.27Ra_L^{0.25} \quad 10^5 < Ra_L < 10^{10}$$

Remarque: Le choix de la corrélation de Nu dépend de la position de la surface en contact avec le fluide et de la direction du flux de chaleur imposé (chauffage ou refroidissement).

-Équation 5 (plaque inclinée): pour l'écoulement laminaire on utilise l'équation ci-dessous en remplaçant (g) par $(g \cos \varphi)$ dans la définition de Ra_L

$$Nu_D = 0.68 + \frac{0.670Ra_L^{0.25}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{0.563}\right]^{0.444}} \quad 0 < Ra_D < 10^9$$

-Équation 6 (plaque inclinée): En régime turbulent, on utilise la corrélation suivante:

$$Nu_D = \left\{ 0.825 + \frac{0.387Ra_L^{0.166}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{0.563}\right]^{0.2963}} \right\}^2$$

- Équation 7 (cylindre horizontale)

$$Nu_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387Ra_D^{0.166}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{Pr}\right)^{0.563}\right]^{0.296}} \right\}^2 \quad 10^{-5} < Ra_D < 10^{12}$$

-Équation 8 (sphère) CHURCHILL recommande pour $Pr > 0,7$ et $Ra_D < 10^{11}$ la corrélation suivante:

$$Nu_D = 2 + \frac{0.589Ra_D^{0.25}}{\left[1 + \left(\frac{0.469}{Pr}\right)^{0.563}\right]^{0.444}}$$

On trouve aussi dans la littérature des corrélations pour d'autres géométries rencontrées en pratique, tels que deux cylindres coaxiaux et deux sphères concentriques. Le cas de ces deux géométries, nous le verrons dans la partie travaux dirigés.

Références bibliographiques

1. Philippe Marty, Transferts Thermiques Convectifs, Université Joseph Fourier, Grenoble
2. FAVRE MARINET M.: Cours de Convection Thermique, ENSHMG.
3. Forced Convection Correlations, Part B: Heat Transfer Principals in Electronics Cooling, Cairo University, Faculty of engineering.
- 4- Fundamentals of thermal-fluid sciences, Yunus A. Çengel and Robert H. Turner, 9engel Series in Engineering, Mc Graw Hill Education.
- 5- Transmission de chaleur (Volume 1), Albin Bölcs, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, septembre 1997.

Sites internet

<https://www.sft.asso.fr/Local/sft/dir/user-3775/documents/Ouvrages/livre%20Padet/PTC%2009%20-%20Chapitre%205.pdf>