

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1**  
**FACULTE DES SCIENCES EXACTES**  
**DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES**

# **INITIATION A LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

**Mouloud ABDELLI**

## Table des matières

	Pages
I-	PREAMBULE : QUELQUES QUESTIONS et AVIS 3
II-	QU'EST-CE QUE FAIRE DES MATHEMATIQUES ? 5
III-	DIFFERENCES ENTRE DIDACTICIEN ET PSYCHOLOGUE 8
IV-	DIFFERENCES ENTRE DIDACTICIEN ET PEDAGOGUE 9
V-	CONCEPTS DE LA DIDACTIQUE ET DE LA PEDAGOGIE 11
VI-	LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES 16
VII-	QUELQUES DEFINITIONS 24
VIII-	EPISTEMOLOGIE, DIDACTIQUE ET HISTOIRE DES MATHEMATIQUES 26
IX-	PLACES RESPECTIVES DU MAITRE, DU SAVOIR ET DE L'ELEVE DANS LE COURANT ACTUEL DE LA DIDACTIQUE 32
X-	LES APPORTS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES 36
XI-	QUELQUES TRAVAUX REALISES 41
XII-	COMPLEMENTS POUR LA LECTURE 59
XIII-	EN GUISE DE CONCLUSION 62
XIV-	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 63

## I- **PREAMBULE : QUELQUES QUESTIONS et AVIS**

La didactique des disciplines constitue un champ de connaissances distinct de la discipline-objet d'enseignement, et distinct des sciences de l'éducation. A ce titre, elle revendique une place spécifique dans les cursus de formation.

- Où se situe sa spécificité ?
- Quel rapport la didactique des disciplines entretient-elle avec les contenus scientifiques, l'enseignement, l'apprentissage ?

Les points de vue des didacticiens de différentes disciplines témoignent de la pluralité des interrogations et des pratiques dans le champ mais aussi des points d'ancrage qui en assurent la cohérence.

Par ailleurs, En tant que professeur de didactique des mathématiques, mais surtout en tant que personne qui aime les maths et à qui les maths ont beaucoup apporté, je me pose des questions sur le manque actuel de vocations pour cette discipline (et pour les sciences en général). Je me suis notamment interrogé sur le rôle et l'utilité des mathématiques pour moi qui les avait étudiées et surtout pour ceux à qui je les enseigne, souvent contraints à étudier les maths, rarement passionnés par elles.

### ➤ **Qu'est ce qu'un professeur de Mathématiques ?**

Voici un témoignage de ce que peut être un professeur de Mathématiques.

*Philippe MEIRIEU (1995) interroge : « Quelle formation pour quels enseignants ? ».*

*Il écrit « un professeur de mathématique n'est, en effet, ni un mathématicien ayant suivi quelques cours de psychologie, ni un animateur socio-culturel développant quelque intérêt pour les mathématiques, c'est un professionnel de l'apprentissage des mathématiques, c'est -à- dire quelqu'un capable, à la fois, de finaliser les savoirs qu'il doit transmettre, d'en faire une analyse épistémologique et de proposer des itinéraires variés pour se les approprier. **Un professeur de mathématiques est donc un spécialiste de la genèse des mathématiques et non de la transmission de ses résultats** ».*

### ➤ **D'autres questions paraissent fondamentales :**

- 1) Pourquoi l'enseignement des mathématiques est-il obligatoire (au-delà du savoir compter) ?
- 2) Pourquoi les maths ont-elle autant d'importance, au point de servir de critère de sélection même pour des professions qui ne les utiliseront plus ?
- 3) Qu'est-ce qui plait dans les maths à ceux qui les aiment ?
- 4) Qu'est-ce qui en fait un cauchemar pour d'autres ?

Ce qui rend les maths difficiles pour certains :

- Les maths sont un langage : pour faire des choses intéressantes il faut d'abord en maîtriser la grammaire et l'orthographe. Il y a donc des règles qu'il faut apprendre à appliquer automatiquement, sans les remettre en question, sans les oublier, comme en cours de langue. D'ailleurs, les maths scolaires sont parfois plus proches dans l'esprit des cours de grammaire que des autres cours de sciences. On peut remarquer que ces mêmes raisons font que orthographe et grammaire sont en général aussi détestées que les maths...
- Il faut de la rigueur, qui est une forme de discipline : plus qu'ailleurs il faut ici appliquer des règles, ne pas se contenter d'à-peu-près. Cela s'apprend, mais c'est difficile. Ce qui fait que la plupart sont découragés par les maths bien avant de franchir cet obstacle, et d'atteindre les moments gratifiants, ceux où l'on comprend.

- Les maths sont exigeantes : si l'on veut assimiler le langage, il faut de la pratique, et cela demande (à tous, même aux meilleurs) des efforts, de la patience et du travail en dehors des cours. On ne peut pas espérer sortir de cours en ayant tout retenu. Il y a certes une grande gratification quand on vient à bout d'une difficulté, mais c'est vrai qu'il y a aujourd'hui des distractions plus immédiates...

### ➤ Didactique et pédagogie

Le **fait didactique** relève de l'organisation des contenus, première fonction de l'agenda de l'enseignant. Le **fait pédagogique** concerne l'organisation de la relation sociale à ces connaissances. « La gestion du groupe-classe » qui est la seconde fonction de l'agenda de l'enseignant.

Comment peut-on caractériser l'approche des contenus d'un enseignement par la didactique ?

Comment l'approche *didactique* d'une discipline se distingue-t-elle de ce qu'on appelle traditionnellement sa pédagogie ?

**L'approche pédagogique tend à considérer les contenus d'enseignement efficaces** pour les mettre en œuvre : recherche de progressions, d'activités nouvelles à proposer, de nouveaux modes d'organisation de la classe, de documents « didactiques ».

### ➤ Didactique et apprentissage

Si l'on prend comme objectif la compréhension d'une notion donnée, il est inévitable qu'on soit amené à se poser la question de *ce qui fait* que l'élève parvient ou ne parvient pas au niveau de compréhension visé. C'est ainsi qu'on aborde la question de « l'activité cognitive » de l'élève, ce que l'on appelait autrefois le « raisonnement ». **Cognitif** signifie ici qu'il s'agit d'actions ou de modes de pensée en rapport avec un domaine de connaissance déterminé. En effet, il ne s'agit pas de dégager des lois générales, comme tente de le faire la psychologie, mais de s'intéresser à la manière dont l'élève traite un contenu et une situation donnés.

Envisager l'enseignement comme la **dévolution à l'élève** de la responsabilité de l'usage et de la construction du savoir, conduit à des paradoxes qu'il est utile de signaler.

Plus le professeur cède aux demandes de l'élève et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève ce que celui-ci doit faire, plus **il risque de perdre ses chances** d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité.

C'est un premier paradoxe : ce n'est pas tout à fait une contradiction, mais le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque.

Ce contrat didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale :

Tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : **si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.**

Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale :

- **S'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc n'apprend pas.**
- **Si au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors la relation didactique est rompue.**

## **II- Qu'est-ce que faire des mathématiques ? (Bernard Charlot\*)**

\* **Bernard Charlot est professeur de Sciences de l'Éducation à l'Université Paris 8 à St Denis** (*Il s'agit d'un extrait de l'article de Bernard Charlot paru dans le Bulletin de l'APMEP - juin 1987.*)

### **Le problème comme point de départ**

Le point de départ de l'activité mathématique n'est pas la définition, mais le problème.

Si certains élèves, malgré tout, apprennent des mathématiques dans la stratégie pédagogique actuelle, c'est avant tout dans les moments où ils font des problèmes et doivent, pour les résoudre, se construire un savoir mathématique en s'aidant des bribes de cours qu'ils ont assimilées et des quelques paragraphes de manuel qu'ils peuvent comprendre seuls. Le malheur est qu'ils apprennent ainsi en marge de la stratégie pédagogique officielle, chez eux, quand l'enseignant n'est pas là pour les aider à surmonter les obstacles et à approfondir leur pensée. Comment s'étonner, dès lors, que réussissent surtout ceux qui trouvent dans leur milieu familial un substitut de l'enseignant ?

Le problème peut-il être proposé par le maître ou est-ce là une atteinte intolérable aux droits de l'enfant ? En réalité, peu importe par qui le problème est posé et il ne faut surtout pas s'engager dans l'impasse du débat directivité/non-directivité.

L'essentiel n'est pas de savoir qui propose le problème, mais s'il a un sens pour l'élève, s'il lui permet d'enclencher une activité intellectuelle et de se construire des savoirs mathématiques. Le cours magistral précédant le moment de recherche active par l'élève ne me semble pas constituer une méthode pertinente d'enseignement des mathématiques. Mais il serait à coup sûr plus efficace si l'enseignant, au lieu de présenter des contenus mathématiques, partait au moins de problèmes et introduisait les concepts comme instruments pour résoudre ces problèmes.

### **Reste à s'entendre sur la notion de problème.**

Le problème qui peut servir de point de départ à l'activité intellectuelle de l'élève n'est certainement pas un exercice où l'élève applique de façon quasi mécanique une formule ou un processus opératoire.

Un tel exercice constitue une tâche, fortement routinière, et donc aussi sécurisante pour l'élève, pas un problème. Il n'y a problème, au sens strict du terme que si l'élève est obligé de travailler l'énoncé de la question qui lui est posée, de structurer la situation qui lui est proposée. C'est parce que les élèves sont trop rarement confrontés à de tels problèmes qu'ils répondent à des questions absurdes sur l'âge du capitaine ou qu'ils sont pris d'angoisse en découvrant qu'ils ont répondu aux questions en laissant inutilisée une donnée numérique.

Penser, ce n'est pas seulement trouver une réponse à une question bien posée, c'est aussi, et d'abord, formuler la question pertinente quand on se trouve face à une situation problématique.

### **Du problème au concept**

L'activité mathématique n'est donc pas simplement recherche de la réponse correcte.

Elle est aussi élaboration d'hypothèses, de conjectures, qui sont confrontées à celles des autres et testées dans la résolution du problème. Un concept approximatif est forgé pour résoudre un certain type de problème. Puis la pensée rebondit quand l'élève utilise ce concept pour résoudre d'autres problèmes, ce qui exige transferts, rectifications, ruptures, etc., selon un processus analogue à celui que l'on peut observer dans l'histoire des mathématiques. Il me semble donc essentiel de comprendre que l'élève ne construit pas un concept en réponse à un problème, mais,

selon l'excellente formule des chercheurs de Louvain-la-Neuve, un champ de concepts qui prend sens dans un champ de problèmes. Un concept mathématique se construit articulé à d'autres concepts, à travers une série de rectifications et de généralisations rendues nécessaires par son utilisation dans un champ de problèmes parents. Il me semble essentiel également de comprendre que le concept mathématique existe sous divers statuts, qui correspondent à autant de moments de l'activité mathématique. Je reprendrai ici une formule, elle aussi excellente, de BROUSSEAU : « l'élève doit agir, formuler et valider » - et, ajouterai-je, institutionnaliser.

Lorsqu'un élève est capable de dire si une règle mathématique s'applique dans divers exemples et contre-exemples sans pour autant pouvoir formuler clairement cette règle, ni même expliciter sa réponse, il a compris quelque chose. Il est capable d'utiliser le concept comme instrument d'action, sans pouvoir encore le formuler et essayer de le valider.

La seconde étape, celle de la formulation, vient ensuite, si du moins l'enseignant parvient à placer l'élève dans une situation où cette formulation apparaît nécessaire. Encore cette formulation présente-t-elle divers degrés : règle grossière exprimée dans un charabia bien peu rigoureux, règle juste mais correspondant à des cas particuliers, règle générale.

L'élève devra passer d'un niveau de formulation à un autre lorsqu'il lui faudra valider sa règle, c'est-à-dire la communiquer à d'autres, qu'il doit convaincre car eux-mêmes défendent d'autres formulations.

Enfin vient l'institutionnalisation portée par l'enseignant : celui-ci énonce la règle telle qu'elle a cours dans la communauté mathématique. La rigueur, on le voit, n'est pas sacrifiée, pas plus que la parole "officielle" du maître n'est exclue. Mais la rigueur se construit progressivement, comme exigence interne à l'activité mathématique elle-même, et l'exposé magistral vient couronner la recherche des élèves, comme moment de mise en ordre, de structuration, de synthèse.

### **Agréables ? utiles ?**

Cette description de l'activité mathématique met en cause deux idées, qui circulent comme des pseudo-évidences chez ceux qui contestent la pédagogie dominante des mathématiques: celle de jeu et celle d'utilité.

Si par jeu mathématique, on désigne une activité où l'élève prend du plaisir – ce qui n'exclut pas l'effort, mais le soutient -, une activité qui permet un fonctionnement de la pensée non contraint par des règles extérieures vécues par l'élève comme artificielles et arbitraires, je n'ai pas d'objection à formuler. Encore que l'élève ait le droit de voir son activité socialement reconnue comme un travail sérieux et non comme un jeu et que certains élèves soient angoissés par l'idée qu'ils jouent à l'école au lieu d'y travailler ! Mais si, par jeu mathématique, on désigne une activité ponctuelle non articulée autour d'un champ de problèmes, non ancrée dans un programme, sans lendemain ni intellectuel ni institutionnel, je ne suis plus d'accord.

Ces moments d'aventure mathématique ne sont pas à exclure, mais ils ne peuvent pas, à mon sens, constituer la base d'un apprentissage des mathématiques. Celui-ci suppose l'articulation entre des situations de recherche qui, pour le maître au moins, sont riches de progression future. L'élève doit sentir qu'il progresse et l'enseignant, de son côté, ne peut pas se délivrer de toute dépendance à l'égard des programmes. L'idée de proposer aux élèves en situation de refus scolaire des mathématiques « utiles » fait pendant, en quelque sorte, à l'idée de jeu mathématique. Parler de jeu,

c'est recentrer l'apprentissage sur l'activité elle-même, en tenant le résultat de cette activité comme finalement négligeable. Parler d'utilité, c'est au contraire occulter à nouveau l'activité mathématique et insister sur la valeur du résultat, mais dans le monde de la vie quotidienne et non plus dans un univers mathématique abstrait. Il est intéressant de constater que ceux qui

enseignent les mathématiques à des élèves qui a priori s'en méfient oscillent souvent entre la stratégie du jeu et celle de l'utile.

Ces stratégies, d'une certaine façon inverses, désarticulent toutes deux une activité mathématique qui est activité aboutissant à des résultats. Cette activité ne peut se définir comme jeu, car son sens

est d'engendrer des résultats, et non de se satisfaire d'elle-même. Ces résultats ne peuvent non plus se définir par leur utilité dans la vie quotidienne car ils tirent leur sens de l'activité qui les a créés. Ces deux stratégies, finalement, se résignent au rapport négatif des élèves au travail mathématique, qu'elles cherchent à contourner par l'idée de jeu ou d'utilité au lieu de reconstruire ce rapport en faisant vivre l'activité mathématique comme travail créateur. Au fond, elles entérinent, chacune à leur manière, l'inaptitude de certains élèves à FAIRE des mathématiques, l'une parce qu'elle fait mais ne pose pas ce qu'elle fait comme sérieux, l'autre parce qu'elle veut doter les élèves d'outils mathématiques mais leur laisse croire qu'il n'est pas essentiel qu'ils les aient forgés eux-mêmes. Aussi est-il bien difficile d'enseigner des mathématiques « utiles ».

Passons rapidement sur le caractère souvent bien artificiel de cette utilité proclamée.

L'essentiel n'est pas là, mais dans une contradiction de fond. Viser l'utile, c'est viser le résultat, et ce qui intéresse l'élève, dans ce cas, c'est de posséder la solution, que l'enseignant pourrait tout aussi bien, et même beaucoup plus simplement, lui donner directement. Mais ce qui, malgré tout, intéresse l'enseignant, c'est la démarche pour arriver à ce résultat tout autant que le résultat lui-même. Or, plus on insiste sur l'utilité des mathématiques et plus l'urgence de la solution risque d'occulter pour l'élève l'intérêt de la trouver lui-même.

Certes, l'argument d'utilité peut accrocher l'élève, le motiver, dans la mesure où il garantit que le problème posé par l'enseignant est un vrai problème, un problème qui a un sens, et non un exercice scolaire qui ne signifie plus rien hors de l'école. Mais il faut bien comprendre que, pédagogiquement,

ce qui est intéressant dans le problème utile, ce n'est pas qu'il est utile, mais qu'il est un vrai problème, présentant du sens pour l'élève.

### **Un enjeu : l'image de soi**

Il y a, je crois, une motivation plus fondamentale que l'utilité : le défi que pose à l'élève le problème en tant que tel. Ce qui est important pour l'élève, ce n'est pas de connaître la solution, c'est d'être capable

de la trouver lui-même et de se construire ainsi, à travers son activité mathématique, une image de soi positive, valorisante, face aux mathématiques. La récompense du problème résolu, ce n'est pas la solution du problème, c'est la réussite de celui qui l'a résolu par ses propres moyens, c'est l'image

qu'il peut avoir de lui-même comme quelqu'un capable de résoudre des problèmes, de faire des maths, d'apprendre.

L'image de soi face aux mathématiques, et, plus généralement, face au savoir et à l'école, face au monde adulte et à l'avenir : c'est là un enjeu terriblement sérieux, qu'il ne faut pas contourner en parlant de jeu ou de rentabilité immédiate des mathématiques.

Cet enjeu est psychologique, très profondément, et culturel, car qu'est-ce que la culture sinon, d'abord, la capacité à se situer comme autonome, actif et créateur dans le monde environnant ?

Cet enjeu est aussi social et politique. Face aux statistiques, aux sondages, aux indices, à l'utilisation de plus en plus fréquente de l'argument mathématique dans le discours social et politique, il n'est pas sans importance

que les élèves conçoivent les mathématiques comme un univers très particulier qui n'est accessible qu'à certains ou comme une activité qui engendre ses résultats selon certaines règles, vérifiables par tous.

J'ai trouvé une solution...  
Vite !  
Donnez-moi le problème qui va avec !



### III- DIFFERENCES ENTRE DIDACTICIEN ET PSYCHOLOGUE

Le psychologue étudie le comportement du rat dans le labyrinthe ; mais il connaît la structure du labyrinthe, qu'il a lui-même conçu.

Le didacticien, en revanche ne connaît pas la structure du labyrinthe dans lequel l'élève est lancé. Il devra donc d'abord, logiquement, chercher à l'explorer. Pour cela renversant la perspective du psychologue, il pourra même observer le comportement de l'élève à l'intérieur du labyrinthe pour en déduire la structure du labyrinthe.

**Y. CHEVALLARD**  
Didacticien des mathématiques

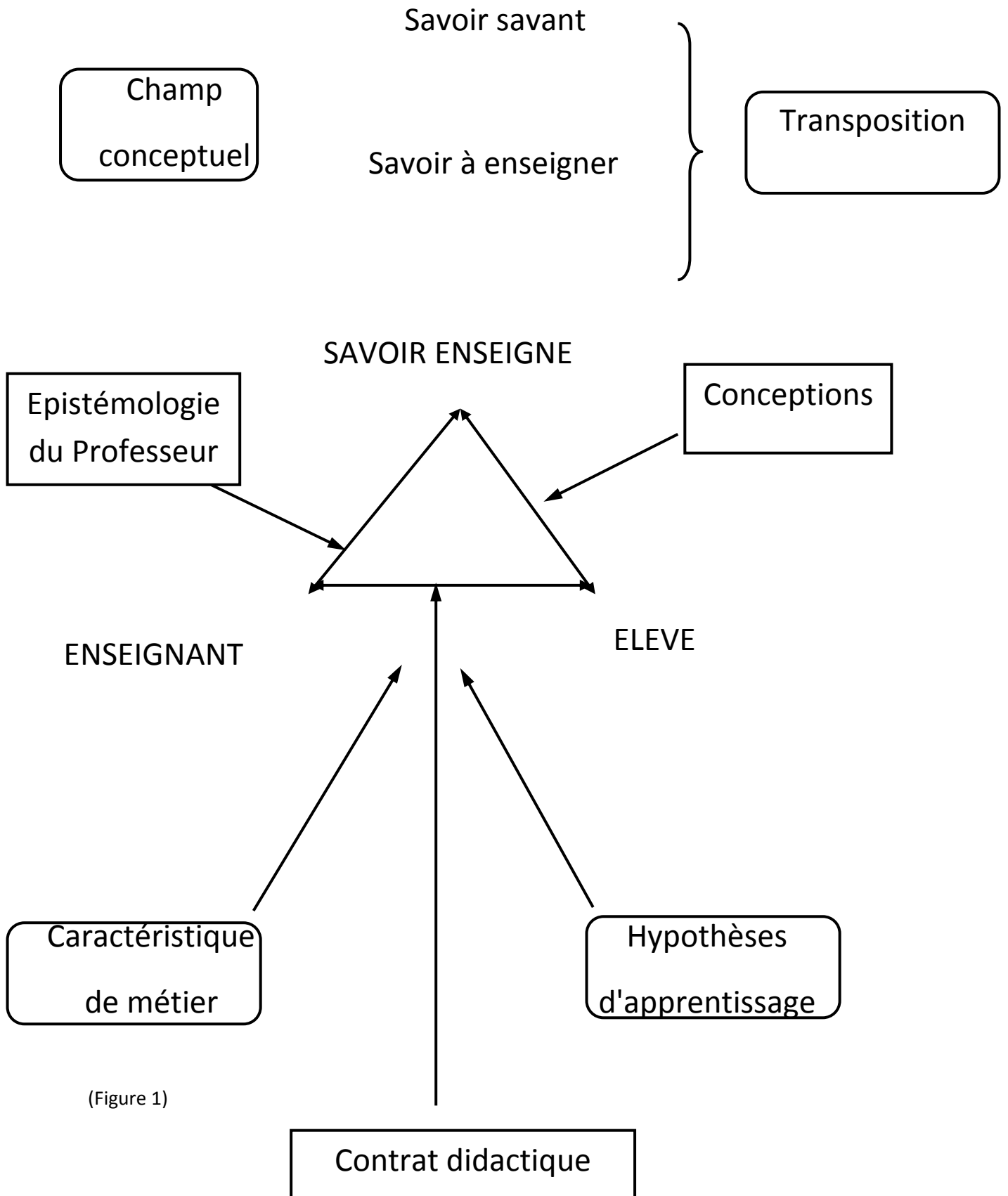


## IV-

**DIFFERENCES ENTRE DIDACTICIEN ET PEDAGOGUE**

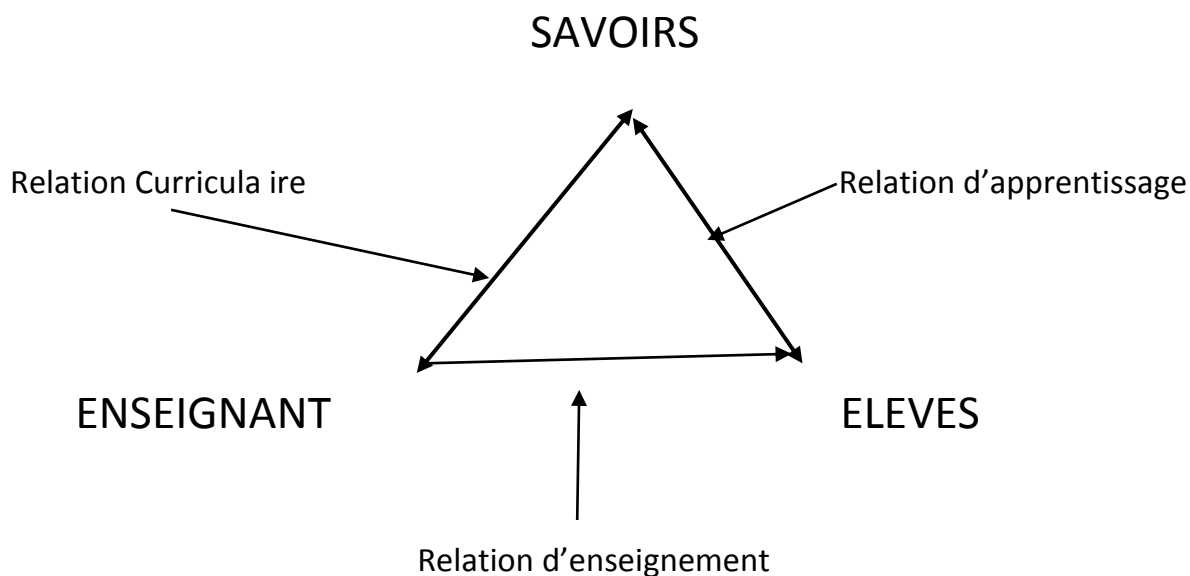
<b>PEDAGOGUE</b>	<b>DIDACTICIEN</b>
Généraliste	Spécialiste
Privilégie la relation Maître-Elève	Privilégie la relation Elève-Savoir
Qui a son triangle pédagogique	Qui a son triangle didactique
Qui a la bonne méthode Qui sait faire réussir	Apporte une dimension scientifique
Dilue l'objet culturel à enseigner	Recentre sur le contenu
Questionne les fins	Questionne les moyens
Pense la logique des apprentissages à partir de la logique de classe	Pense la logique des apprentissages à partir de la logique des savoirs

# Le triangle didactique



(Figure 1)

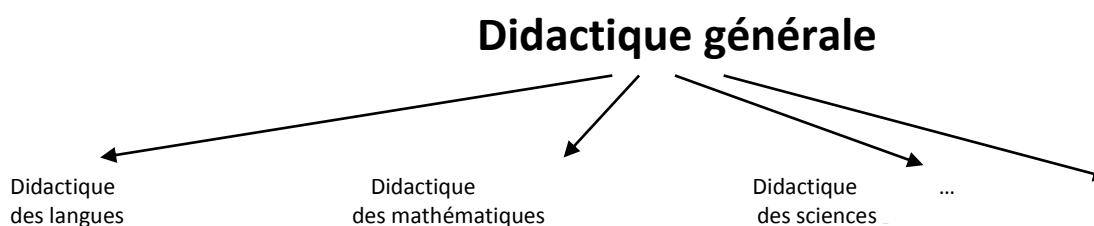
## Le triangle pédagogique



(Figure 2)

### V- CONCEPTS DE LA DIDACTIQUE ET DE LA PEDAGOGIE

DIDACTIQUE	PEDAGOGIE
Transposition didactique	Evaluation
Conceptions	Docimologie
Objectif-Observation	Compétences
Contrat didactique	Objectifs
Mémoire didactique	etc.
Situation didactique	
Dévolution	
etc.	



- Quels sont les domaines d'investigation de la didactique ?
- Qu'advient-il des concepts de « contrat didactique » et de « transposition didactique » ?

- Quelle est la pertinence du triangle didactique ?
- Qu'en est-il des relations entre l'étude de l'enseignement, l'étude de l'apprentissage et les études curriculaires ?

**En guise de réponses, voici une série de principes ou d'énoncés hypothétiques suivis , le cas échéant, de leurs corollaires :**

### **Principe 1 :**

Par didactique, on entendra ici l'étude des interrelations entre l'enseignement et l'apprentissage d'un certain contenu.

Historiquement, on a eu recours au triangle pédagogique pour représenter les trois pôles essentiels de toute situation d'enseignement/apprentissage :

les savoirs à faire apprendre, les élèves et un enseignant (Figure 2). Puis, avec les développements récents de la didactique, le triangle pédagogique s'est peu à peu transformé en un triangle didactique tel qu'illustré par Y. CHEVALLARD (1985—Figure 1).

Par ailleurs, dans la mesure où l'on conçoit ici la didactique comme l'étude des interrelations entre les trois pôles du triangle didactique, on a intérêt à y greffer les concepts de relation curriculaire (plutôt que de « relation didactique »).

### **Principe 2 :**

Afin de mieux cerner les limites de son domaine, nous établissons que la didactique , telle qu'entendue ici, ne s'intéresse qu'aux phénomènes d'enseignement/apprentissage en contexte scolaire.

L'étude de tout apprentissage en contexte non scolaire (en milieu naturel) sera considérée comme relevant de la psychologie ou de toute autre discipline plutôt que de la didactique d'une discipline spécifique.

### **Principe 3 :**

La didactique générale est constituée de concepts généraux applicables, à des degrés divers, aux diverses didactiques disciplinaires.

### **Corollaire :**

Par définition, toute didactique dite disciplinaire sera considérée comme un cas particulier de la didactique générale.

Les relations entre la didactique d'une discipline (la didactique des Mathématiques, par exemple) et la didactique générale reflètent le type de relations qui existent entre le général et le spécifique. La didactique générale vise à énoncer certains principes auxquels obéissent toutes les didactiques. Il s'agit donc de définir l'enseignement/apprentissage dont les didactiques disciplinaires sont des cas particuliers.

Autrement dit, une didactique disciplinaire est appelée à se construire en puisant ses concepts et ses méthodes d'analyse dans la didactique générale.

La didactique générale se place donc à l'origine des didactiques spécifiques disciplinaires, et non à la fin de leur développement.

De plus, toute didactique disciplinaire se déploie en sous-domaines et en champs ou sous-champs d'analyse de plus en plus spécifiques. Dans le cas particulier de la didactique des langues, pareille perspective encourage les transversalités nécessaires entre didactiques de langue maternelle et de langues étrangères ou secondes.

#### **Principe 4 :**

L'étude de la relation pédagogique, de la conduite de la classe et de tout ce qui a trait aux interactions entre un enseignant et des apprenants en contexte scolaire, indépendamment de la discipline enseignée, relève de la pédagogie.

Par relation pédagogique, on référera à la relation enseignant-apprenants en contexte scolaire. Ainsi, la relation pédagogique renvoie aux interactions effectives, en salle de classe, entre un enseignant et un groupe d'apprenants.

La conduite de la classe ou les problématiques de la gestion de la classe, indépendamment des contenus d'enseignement/apprentissage, peuvent aussi être considérées comme faisant partie de la relation pédagogique.

C'est que la pédagogie concerne avant tout les relations ou les interactions entre un enseignant et des apprenants, quelle que soit la discipline enseignée. Elle est surtout de nature psycho-socio-affective.

Ainsi conçue, la pédagogie est relativement indépendante de l'objet d'enseignement/apprentissage, c'est-à-dire des contenus à faire apprendre. Elle apparaît donc comme complémentaire de la didactique.

#### **Principe 5 :**

La didactique des disciplines réfère non seulement aux savoirs ou aux connaissances d'ordre intellectuel à faire acquérir (comme on l'affirme habituellement), mais également à tout ce qui relève de la discipline en question, qu'il s'agisse de savoirs, de savoir-faire, de savoir-être, d'attitudes, de valeurs reliées à la discipline, etc.

Les différentes didactiques des disciplines, notamment la didactique des mathématiques et la didactique des sciences, se sont développées, jusqu'ici, en ne prenant en compte que les concepts ou savoirs d'ordre intellectuel à faire acquérir dans le cadre de ces disciplines. Cela s'explique si l'on considère la nature des disciplines en question.

Toutefois, dans le cas de certaines didactiques particulières, comme la didactique des langues étrangères, la didactique de la langue première, la didactique de la musique, la didactique des arts, la didactique de l'éducation physique, la didactique des savoirs d'ordre professionnel, il importe de prendre en compte non seulement les concepts à faire acquérir (grammaticaux, par exemple, dans le cas de la didactique des langues), mais également les habiletés ou les savoir-faire, les attitudes et les valeurs à inculquer.

On ne saurait donc s'en tenir à une conception étroite de la didactique des disciplines, de manière à ne pas exclure les disciplines qui sont constituées d'autres objets que des concepts, des savoirs ou des connaissances d'ordre intellectuel.

#### **Principe 6 :**

L'enseignement/apprentissage des contenus qui ne relèvent d'aucune discipline en particulier sera considéré comme faisant partie de la didactique des contenus non disciplinaires.

Corollairement, il y a lieu de s'intéresser à la didactique des contenus non disciplinaires pour tout ce qui relève de l'enseignement/apprentissage des contenus non reconnus comme relevant spécifiquement d'une discipline en particulier : par exemple, l'enseignement/apprentissage d'attitudes sociales positives, de valeurs démocratiques, de développement de la personne, d'habitudes de travail scolaire, etc.

Ainsi, les études curriculaires s'intéressent non seulement aux contenus disciplinaires (savoirs, savoir-faire, savoir-être, attitudes, valeurs reliées à la discipline, etc.) mais également aux contenus non disciplinaires ne relevant d'aucune discipline en particulier (attitudes sociales positives, valeurs démocratiques, développement de la personne, habitudes de travail scolaire, etc.)

### **Principe 7 :**

Dans le cadre de la didactique générale telle que définie ci-dessus, les études curriculaires s'intéressent aux finalités et aux buts de l'enseignement/apprentissage, ainsi qu'aux procédés adaptatifs ou transformationnels des contenus à enseigner.

L'étude des finalités et des buts de l'enseignement/apprentissage relève des études curriculaires. Quelques concepts généraux ont été proposés dans une perspective curriculaire, afin d'atteindre les finalités et les buts fixés. Parmi ces concepts, on trouve celui de transposition didactique. La transposition didactique sera comprise ici comme englobant tout processus d'adaptation ou de transformation d'un contenu, quelle qu'en soit la nature (contenu disciplinaire ou non disciplinaire), en un objet d'enseignement en vue de son apprentissage.

La transposition didactique, telle qu'entendue habituellement, réfère à l'opération d'adaptation ou de transformation, par le didacticien, du savoir savant en un savoir enseigné. Toutefois, la portée de ce concept général peut être relativement limitée dans certaines didactiques spécifiques.

Lorsqu'il s'agit de l'enseignement/apprentissage d'un contenu disciplinaire constitué avant tout de savoirs ou de concepts (des mathématiques, des sciences, etc.), ces démarches sont, dit-on, le fruit d'une transposition didactique; toutefois, lorsqu'il s'agit d'enseignement/apprentissage de savoir-faire (par exemple, des habiletés — dans le domaine des langues étrangères ou secondes, par exemple) ou de savoir-être (attitudes, valeurs, etc.), le concept de transposition didactique, dans son sens habituel, perd toute pertinence ou, à tout le moins, doit subir certaines transformations ou adaptations.

Afin de pouvoir rendre compte d'un plus grand nombre de situations d'enseignement/apprentissage, on recourra ici à l'expression transposition didactique, non pas comme le veut la coutume, mais bien pour désigner l'adaptation ou la transformation non seulement de savoirs savants en savoirs enseignés, mais également pour désigner l'adaptation ou la transformation de tout type de contenu (disciplinaire ou non disciplinaire) en un contenu d'enseignement. On aura donc, aux côtés d'un processus d'adaptation et de transformation des contenus disciplinaires qui se présentent sous la forme de savoirs savants, ou de savoirs professionnels dans le cas des didactiques de savoirs professionnels, un processus d'adaptation et de transformation des contenus disciplinaires autres que les savoirs (habiletés, etc.) ainsi que des contenus non disciplinaires (attitudes sociales, valeur démocratique, développement de la personne, etc.).

### **Principe 8 :**

Dans le cadre de la didactique générale telle que définie ci-dessus, l'étude de l'apprentissage s'intéresse aux mécanismes d'appropriation, par un apprenant, d'un certain contenu (disciplinaire ou non disciplinaire), par l'entremise d'un enseignant. En termes généraux, on recourra à l'expression mécanismes d'appropriation pour désigner tout ce qui a trait aux processus d'apprentissage, aux opérations mentales, aux opérations cognitives, aux styles cognitifs, aux styles d'apprentissage, aux stratégies d'apprentissage, etc. La connaissance des mécanismes d'appropriation provient d'études empiriques qui s'intéressent d'abord et avant tout aux processus effectifs d'apprentissage par des apprenants en salle de classe (plutôt, par exemple,

qu'a des transpositions de théories élaborées en milieu non scolaire, dans le domaine de la didactique).

En outre, comme il s'agit de l'étude de mécanismes d'appropriation qui s'effectuent en contexte scolaire, c'est-à-dire dans une salle de classe comprenant plusieurs apprenants, le rôle des interactions sociales entre l'enseignant et les apprenants, d'une part, et entre les apprenants eux-mêmes, d'autre part, paraît pertinent. Autrement dit, les données de la psychologie cognitive portant sur les mécanismes d'appropriation de l'individu ne trouvent de pertinence en didactique que dans la mesure où elles prennent également en compte les données issues des études sur les interactions sociales en salle de classe.

### **Principe 9 :**

Dans le cadre de la didactique générale telle que définie ci-dessus, l'étude de l'enseignement s'intéresse à la démarche didactique.

L'étude des démarches didactiques, tant en situations pré-didactique (préparation à l'enseignement proprement dit) et post-didactique (retour sur l'enseignement donné) qu'en situation interactive (en salle de classe), relève de l'étude de l'enseignement.

Par démarche didactique, on entendra, d'une part, les modalités d'enseignement (techniques, moyens, procédés, stratégies, etc.) visant à favoriser une démarche d'apprentissage, c'est-à-dire l'appropriation par des apprenants d'un certain contenu : savoirs, attitudes, valeurs, habiletés, etc. et, d'autre part, le mode d'organisation des activités didactiques (par exemple, en cycles didactiques ou en séquences d'enseignement).

### **Principe 10 :**

La didactique générale est constituée de ce qui appartient à la fois au domaine de l'enseignement en relation avec le domaine de l'apprentissage d'un certain contenu en contexte scolaire.

#### **Corollaire 1 :**

La connaissance des buts et des finalités de l'enseignement/apprentissage, ainsi que des procédés adaptatifs ou transformationnels des contenus à enseigner est une condition nécessaire mais non suffisante pour l'élaboration d'une didactique générale ou spécifique.

#### **Corollaire 2 :**

La connaissance des mécanismes d'appropriation d'un certain contenu est une condition nécessaire mais non suffisante pour l'élaboration d'une didactique générale ou spécifique.

#### **Corollaire 3 :**

La connaissance des démarches didactiques est une condition nécessaire mais non suffisante pour l'élaboration d'une didactique générale ou spécifique.

Une éventuelle théorie de l'enseignement ne saurait découler directement d'une théorie de l'apprentissage en contexte scolaire. En effet, une théorie de l'enseignement ne peut que prendre en compte les données des théories de l'apprentissage en contexte scolaire; mais elle ne saurait en dépendre. Tout au plus, peut-on viser à harmoniser une (éventuelle) théorie de l'enseignement avec une ou des théories de l'apprentissage en contexte scolaire.

Une éventuelle théorie de l'enseignement ne saurait, non plus, découler directement d'une théorie du curriculum. En effet, une théorie de l'enseignement ne peut que prendre en compte les données d'une théorie curriculaire, mais elle ne saurait en dépendre. Tout au plus, peut-on viser à harmoniser une (éventuelle) théorie de l'enseignement avec une ou des théories du curriculum.

Quant à l'étude spécifique des éléments constitutifs majeurs de la didactique générale, pris en eux-mêmes (apprenants, enseignant, contenu, contexte scolaire), elle ne relève pas de la didactique en tant que telle, mais bien de disciplines particulières telles la psychologie, la

sociologie, ou toute discipline susceptible d'être enseignée (mathématiques, sciences, biologie, géographie, histoire, etc.).

Le développement de toute didactique, générale ou spécifique, implique la prise en compte d'une théorie curriculaire, à harmoniser à une (éventuelle) théorie de l'enseignement, elle-même articulée à une théorie de l'apprentissage en milieu scolaire.

Les études empiriques portant sur l'un ou l'autre de ces trois domaines d'une didactique générale ou spécifique connaissent un développement inégal.

C'est ainsi que l'on dispose, à l'heure actuelle, d'un certain nombre de théories curriculaires et de théories de l'apprentissage, mais les études sur l'enseignement proprement dit en sont toujours à leur état embryonnaire.

### **Principe 11 :**

Dans le cas particulier de la didactique des langues, la contribution de la linguistique se situe sur le plan du contenu, avant sa transformation ou son adaptation en un objet d'enseignement/apprentissage en contexte scolaire.

### **Corollaire :**

Il y aurait intérêt à remplacer l'expression linguistique appliquée à l'enseignement des langues par l'expression didactique des langues.

Les finalités de la science linguistique et de la didactique des langues sont tout à fait différentes. Toutefois, les descriptions scientifiques et exhaustives fournies par la linguistique peuvent constituer une ressource importante pour la didactique de langues. Mais, le fait de pouvoir fournir au didacticien des langues des descriptions fiables ne confère pas pour autant au linguiste une compétence didactique. Afin d'être utilisable par l'enseignant de langues, toute description linguistique se doit de passer par le creuset des études curriculaires, c'est-à-dire doit subir des transformations et des adaptations en fonction des finalités et des buts arrêtés ainsi qu'en fonction du public visé. Tout au plus, serait-il légitime de parler, à l'instar d'Henri Besse (1985), d'une linguistique interrogée, dont le principal mérite est de bien faire voir la nécessité de partir de problématiques de terrain, plutôt que l'inverse.

Ainsi, compte tenu des principes énoncés ci-dessus, la perspective d'une linguistique appliquée, qui est une perspective à la fois étroite (parce que centrée sur l'apport d'une seule discipline, la linguistique) et applicationniste (allant de la discipline de référence vers les problématiques de l'enseignement/ apprentissage des langues, plutôt que l'inverse), va à l'encontre du développement autonome et scientifique de la didactique des langues.

## **VI- La didactique des Mathématiques**

### **1. Historique :**

L'expression "didactique des mathématiques", adoptée par Félix Klein en 1910, n'est apparue que bien tardivement en France au début des années 1970, avec la volonté de distinguer entre recherche didactique et recherche pédagogique.

La pédagogie est l'art d'éduquer les enfants.

La didactique est l'art d'enseigner (Litré 1955).

Et pourtant l'adjectif didactique, du grec didaktikos, était vers 1554 relatif à une poésie exposant une doctrine ou des connaissances. A titre d'exemple, on peut citer l'Urjuzat d'Ibn Yassamine, résolution d'une équation algébrique du troisième degré écrite sous forme de poème.

Les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques se sont accrus par la réforme des années 1960, réforme qui avait pour but de se conformer à l'esprit bourbakiste, d'enseigner



une mathématique des structures, allant du simple au complexe. Cette réforme péchait par le fait que les psychologues et les spécialistes en Sciences de l'Education n'y ont pas été associés.

En 1969, avec la création des premiers Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), dont la mission était de contribuer à la formation initiale des enseignants, au recyclage et à l'expérimentation pédagogique, d'élaborer des documents et les diffuser, se développa alors en France une recherche en didactique des Mathématiques, inter - paliers et interdisciplinaire. Cette recherche obéissait à deux orientations:

- **volonté de traiter les problèmes posés par l'apprentissage des mathématiques en situation scolaire et expérimentation dans les classes,**
- **volonté d'élaborer un champ théorique spécifique.**

Une formation post graduée se développa et des thèses d'état ont été soutenues durant les années 1980.

Ainsi, la didactique étudie les conditions dans lesquelles des sujets apprennent ou n'apprennent pas. A la différence de la pédagogie, la didactique accorde une grande importance :

- Au contenu des connaissances dont l'appropriation est visée,
- A l'épistémologie de la discipline enseignée,
- A la psychologie des processus de conceptualisation,

Des cadres théoriques originaux ont été élaborés notamment en didactique des mathématiques : **théorie des situations didactiques (TSD) – théorie anthropologique du didactique (TAD) – théorie des champs conceptuels (TCC).**

A titre comparatif, dans d'autres pays, la nécessité d'une recherche en didactique des mathématiques a été ressentie beaucoup plus tôt (USA, Canada, Belgique,...).

## **2. Les principaux concepts :**

Les différentes recherches en didactique des mathématiques peuvent être résumées dans le triangle didactique : **La transposition didactique, Les conceptions, Le contrat didactique, Les obstacles, L'utilisation de l'informatique.**

### **A. La transposition didactique :** Travaux de CHEVALLARD

Comment passer du savoir savant, des articles de recherche, au savoir enseigné, en définissant les objets à enseigner (programmes), les objets de l'enseignement (diagrammes de Venn), le savoir scolaire (manuels), le temps didactique.

### **B. Les conceptions :** Travaux de Vergnaud

Il faut distinguer entre enseignement et apprentissage.

Pour le fonctionnement des apprentissages, on a plusieurs variables:

#### **Variables de contexte:**

- choix des objets d'enseignement.
- élaboration de nouveaux outils conceptuels (statistiques, mathématiques financières, informatique).
- origine et histoire des élèves.

#### **Variables didactiques:**

- cours magistral, résolution de problème, travail individuel ou en groupe, temps laissé à l'apprentissage (**variables de situation**)
- contrat entre enseignant et enseignés, attentes du maître (**variables de contrat**)
- adaptation des pré-requis, gestion des erreurs (**variables de transposition**)

### **Variables épistémologiques:**

- formation historique des concepts, ruptures (**épistémologie historique**)
- développement des champs conceptuels dans les mathématiques contemporaines (**épistémologie des mathématiques**)
- formation des concepts chez l'apprenant (**épistémologie génétique**)

Une conception dogmatique du savoir conduit aux apprentissages par répétitions inlassables des mêmes textes fondamentaux : c'est la scholastique médiévale (école coranique, par exemple). Donc le début du vingtième siècle hérite de ces conceptions traditionnelles fondées sur la qualité de l'exposé, la répétition et l'appel à la mémoire de l'élève plus qu'à son intelligence. Pour beaucoup d'enseignants, transmettre un savoir, c'est le verser dans la tête de l'élève : c'est **la conception de la tête vide** (tabula rasa).

**La conception des petites marches** consiste à aménager des étapes intermédiaires avant de faire passer l'élève à un autre niveau de connaissance.

Les premières expériences d'enseignement assisté par ordinateur ont utilisé cette conception. Mais savoir débrayer, accélérer, freiner, tourner le volant ne signifie pas que l'on sache conduire une voiture!

**Le constructivisme** : l'élève n'a pas la tête vide et "c'est en agissant que l'on apprend" (Piaget). Il faut donc créer des conflits socio-cognitifs pour faciliter l'acquisition des connaissances.

### **C. Le contrat didactique :** (travaux de Brousseau).

C'est "l'ensemble des comportements de l'enseignant qui sont attendus de l'élève, et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de l'enseignant".

### **On a ainsi des exemples de rupture de contrat:**

#### **- l'âge du capitaine:** (titre d'un livre de Stella Baruk)

On a proposé à 97 élèves de 4<sup>ème</sup> et de 5<sup>ème</sup> année primaire le problème suivant: sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine?

76 élèves ont donné l'âge en combinant les nombres.

Stella Baruk considère que nous transformons nos élèves en "automaths".

#### **- l'effet Pygmalion:** (roi légendaire de Chypre)

Pygmalion était amoureux d'une statue qu'il avait lui-même sculptée. Il obtint de la déesse Aphrodite qu'elle lui donnât la vie, et il l'épousa.

L'échec ou la réussite de l'élève dépendent de l'attente que l'enseignant aura envers eux. L'enseignant limite son exigence à l'image qu'il s'est fait des capacités de l'élève, l'élève limite son travail à l'image que l'enseignant lui renvoie de lui-même.

**- l'effet Topaze:** Topaze dans le célèbre film de Marcel Pagnol, fait une dictée à un mauvais élève; il suggère la réponse en appuyant là où il faut : "des moutons **étaiheu** réunisse.

**- l'effet Jourdain:** Jourdain, dans le "Bourgeois gentilhomme" faisait de la prose sans le savoir.

Exemple : on faisait faire des manipulations étranges avec des pots de yaourt à un élève et on déclarait soudain : tu viens de découvrir un groupe de Klein.

- **l'effet Papy** ou de glissement métacognitif

On peut être conduit à se justifier et prendre ses explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique (par exemple les patates du diagramme de Venn).

- **l'effet de l'attente incomprise** ou effet Arsac.

C'est croire qu'une réponse attendue des élèves va de soi.

Exemple : (pris dans le passé scolaire de Gilbert Arsac de l'IREM de Lyon)

question posée par son professeur d'histoire au collège :

" Au moyen âge, les gens des villes élevaient des...?"

Réponse de l'élève : des cochons, des enfants...?"

Réponse attendue : des cathédrales.

- **l'usage abusif de l'analogie:**

Remplacer l'étude d'une notion complexe par celle d'une analogie.

Dans un cours élémentaire de Géométrie Différentielle, pour expliquer l'usage des cartes locales, j'ai comparé les variétés à des villas à un étage, la variété vivait à l'étage et sa base de modélisation au rez de chaussée. Donc pour aller d'une variété à l'autre, on était obligé de descendre l'escalier, passer à l'autre rez de chaussée et monter l'autre escalier. Malheureusement, il s'est trouvé au moins un étudiant (pour ce cours qui se donnait en quatrième année d'université) qui ne s'est souvenu que des villas.

**D. Les obstacles :** travaux de Bachelard

On analyse des erreurs persistantes et on en fait l'épistémologie.

Un obstacle :

- c'est une connaissance.

- il permet de produire des réponses adaptées à certains problèmes.

- il conduit à des réponses erronées pour d'autres problèmes.

- il présente une résistance à toute modification.

Le rejet de l'obstacle aboutit à une connaissance nouvelle.

**Il y a différents types d'obstacles :**

- obstacle épistémologique :

Il est inhérent au savoir lui-même. La compréhension de cet obstacle se nourrit de recherches en épistémologie et histoire des mathématiques.

- obstacle didactique:

obtenu par le choix d'une méthode d'enseignement.

- obstacle psychologique :

Lorsque l'apprentissage vient en contradiction avec des représentations profondément ancrées chez l'apprenant, on a un blocage. Exemple : un élève qui ne pouvait utiliser le nombre 2 parce qu'il n'acceptait pas son jumeau.

- obstacle ontogénique :

L'apprentissage demandé est trop en décalage par rapport à la maturité conceptuelle du sujet. *On demande à un élève d'écrire des phrases alors qu'il ne maîtrise pas la langue.*

**E. L'utilisation de l'informatique :** soit comme outil, soit comme objet d'enseignement avec des recherches sur l'apprentissage des langages de programmation (Travaux de Rogalski, Laborde), les représentations des systèmes informatiques que se forment les élèves (Travaux

de Samarçay), la réalisation de didacticiels et imagiciels (travaux de Régis Gras), l'organisation d'enseignements avec cet outil.

On peut enfin citer les travaux de M. ARTIGUE sur une didactique de l'analyse.

### **3. Recherches au Maghreb :**

En Algérie, on commence à peine à se rendre compte de la nécessité d'une telle recherche, mais au Maroc, les choses sont beaucoup plus avancées.

Si les problèmes créés par le passage d'une langue à l'autre ont évidemment suscité plusieurs travaux, on s'est aussi penché sur la place de la logique dans l'enseignement, les modes de raisonnement, l'épistémologie des concepts, l'identification des obstacles (continuité, notion d'ensemble, ...), la compréhension de situations problèmes (texte ambigu,...), l'introduction d'imagiciels.

### **4 . Les situations didactiques :**

Elles mettent en jeu trois types de « personnages » : Un domaine d'étude, un apprenant avec éventuellement l'intervention d'agents éducatifs. Ces personnages poursuivent leurs propres finalités. Les situations didactiques font apparaître des conflits de finalités qui se résolvent généralement par des compromis selon des principes d'optimisation.

#### **Le domaine d'étude ou le savoir :**

Celui qui nous intéresse est en liaison étroite avec la mathématique.

Un domaine d'étude ne se réduit pas à son contenu. Il y a tout un système d'appréciations qui l'accompagne. Dans un texte mathématique, les mots tels que définition, théorème, remarque, problème, exercice... n'appartiennent pas au langage mathématique mais s'exprime Bourbaki, « ils faciliteront l'intelligence d'un texte ».

Ces connotations constituent la finalité du domaine d'étude.

#### **L'apprenant ou l'élève:**

Il est le récepteur du message. Il intervient dans une situation didactique avec ses propres finalités.

#### **L'agent éducatif ou l'enseignant ou le maître:**

Une situation didactique est essentiellement la confrontation d'un apprenant avec un domaine d'étude. Mais la scène fait intervenir fréquemment des agents externes qui catalysent le processus. On peut citer les enseignants. Ils interviennent avec leurs propres finalités qui peuvent différer considérablement de l'idéal des mathématiciens ou du point de vue des élèves. La mise en œuvre de la finalité de l'enseignant se traduit par ce qu'on appelle la **stratégie du Maître**.

### **5 - Le statut du savoir dans la relation didactique :**

Le savoir a, en réalité, une dimension différente en fonction du pôle à partir duquel on l'explore.

- 1- Il y a le savoir contenu dans les programmes et les manuels (savoir, objet de la relation didactique **S.O**)
- 2- Il y a le savoir du maître dans le domaine envisagé (**S.M**)
- 3- Il y a enfin le savoir de l'élève antérieur à tout apprentissage scolaire (**S.E**).

Cette conception du savoir est de nature à inciter tout didacticien à se poser, avant toute intervention pédagogique, les questions suivantes :

- a- Quel est ce savoir, objet de la relation didactique ? (sa genèse, sa logique, sa mouvance, ses méthodes etc.....)
- b- Quel est le savoir du maître à propos de la notion envisagée (s'interroger sur l'histoire de son propre apprentissage de cette notion : attentes, blocages, représentations etc. ....)
- c- Quel est le savoir de l'élève à propos de la notion envisagée ? (prospector ici également les blocages, les représentations ainsi que les structures d'accueil positives).

## **6 - La transposition didactique :**

C'est le travail par lequel le didactique passe du savoir savant aux savoirs enseignés compte tenu des programmes imposés par les décideurs. Elle correspond selon DEVELAY à « un travail de réorganisation de présentation, de genèse de connaissances pré - existantes en vue de leur enseignement ».

La transposition didactique apparaît alors comme une forme d'intégration d'un concept au texte du savoir scolaire.

Dans cet effort de transposition, on prend en considération les pratiques sociales de référence, c'est-à-dire les activités sociales, activités diverses pouvant servir de référence aux activités scolaires. En effet, le savoir à enseigner dans la plupart des disciplines a comme ascendant des savoirs savants et des pratiques sociales de référence.

Il y a également la nécessité, pour une même notion scientifique, de varier les énoncés en fonction des niveaux de scolarité et des problèmes étudiés. Il s'agit alors de simplifier les mots voire même la syntaxe de la phrase et de tenir compte du niveau de maturation en corrélant les niveaux de formulation des concepts et les stades de développement.

On parlera de trame conceptuelle pour désigner toutes les notions qui sont à la base d'un concept. L'idée de trames conceptuelles est liée à celle d'énoncés différenciés et évolutifs pour une même notion.

Dans cet effort d'adaptation, il faut toutefois éviter que l'enfant ne se cantonne dans des solutions rigides, des vérités absolues et immuables. Ceci risque fort de constituer plus tard des entraves et des obstacles à tout nouvel apprentissage lorsqu'il s'agit de modifier ses conceptions quand elles s'avèrent erronées.

Ayant déjà parlé de la transposition didactique mettant en relation le savoir enseigné et le savoir savant, nous allons maintenant définir les autres concepts forgés par les didacticiens :

## **α - Les représentations :**

Concept forgé par les sociologues pour désigner les façons de penser la réalité sociale, il a été introduit en psychologie génétique par **J.PIAGET** quand il a étudié « la représentation du monde chez l'enfant ».

Tout récemment les didacticiens l'ont adopté pour mieux comprendre et appréhender l'activité intellectuelle de l'apprenant et sa manière de construire le réel. En effet, c'est à la psychologie génétique que nous devons les découvertes sur les rapports étroits entre le développement intellectuel et les représentations, entre le réel et l'imaginaire chez l'enfant. On parle de fabulation quand ce dernier passe du réel à l'irréel.

Le concept de représentation ouvre la voie à une « nouvelle approche de l'apprentissage susceptible d'expliquer la manière dont nous construisons le réel.

C'est la psychologie génétique qui affirme que l'enfant tente d'expliquer le monde qui l'entoure selon ses schèmes mentaux. Pour cela il s'appuie sur les modèles explicatifs dont il dispose. Cependant, ces modèles sont très souvent inadaptés et induisent l'enfant en erreur. C'est la raison

pour laquelle il s'avère nécessaire de cerner ces représentations qui font écran en empêchant toute construction d'un nouveau savoir.

*Mais attention !*

Il ne s'agit pas de les extraire d'emblée ou encore de les ignorer. Il est nécessaire, par contre, de prendre appui sur elles si on veut réellement aider l'élève à apprendre. De là, nous dégageons l'importance de tenir compte de ce premier savoir de l'élève, de ce que **ASTOLFI** appelle « le déjà là conceptuel » car on est convaincu aujourd'hui que le savoir de l'élève ne commence pas avec la leçon.

Nous assistons, en fait, à un phénomène semblable à celui qui constitue le fondement de savoir que « chaque connaissance se met en place en s'opposant à une autre sur lesquelles elle s'appuie et qu'elle transforme à son tour ».

Dans cette situation, « le rôle de l'enseignement est de faire émerger ces représentations, les analyser, déceler les raisons de leur existence pour rassembler les composantes de base sur laquelle il doit construire et gérer son apprentissage. Il paraît alors évident que ce n'est pas en corrigeant simplement l'erreur que celle-ci ne sera plus commise. Ce n'est pas à l'erreur elle-même qu'il faut s'attaquer, mais le travail du didacticien va plus en profondeur puisqu'on sait, aujourd'hui, que chaque erreur est sous-tendue par un modèle explicatif qui, lui, est responsable.

Nous empruntons à un auteur l'exemple de l'élève qui peut très bien comprendre que le triangle a trois sommets, mais pas en même temps. La raison en est que, par ailleurs, il a appris que le sommet est toujours ce qui se situe vers le haut (exemple le sommet de la montagne).

Un autre exemple lié au fait que certains enfants, considérant qu'un nombre est constitué de deux parties, une entière et l'autre décimale, font bien de dire que 3,1547 est supérieur à 3,16. C'est parce que l'élève construit son savoir à partir des connaissances préalables, apprises à l'école ou en dehors de l'école, qui sont parfois erronées et viennent interférer avec le savoir scolaire.

L'enseignant est très souvent confronté à ce savoir particulier des élèves et il n'est pas en droit de l'ignorer. La prise en compte de ces représentations permet aux didacticiens de comprendre le système explicatif du sujet. Il ne s'agit pas de détruire une représentation fautive pour lui substituer une autre, comme s'il s'agissait d'un placage. Mais au contraire, il faut envisager son évolution, sa transformation car elle constitue une entrave qui nécessite une rupture épistémologique pour pouvoir progresser.

### **β - Le statut des représentations en didactique :**

Nous avons déjà dit que les représentations constituent un modèle individuel selon lequel la pensée s'organise, une modalité particulière de connaissance. C'est la raison pour laquelle on ne doit ni les ignorer, ni les assimiler à des fautes.

Le rôle du didacticien est d'amener l'enfant à changer de système de représentation car toute représentation fautive n'est que la manifestation d'un obstacle face à l'apparition du savoir et à la compréhension de la situation.

De là, nous dirons que l'essentiel de l'apprentissage se centre sur le franchissement de ces obstacles en vue d'aboutir à une réorganisation du système de représentation chez l'élève. C'est dans la mesure où ce dernier en prend conscience et l'affronte qu'il arrivera à modifier et réorganiser son modèle explicatif pour pouvoir progresser.

### **X - La notion d'objectif obstacle :**

L'existence d'obstacles liés aux conceptions des élèves oblige l'enseignant à prendre ces dernières en compte. L'enseignant ne sera pas obnubilé par le savoir scientifique au niveau duquel il situait

ses objectifs, mais accordera une priorité au franchissement des difficultés inhérentes à l'élève. D'où la notion d'objectif obstacle qui consiste à identifier les blocages sur l'itinéraire du savoir pour pouvoir débloquer la situation, franchir l'obstacle et aider l'élève à apprendre et progresser ainsi vers la pensée scientifique.

Rappelons enfin que ces obstacles sont de natures très différentes : épistémologique, psychologique, pédagogique. Nous avons déjà mentionné les difficultés liées aux représentations de l'élève par rapport aux concepts. Nous pouvons citer également les difficultés propres au savoir. L'élève auquel on a appris que zéro équivalant à rien, au néant, dira facilement que  $0,1 = 0,01$ .

Il y a aussi les difficultés renfermées par l'enseignement. Parfois, par souci de simplifier à l'extrême les phénomènes ou amène l'enfant à des croyances dont il a du mal à se départir plus tard.

Mais il ne faut pas oublier les difficultés liées aux caractéristiques individuelles des sujets, à leur charge mentale de travail et à leur développement intellectuel.

Dans tout traitement des obstacles, l'enseignant doit, avant tout, faire émerger les conceptions des élèves pour déterminer celles qui paraissent constituer des obstacles à l'apprentissage et aider, par là, l'élève à les franchir.

Une des techniques préconisée est celle qui consiste à instaurer des débats contradictoires en déclenchant une opposition des pensées destinée à « purger » les conceptions. C'est ce qu'on appelle le conflit socio-cognitif que nous allons expliquer dans le paragraphe suivant.

### **μ - Le conflit socio-cognitif**

Tout apprentissage est éminemment un acte social. L'élève apprend en interaction avec les autres et avec ses enseignants. Dans le groupe ce dernier se trouve plongé dans un « jeu de miroirs » qui lui permet de s'apprécier et d'avoir un retour constant sur ses propres actions. D'où l'importance des conflits sociaux et des conflits cognitifs dans le développement des démarches de pensée et dans l'évolution du système égocentrique de l'enfant.

Ce conflit ne peut être efficace que s'il est organisé et géré par l'enseignant. Il devient alors un moyen d'accélérer le développement par apprentissage.

### **η - Le contrat didactique :**

Il s'agit de « l'ensemble des règles implicites » qui régissent le fonctionnement de la classe et les rapports Maître -Elève-Savoir. Il est défini par **G. BROUSSEAU** comme étant « l'ensemble des attentes réciproques maître-élève qui s'établissent à propos de l'enseignement d'un savoir donné et qui tendent à définir le rôle de chacun dans le déroulement de cet enseignement ».

Ces règles implicites se traduisent par des attentes à propos de ce qui est permis, de ce qui est attendu, de ce qui est réellement demandé. Ces règles supposées, ces attentes souvent non fondées font qu'un élève anticipe et répond par rapport à ce qu'il pense que le maître attend de lui .

A la question : Dans une classe il y 12 filles et 13 garçons, quel est l'âge de la maîtresse ? L'élève s'empresse de répondre 25 ans en effectuant rapidement l'opération  $12+13=25$ . En effet, il a « intériorisé » qu'il faut répondre par un nombre

après avoir fait une ou plusieurs opérations. Il s'agit d'automatismes liés à des habitudes et des attentes car l'élève, sans réfléchir à la question posée, suppose que la citation des deux nombre vise une des opérations fondamentales de ce qu'il suppose que le maître attend de lui.

## VII- QUELQUES DEFINITIONS

La didactique est le champ d'étude des interactions entre un savoir, un système éducatif (scolaire et/ou universitaire) et des apprenants. Elle se trouve à l'intersection de plusieurs autres champs de savoirs. Elle adopte en les adaptant certains de leurs concepts et utilise certaines de leurs méthodes d'analyse.

Tenter de comprendre ces interactions vise en premier lieu l'amélioration des conditions d'apprentissage de la discipline concernée et accessoirement l'acquisition de compétences en didactique de la discipline en tant que savoir savant autonome.

A cause de cette dichotomie, la didactique des mathématiques :

- Intéresse d'abord les acteurs de la sphère éducative qui attend beaucoup de réponses des recherches entreprises.
- Etudie les processus de transmission et d'acquisition des différents contenus de cette science particulièrement en situation scolaire et universitaire.
- Se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux apports entre son enseignement et son apprentissage.

La didactique des mathématiques ne se réduit pas à chercher une bonne manière d'enseigner une notion fixée

**Situation adidactique**  
Brousseau, Théorie des situations

### Définitions

\*Les situations didactiques sont des situations qui servent à enseigner

- Une situation est didactique lorsqu'un individu a l'intention d'enseigner à un autre individu un savoir donné.

\*Une situation non didactique est une situation sans finalité didactique pour laquelle le rapport au savoir s'élabore comme un moyen économique d'action (= apprendre à faire du vélo)

\*Une situation a-didactique est la part de la situation didactique dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas explicite au regard de l'élève

- Le sujet réagit comme si la situation était non didactique
- C'est à l'élève de prendre des décisions, d'engager des stratégies, d'évaluer leur efficacité



## Situations a-didactiques

« Le Maître se refuse à intervenir comme possesseur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation »

BROUSSEAU

« dans les situations adidactiques, les interactions des élèves avec le milieu sont supposées suffisamment « prégantes et adéquates » pour qu'ils puissent construire des connaissances , formuler des stratégies d'action, valider des savoirs en utilisant des rétroactions de ces milieux sans que leur activité ne soit orientée par la nécessité de satisfaire aux intentions supposées du professeur »

Sensevy

## Caractérisation

- \*Y-a-t-il bien un problème posé aux élèves ?
- \*Quel est le ou les savoirs visés ?
- \*Quelles sont les procédures possibles pour résoudre le problème ?
- \*L'utilisation de la connaissance visée est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves ?
- \*L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée ?
- \*Comment voit-il qu'il réussi ou échoué ; Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions ?
- \*La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir ?
- \*La vérification du résultat est confondue avec l'activité
- \*Peut-il recommencer en modifiant sa procédure ?

## Dévolution

\* « La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage (adidactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert »

BROUSSEAU

\*Processus par lequel le professeur fait en sorte que les élèves assument leur part de responsabilité dans l'apprentissage

\*Les « ratés » de la dévolution peuvent être interprétés en termes de contrat didactique...

## Institutionnalisation

\* « La prise en compte « officielle » par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maître, de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique : cette double reconnaissance est l'objet de l'institutionnalisation . » BROUSSEAU

\*C'est le processus dans et par lequel le professeur signifie aux élèves les savoirs ou les pratiques qu'il leur faut retenir comme les enjeux de l'apprentissage attendu.

## VIII- **Epistémologie, didactique et histoire des mathématiques**

### A - Sur la diversité que recouvre l'épistémologie

L'épistémologie recouvre plusieurs types de travaux qui révèlent une grande richesse et une diversité d'approche.

#### 1) **Origine et évolution du terme épistémologie**

« L'épistémologie est l'étude des circonstances qui ont permis la production de la connaissance scientifique. Elle cherche à décrire et à expliquer l'élaboration des outils intellectuels qui permettent à l'homme de décrypter, comprendre et transformer la nature : langage, pensée symbolique, pensée formelle, méthode hypothético-déductive, méthode expérimentale en liaison avec l'évolution des techniques et des technologies » GLAESER (1979).

Dans un style plus succinct Le petit Larousse illustré (édition 1980) se restreint à « étude des sciences, ayant pour objet d'apprécier leur valeur pour l'esprit humain ».

De ces définitions, il ressort que l'épistémologie comporte deux aspects qui sont toutefois indissociables :

- rechercher une « connaissance positive » (**de quoi parle le savant ? comment en parle-t-il ?**)
- faire de la pratique scientifique l'objet d'un jugement (**qu'est - ce - qu'une vérité scientifique ? à quelles conditions y a-t-il vérité ? dans quelles limites peut-on parler de vérité scientifique ?**)

Il semble néanmoins que le sens du mot s'est élargi depuis plusieurs années. Cette évolution doit beaucoup au développement des domaines tels que l'histoire des sciences et /ou les sciences cognitives qui entretiennent avec l'épistémologie des rapports étroits. L'usage introduit par Piaget dans l'expression épistémologie génétique témoigne de cet élargissement.

#### 2) **Rapports avec l'histoire des sciences**

J.L.DORIER (1997) reprenant G.CANGUILHEM écrit : « l'histoire d'une science ne saurait être une simple collection de biographies, ni à plus forte raison un tableau chronologique agrémenté d'anecdotes. Elle doit être aussi une histoire de la formation, de la déformation et de la rectification de concepts scientifiques ».

Pour l'auteur, « il ne s'agit donc plus seulement d'une description de faits, mais de la recherche d'une cohérence interne à travers les différents problèmes et concepts qui donnent leur sens à une science. Ainsi, l'histoire d'une science est-elle inséparable d'un questionnement épistémologique qui peut être une part plus ou moins importante de l'analyse ».

Une histoire utilisée par les didacticiens, ne saurait éliminer toute mention des débats anciens car certaines objections survenues au cours des discussions sont peut être de même nature que les réticences éprouvées par quelques apprenants.

### 3) Sur l'épistémologie génétique

L'épistémologie génétique est particulièrement importante pour le didacticien. En effet, elle s'intéresse au développement des connaissances chez l'individu alors que l'épistémologie s'intéressait au développement des savoirs dans les milieux scientifiques.

On pourrait également dire qu'en s'inscrivant dans le champ des questions posées par la didactique à la psychologie, elle modifie les rapports habituels entre les deux. Elle comble d'abord un vide en proposant une véritable théorie de la conceptualisation et des apprentissages complexes. La référence aux contenus de savoirs mathématiques y est une exigence permanente. « La didactique des mathématiques s'est constituée en France sur la base des théories constructivistes de la connaissance, profondément influencée par les travaux de psychologie génétique de l'école genevoise en opposition donc aux théories empirico-sensualistes ou béhavioristes de l'apprentissage qui sous-tendent plus ou moins explicitement l'épistémologie naïve de l'enseignement » M.ARTIGUE(1988).

Ce tour d'horizon nécessairement non exhaustif montre l'extrême diversité que recouvre l'usage du terme épistémologie. Il apparaît difficile de le dissocier de la théorie de la connaissance scientifique. Par ailleurs ses liens avec l'histoire des sciences sont également très importants. Enfin depuis Piaget, l'épistémologie se trouve au cœur de nombreuses théories de l'apprentissage.

## B- Aspect épistémologique de la didactique des mathématiques

### i) l'épistémologie au cœur de la didactique

La didactique des mathématiques fait une place essentielle à la question des concepts, leur genèse et leur construction.

Pour s'en tenir à cette question des concepts, on peut aborder l'épistémologie en termes de connaissances des processus par lesquels les concepts mathématiques se forment, et ceci dans trois directions selon M.DEVELAY et al. (1989) :

- l'étude de leur élaboration historique,
- les travaux sur les processus de leur construction lors des apprentissages,
- la réflexion sur les mathématiques, les relations entre concepts..

A chaque sujet d'une réflexion épistémologique les auteurs font correspondre un questionnement didactique. On voit ainsi directement les liens étroits entre épistémologie et didactique à propos des concepts.

L'analyse des obstacles et des conceptions des apprenants permet de comprendre la fonction et l'intérêt de donner une perspective historique à l'enseignement des mathématiques. Cette perspective historique peut révéler les conceptions diverses au sujet d'un même concept.

Par ailleurs, les enseignants développent des pratiques liées à ces conceptions des mathématiques et de leur enseignement qu'ils se sont construites au cours de leur formation.

Les didacticiens complètent cette interprétation par des analyses précises des phénomènes de transposition didactique. Y. CHEVALLARD et M. A. JOHNSON (1991) ont montré la nécessité et les effets spécifiques qu'elle induit dans le rapport au savoir des enseignants. Selon les auteurs, le terme de transposition désigne « l'ensemble des transformations que subit un savoir aux fins d'être enseigné ». Cette définition conduit à la distinction entre savoir savant et savoir enseigné et à l'étude de fonctionnement.

## **ii) Sur le rôle de l'histoire des mathématiques en didactique**

Des travaux de Piaget et de Bachelard, la didactique des mathématiques a retenu le concept de genèse. Ce concept comporte deux aspects.

Le premier apparaît dans la perspective à long terme. C'est la phylogenèse des idées mathématiques. Elle s'étale sur des millions d'années.

L'épistémologie envisage cet aspect en décrivant non seulement comment les sciences s'élaborent, sous l'action d'une élite de savants, mais aussi comment elles sont apprises et comprises, par une fraction beaucoup plus large de l'humanité.

Le deuxième aspect apparaît lorsqu'on se place à l'échelle d'une vie humaine. C'est l'ontogenèse de l'appropriation des mathématiques par un individu particulier.

Le didacticien des mathématiques s'intéresse principalement à l'ontogenèse. Il l'a décrit en termes de franchissements de seuils.

Phylogenèse et ontogenèse sont deux regards jetés sur le développement de la pensée mathématique. Si l'élaboration phylogénétique d'une notion mathématique s'étend sur plusieurs millénaires, obligeant les mathématiciens les plus géniaux à marquer des arrêts, n'est-il pas utopique d'espérer qu'un apprenant puisse comprendre complètement la question en une heure ou même en deux ans, sans se heurter à quelques uns des obstacles rencontrés par les savants ?

Ainsi l'étude de l'histoire d'une notion joue pour le didacticien le rôle d'un spectrographe. Elle lui révèle dans un domaine relativement simple, une complexité que le style des exposés modernes contribue à masquer.

Dans un article sur l'enseignement des décimaux, G. BROUSSEAU (1981) écrit : « pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif.[...] Il y a équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique ».

## **C- Objets des études en didactique**

### **I. Le savoir mathématique et la transposition didactique**

Les savoirs constitués se présentent sous des formes diverses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques. Elle est très bien adaptée à l'enseignement mais elle efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés et des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leur usage, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits etc..... Elle masque, ainsi, le vrai fonctionnement de la science pour mettre à sa place une genèse fictive. Pour en rendre plus facile l'enseignement, elle isole certaines notions et propriétés du tissu d'activités où elles ont pris leur origine, leur sens, leur motivation et leur emploi. Elle les transpose dans le contexte scolaire. Les épistémologues appellent transposition didactique cette opération.

#### **i) le travail du mathématicien**

Le mathématicien dans ses activités de recherche, a pour objectifs principaux de résoudre des problèmes que ses connaissances actuelles ne permettent pas de traiter immédiatement. Pour

cela il construit ou reconstruit des outils adaptés à sa situation. Il émet des conjectures sur l'efficacité de ces outils, sur les propriétés locales qui permettraient de replacer le problème dans un cadre mieux connu. Il procède par déduction, mettant en œuvre des calculs formels avant de vérifier leur adéquation aux hypothèses, et obtient quelques fois des résultats souvent éloignés des conjectures initiales. Sa pratique professionnelle l'entraîne à distinguer, parmi ces résultats, ce qui est de nature à devenir des énoncés nouveaux et intéressants pour les autres mathématiciens. Pour les communiquer, il va supprimer toutes les réflexions inutiles, les erreurs ou errements inévitables, il va structurer et réaménager son texte pour l'insérer dans le réseau des connaissances voisines, les replacer dans une problématique et montrer leur caractère novateur. « Ainsi, le producteur du savoir dépersonnalise, décontextualise et détemporalise le plus possible ses résultats » G.BROUSSEAU(1998).

### **ii) le travail du professeur**

Le texte du savoir à enseigner est essentiellement objectivé, décontextualisé et dépersonnalisé.

Les connaissances mathématiques visées sont présentées en termes d'objets à enseigner, même si parfois les programmes indiquent les champs d'applications où ces connaissances ont un statut d'outils. Le professeur va devoir adapter à ses propres connaissances les objets à enseigner, les insérer dans le savoir scolaire et les organiser dans le temps. Il doit présenter les savoirs en jeu (savoirs nouveaux) en les référant à des connaissances déjà acquises (savoirs anciens) par les élèves, dans des cadres où ils prennent du sens. Ainsi, le professeur recontextualise les éléments du savoir à enseigner. Cette recontextualisation est poursuivie par l'élève qui doit, pour donner du sens, insérer le problème dans ses propres représentations et le situer dans son temps d'apprentissage c'est-à-dire qu'il personnalise ce savoir pour évaluer les conjectures et les décisions d'actions à réaliser pour résoudre la tâche qui lui est dévolue.

### **iii) le travail de l'élève**

L'interaction entre enseignant et élève, mettant en jeu ce savoir transposé, est l'essentiel de la relation didactique. Dans le déroulement de l'activité mathématique, les concepts mis en œuvre prendront, pour l'élève, un statut d'outils de résolution de problèmes. C'est en faisant fonctionner ces outils dans des cadres divers qu'il reconstruira ces concepts à un niveau supérieur. Mais pour que l'activité mathématique soit transformée en nouveau savoir, l'élève doit à son tour faire l'effort d'abstraction du contexte dans lequel il fait fonctionner le savoir visé. Il va encore décontextualiser, dépersonnaliser et redonner aux concepts reconstruits leur statut d'objet en soi de l'apprentissage, pour en faire des connaissances mathématiques nouvelles qui rejoindront les connaissances anciennes.

La transposition didactique ainsi définie et le travail de chaque actant délimité dans une séquence d'enseignement nous imposent de savoir dans quelle mesure cette référence au fonctionnement de la recherche est bien nécessaire et pertinente pour l'étude de l'apprentissage et surtout de l'enseignement.

### **Jusqu'à quel point y a-t-il une ressemblance et sous quelles conditions ?**

La théorie anthropologique du didactique (TAD) et la théorie des situations didactiques (TSD) comportent des éléments de réponses à ces questions.

La didactique étudie la communication du savoir et son appropriation par l'élève. Ces deux théories présentent les outils nécessaires pour que la didactique des mathématiques puisse connaître de façon scientifique son objet d'étude et donc permettre des actions contrôlées sur l'enseignement.

## 2. Sur la théorie des situations didactiques

La conception moderne de l'enseignement va demander à l'enseignant de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des problèmes qu'il lui propose. Ce choix judicieux de problèmes est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : *l'enseignant cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible.*

Il est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui propose. Ce jeu ou cette situation est **la situation didactique**.

La théorie des situations didactiques (TSD) propose un modèle réalisant des conditions optimales d'étude : situation adidactique, milieu, variables didactiques, situations fondamentales.

Elle permet également d'analyser les conséquences d'un enseignement donné sur la diffusion des mathématiques : conceptions, erreurs, obstacles.

Il n'y a pas lieu, ici, de développer ces notions. Le lecteur trouvera dans les travaux de G.BROUSSEAU(1998) les éléments nécessaires à leur vulgarisation.

Quant à l'analyse des conséquences, elle se caractérise par un schéma expérimental basé sur des réalisations didactiques en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse des conséquences d'enseignement.

La phase de conception s'effectue en s'appuyant sur un cadre théorique, les connaissances didactiques déjà acquises et sur un certain nombre d'analyses préliminaires :

- l'analyse épistémologique des contenus visés par l'enseignement,
- l'analyse de l'enseignement usuel et de ses effets,
- l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution,
- l'analyse du champ des contraintes dans lequel va se situer la réalisation didactique effective. Elle s'effectuera en distinguant trois dimensions :
  - la dimension épistémologique associée aux caractéristiques du savoir en jeu.
  - La dimension cognitive associée aux caractéristiques cognitives du public auquel s'adresse l'enseignement.
  - La dimension didactique associée aux caractéristiques du fonctionnement du système d'enseignement.
- et en prenant en compte les objectifs de la recherche.

## 3. Sur la théorie anthropologique du didactique

Dans une conception moderne de l'enseignement qui vise l'intégration du pédagogue et du mathématicien, une ligne de recherche est celle qui répond à la question « quelle connaissance est essentielle pour le professeur ? » à l'aide de la notion-clé de « connaissance pédagogique du contenu ». Cette expression désigne l'ensemble des connaissances du professeur relatives à l'apprentissage des élèves à propos d'un contenu spécifique, par exemple les difficultés des élèves ainsi que les moyens de les prévoir et d'y remédier.

L'approche épistémologique part du questionnement et de la modélisation explicite de l'activité mathématique institutionnalisée. La rupture de la transparence du « mathématicien » a permis de mettre en évidence que les lois qui régissent la genèse, le développement et les conditions d'utilisation des connaissances mathématiques scolaires font partie de ces connaissances. Ainsi le premier élargissement du « mathématicien » étant réalisé par la TSD, le deuxième élargissement est dû à la TAD lorsqu'elle propose que les différentes formes de manipulation sociale des

mathématiques (la production, l'enseignement, l'utilisation, la transposition institutionnelle) doivent faire partie de l'objet d'étude de la didactique des mathématiques.

Dans cette optique et afin d'aborder les problèmes relatifs au « problème du professeur de mathématiques », il y a lieu de s'intéresser aux organisations ou praxéologies didactiques -OD - des institutions scolaires (formes de transmission et de diffusion des mathématiques). En même temps, ces organisations didactiques sont supposées soutenues par les différentes organisations ou praxéologies mathématiques scolaires - OM - . Ainsi, l'étude de l'activité mathématique institutionnalisée revient à modéliser ensemble les OD et les OM. Il n'y a pas lieu de développer, ici, ces notions. Le lecteur trouvera dans J.L.DORIER et al. (2001) les éléments nécessaires à leur vulgarisation.

Ce qui suit, illustre parfaitement l'étude à mener en considérant d'une part la matière mathématique enseignée (praxéologie mathématique) ; d'autre part la manière dont on l'étudie (praxéologie didactique). Les deux aspects sont étroitement liés.

La théorie anthropologique du didactique considère que toute activité consiste à accomplir une tâche  $t$  d'un certain type  $T$ , au moyen d'une certaine technique  $\tau$  justifiée par une technologie  $\theta$  qui permet en même temps de la penser voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie  $\Theta$ .

En bref, toute activité met en œuvre une organisation qu'on peut noter  $[T / \tau / \theta / \Theta]$  et qu'on nomme organisation praxéologique ou praxéologie mathématique. Le mot praxéologie souligne la structure de l'organisation  $[T / \tau / \theta / \Theta]$  : le mot grec « praxis », qui signifie « pratique », renvoie au bloc pratico-technique  $[T / \tau]$  et le mot grec « logos », qui signifie « raison », renvoie au bloc technologico-théorique

$[\theta / \Theta]$ . Ces notions permettent de considérer que, par savoir-faire, on désigne le bloc  $[T / \tau]$  et par savoir, on désigne en un sens restreint le bloc  $[\theta / \Theta]$ , et en un sens plus large une praxéologie  $[T / \tau / \theta / \Theta]$  tout entière.

Une praxéologie didactique s'organise autour de : « enseigner une praxéologie mathématique déterminée ». Que sont alors les différents moments de l'étude ?

On suppose, pour répondre, que l'organisation mathématique  $[T / \tau / \theta / \Theta]$ , à mettre en place, est formée d'un unique type de tâches  $T$ . On présente, ci-dessous, un modèle qui distingue six moments réunis en quatre groupes.

#### **Groupe I : Activités d'étude et de recherche**

- 1) Moment de la (première) rencontre avec  $T$
- 2) Moment de l'exploration de  $T$  et de l'émergence de la technique  $\tau$
- 3) Moment de la construction du bloc technologico-théorique  $[\theta / \Theta]$

#### **Groupe II : Synthèse**

- 4) Moment de l'institutionnalisation

#### **Groupe III : Exercices et problèmes**

- 5) Moment du travail de l'organisation mathématique (en particulier de la technique)

#### **Groupe IV : Contrôles**

- 6) Moment de l'évaluation.

La notion de moments ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude : un moment est ici une dimension dans un espace multidimensionnel.

Analyser une praxéologie didactique, c'est ainsi analyser la façon dont sont réalisés (ou ne sont pas réalisés) les six moments de l'étude [M.ARTAUD et al. (2005)]. La praxéologie mathématique observée est construite par l'intermédiaire de la structure COURS / T.D.

- Le cours réalise pour l'essentiel le moment de l'institutionnalisation de l'organisation mathématique en privilégiant souvent l'environnement technologico-théorique

- Les T.D. réalisent le moment du travail de l'organisation mathématique, le moment de l'évaluation (examens) avec une moindre mesure le moment d'institutionnalisation de l'organisation mathématique (plus spécifiquement ici du bloc pratique).

## **IX- Places respectives du Maître, du Savoir et de l'Elève dans le courant actuel de la didactique**

- Il est nécessaire de rappeler les places accordées successivement au savoir sacré et immuable incarné par le maître, puis à la relation réductrice catalysant le savoir, puis après à l'élève considéré comme sujet actif dans l'apprentissage.
- Il est nécessaire de considérer ces 3 pôles, non pas séparément, mais plutôt dans leur inter- relation.

L'explication en est que :

- Le savoir est en évolution. Il ne s'agit pas d'un progrès linéaire mais d'une série d'élèves et de rebondissement dans une perspective évolutive. D'où la nécessité d'une approche épistémologique.
- Le maître n'est plus le monopole du savoir. Son rôle est de médiatiser le savoir compte-tenu de ce qui a été dit précédemment et de la diversité des styles d'apprentissage.
- L'enfant, quant à lui, est le centre du processus éducatif. Il n'est plus perçu comme un récipient vide à remplir progressivement. Sa culture, il la puise aussi bien à l'école qu'en dehors de l'école, tout au long de sa vie.

La sacralisation d'un savoir incarné par le maître supposait que sa simple maîtrise par l'élève dotait ce dernier de savoir-faire et savoir être comme si le passage de l'un à l'autre se faisait par simple induction.

La conception actuelle du savoir révèle qu'il y a certes le savoir savant, véhiculé par les manuels, que le maître assimile à sa façon et l'enseigne à sa manière. On parle alors de savoir-maître qui possède ses caractéristiques propres par rapport au savoir-savant. Mais les caractéristiques individuelles et les connaissances préalables de l'élève font que nous décelons un troisième type de savoir, appelé savoir-élève, qui peut différer à la fois du premier et du deuxième savoir décrits plus haut.

Dés lors, avant d'entreprendre une intervention pédagogique auprès de l'élève, tout formateur est appelé à s'interroger à la fois sur la notion qu'il a à enseigner, dans sa genèse, sa logique et sa méthode propre ainsi que sur les représentations et les structures d'accueil positives de l'élève.

En effet, la didactique actuelle, fondée sur le modèle constructiviste et les données de la psychologie de l'apprentissage, suppose que l'enfant apprend en modifiant de vieilles idées plutôt qu'en accumulant des parcelles supplémentaires d'information.

D'où le modèle constructiviste, inspiré de la théorie de l'équilibration qui éclaire sur les rapports du sujet au réel dans la construction des connaissances.

Signalons aussi le fait, qu'avant tout apprentissage l'enfant arrive avec des pré-requis et des pré-acquis qui peuvent l'aider comme ils risquent aussi d'entraver son apprentissage. Il se produit ce qu'on appelle un « conflit de savoirs » que le didacticien se donne pour tâche de résorber en procédant à une transposition didactique, en essayant de comprendre le système explicatif chez l'élève, en identifiant les blocages pour les franchir, traiter l'erreur et aider l'élève à progresser vers la pensée scientifique.

Quel sont alors les rôles respectifs du maître et de l'élève dans cette transmission du savoir ? Le maître, dit-on, est un médiateur dans cette situation.



Cette médiation se fait par une mise en rapport direct de l'enfant avec le savoir. L'enfant devient de ce fait actif dans l'élaboration de son propre savoir. Le maître n'est plus le transmetteur de savoir mais plutôt l'accompagnateur qui accorde plus d'importance aux structures de la pensée qu'à la simple transmission des contenus.

D'où l'importance pour le maître de bien connaître les processus cognitifs de l'apprentissage pour élaborer ensuite des structures d'aide à l'enfant pour qu'il apprenne. L'inter-relation entre le trois éléments maître-élève-savoir constitue ce qu'on appelle le triangle didactique qui a pour mérite d'accorder autant d'importance à chacun des trois pôles sans négliger aucun d'eux.

Ainsi, la pédagogie devient active, inspirée des théories constructivistes et des théories de l'apprentissage qui soutiennent que la prise en charge par le formé de sa propre formation renforce l'apprentissage.

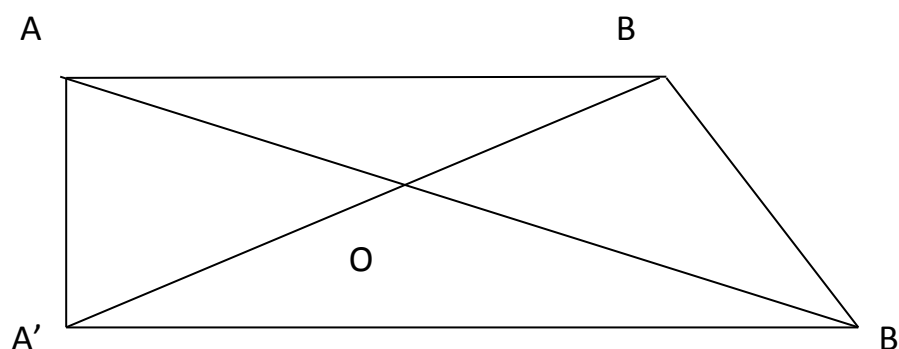
Nous arrivons, par là, à la nécessité d'envisager autrement la formation professionnelle des enseignants aux didactiques, c'est à dire à la maîtrise des processus d'enseignement-apprentissage dans le cadre d'une ou plusieurs disciplines de leur spécialité. Il est nécessaire donc de centrer cette formation sur les enseignants stagiaires comme on exigera d'eux, à leur tour, de centrer les processus

d'enseignement sur leurs propres élèves. Le maître doit jouer un rôle actif et ne pas se contenter de recevoir des messages ou des recettes.

S'agissant plus d'une formation que d'une information, il faudrait impliquer le futur maître dans une prise en charge dynamique et responsable qu'il essaiera plus tard d'appliquer dans sa relation avec ses propres élèves compte tenu de leur diversité et du caractère évolutif du savoir.

Illustrons la dialectique des finalités sur un exercice de géométrie qu'un enseignant se propose d'étudier avec ses élèves :

**Pb :** Les diagonales  $A'B$  et  $AB'$  d'un trapèze de bases  $AB$  et  $A'B'$  se coupent en  $O$ .  
**Démontrer que les triangles  $AA'O$  et  $BB'O$  ont même aire.**



## Point de vue mathématique :

On commence par dégager la structure du problème en cherchant différentes solutions :

### Solution 1.

Les triangles  $ABB'$  et  $AA'B$  ont même aire. On en déduit que  $AA'O$  et  $BB'O$  ont aussi même aire. (on retranche l'aire du triangle  $AOB$ ).

### Solution 2.

La proposition à démontrer est une propriété affine :

- On peut penser à une transformation affine par exemple la symétrie oblique qui échange  $A$  et  $B$  (resp.  $A'$  et  $B'$ ).
- On peut aussi réduire la figure à une forme canonique (trapèze isocèle) à l'aide d'une projection du plan du trapèze sur un plan convenable.

### Solution 3.

Toute droite parallèle aux bases découpe des segments égaux sur les deux triangles à comparer. On en déduit l'égalité des intégrales à calculer par décomposition en tranches (principe de Cavalieri).

Le mathématicien qui se livre à l'analyse du contenu du problème dans le cadre de la pédagogie sans élèves jugera sans doute que la première solution offre peu d'intérêt en ce sens qu'elle ne débouche sur aucune idée générale. Les solutions deux et trois sont des introductions à des doctrines mathématiques de plus grande portée.

## Point de vue institutionnel :

L'enseignant prend en compte les réalités scolaires. Il tiendra compte de la classe où il enseigne. D'après les programmes scolaires, la solution une est accessible dès que les élèves ont appris la formule  $S = \frac{1}{2} ah$  (surface d'un triangle de base  $a$  et de hauteur  $h$ ).

Il s'interroge alors sur l'usage pédagogique qu'il pourrait faire de l'énoncé.

- Se contentera-t-il d'exposer une des solutions choisies ? oralement ? en dictant le corrigé ? en provoquant une recherche en classe ? individuelle ? collective ? en petits groupes ?
- L'énoncé « Pb. » peut-il constituer un sujet de devoir ? un sujet d'examen ? dans ce cas et en dehors d'une réussite totale ou d'un échec complet, y a-t-il d'autres performances partielles à attendre de certains élèves ? Comment peut-on corriger et noter une telle épreuve ? Quelle conclusion peut-on tirer à propos d'un candidat qui réussit ? qui échoue ?
- Y a-t-il d'autres utilisations pédagogiques de l'énoncé ?

Autant de questions extra-mathématiques que l'enseignant va trancher en mettant en avant les objectifs pédagogiques dans l'organisation de son enseignement.

## Point de vue didactique :

On s'interroge sur le comportement attendu des élèves et du profit qu'ils peuvent tirer de l'exercice.

Un article paru en 1962 rend compte d'une observation conduite par une enseignante en soumettant l'énoncé « Pb. » à dix huit écoliers de Leningrad. L'âge des élèves n'est pas indiqué mais il s'agit manifestement d'enfants qui ne pourraient songer qu'à la première solution.

Voici les résultats obtenus :

- 13 élèves sur 18 sont finalement parvenus à la solution
- 2 élèves sur 13 ont liquidé la question en trois minutes (3 mn.) environ, le plus lent chercha pendant 40 minutes.
- 5 ne parvinrent pas à une solution.

L'enseignante a codé et classé les démarches de réponses.

Elle a observé et analysé les causes d'échec des cinq élèves et de ceux qui ont été retardé dans leur découverte.

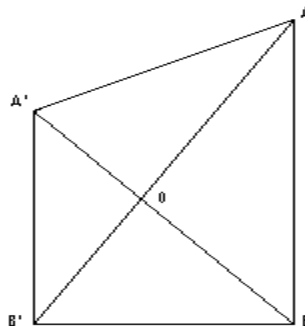
S'agissait – il de lacunes dans les connaissances ?

Tous les 18 élèves connaissaient la formule «  $S = \frac{1}{2} ah$  », mais tous n'en avaient pas acquis une maîtrise opérationnelle. Il est montré que l'échec est essentiellement causé par l'incapacité à passer de la formule figée «  $S = \frac{1}{2} ah$  » **(1)** au corollaire dynamique « un triangle variable MBC dont la base BC reste fixe garde une aire constante quand le sommet M décrit une droite parallèle à la base » **(2)**.

Le passage de **(1)** à **(2)** est facile lorsqu'il est explicitement demandé. Mais un élève moyen éprouve une réelle difficulté à penser spontanément à **(2)** lorsqu'il ne connaît que **(1)**.

Il n'est pas évident pour tous que les triangles ABA' et ABB' peuvent être envisagés comme deux positions d'un triangle variable que l'on déforme conformément à **(2)**.

On peut aussi déborder le cadre de cette étude en examinant d'autres phénomènes didactiques.



Ainsi, l'étude du problème peut être poursuivie à un triple point de vue qui dégage successivement sa structure mathématique, sa structure curriculaire et sa structure cognitive et opérationnelle.

**La didactique des mathématiques va prendre en charge les oppositions entre ces trois structures.**

## X- LES APPORTS DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Les erreurs des élèves témoignent des difficultés qu'ils ont en mathématiques. Les didacticiens font l'hypothèse que celui qui produit une erreur, comme celui qui n'en commet pas, mobilise, pour une part sa façon de comprendre la question et, pour une autre part les moyens dont il dispose pour élaborer une réponse. Pour aider l'enfant à ne plus commettre une erreur, certains chercheurs ont proposé des situations d'enseignement dont l'objectif est que l'élève change sa façon de connaître plutôt que de lui montrer une autre façon sans tenir compte de ses connaissances initiales.

Mais on parle aussi de difficulté en mathématiques pour les élèves qui n'arrivent pas à résoudre des problèmes. Autrement dit, on parle aussi de difficulté pour ceux qui « sèchent » sur les problèmes. Didacticiens et psychologues tentent de comprendre ces difficultés pour aider les élèves dans cette activité fondamentale pour l'apprentissage des mathématiques. D'une part, d'un point de vue théorique, en essayant de comprendre ce qui se passe « dans la tête » de l'élève quand il cherche et, d'autre part, d'un point de vue pratique, en proposant des moyens d'apprendre à résoudre les problèmes.

En utilisant le système didactique (M, E, S), nous allons montrer comment les didacticiens distinguent plusieurs types de difficultés en mathématiques. Certaines d'entre elles trouvent leur source dans la relation entre l'élève et le savoir c'est-à-dire dans les conceptions même des objets mathématiques que les élèves ont acquises. D'autres s'expliquent par le contrat didactique, l'élève répond à la question du maître plutôt qu'à la question mathématique. Entre ces deux extrêmes, on trouve des erreurs d'interprétation de la tâche proposée et des erreurs de mise en oeuvre de la méthode de résolution.

### 1. Difficultés d'apprentissage et contrat didactique

Nous regroupons sous ce titre les erreurs dues au fait que l'élève répond davantage à la question du maître qu'à la question mathématique.

#### 1.1. Exemples de problèmes

Nous avons déjà évoqué l'exemple célèbre du problème proposé par l'IREM de Grenoble : « L'âge du capitaine ».

Nous avons vu, en enseignement dirigé, un exercice où la tâche de l'élève était de placer des nombres sur la ligne numérique. Rappelons son énoncé :

Écris dans le bon ordre chaque nombre à la place qui convient

452      -      479      -      289

	300		400		500	
--	-----	--	-----	--	-----	--

Le pourcentage de réussite est de :

- 37% si l'on ne tient pas compte de l'ordre des nombres 452 et 479 dans le bon intervalle.
- 45,6% des élèves placent correctement 289 et seulement l'un des deux nombres 452 et 479, l'autre étant mal placé ou absent.

C'est l'importance du pourcentage d'élève qui placent correctement 289 et l'un seulement des deux nombres 452 et 476 qui laissent à penser que pour de nombreux élèves, il était interdit d'écrire deux nombres dans une seule case de réponse.

#### 1. 2. Quelques pistes pour la rééducation : les situations a-didactiques

Même s'il semble que la gravité de telles erreurs n'est pas très importante puisqu'elle ne révèle pas une connaissance mathématique inadaptée à la tâche proposée, il convient pourtant de ne pas les négliger afin de permettre à l'élève de s'engager « mathématiquement » dans un

problème. Mais pour qu'un élève s'engage dans la résolution d'un problème, encore faut-il que ce problème soit suffisamment riche.

Un équilibre, adapté à chaque élève, doit donc être trouvé par le rééducateur ou l'orthophoniste. Les problèmes proposés doivent être assez simples pour que l'élève puisse se lancer dans l'élaboration d'une démarche de résolution et assez complexes pour que l'élève puisse valider ses réponses sans recourir à l'adulte.

## 2. Difficultés et transposition didactique

Plusieurs didacticiens, dont particulièrement Régine DOUADY et Marie-Jeanne PERRIN, ont remarqué que la notion de périmètre comme la notion d'aire d'une figure plane posaient souvent des difficultés aux élèves. Examinons comment l'interprétation de la tâche par l'élève, c'est-à-dire comment l'élève s' imagine ce qu'il doit faire pour résoudre le problème qu'on lui pose, peut être à l'origine de certaines erreurs.

### 2.1. Exemples de problèmes

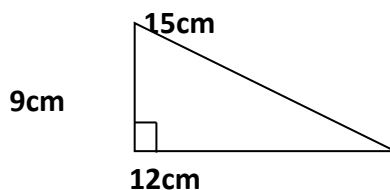
Une première interprétation des difficultés que posent les notions d'aire et de périmètre, que nous approfondirons ultérieurement, provient des mathématiques elles-mêmes. En effet, le périmètre et l'aire d'une figure sont deux grandeurs qui rendent compte de la taille de la figure. Ces deux grandeurs sont liées mais leur relation n'est pas simple. Par ailleurs ces deux grandeurs n'obéissent pas aux mêmes lois : si l'on accole deux rectangles, l'aire de la figure ainsi formée est la somme des aires des deux rectangles mais il n'en est rien pour le périmètre.

Ces difficultés mathématiques font que bien souvent, les deux notions sont réduites à l'application de formules. Ainsi, quand la question du calcul de l'aire ou du périmètre d'une figure est posée, l'élève recherche la bonne formule à appliquer avec les valeurs fournies. Analysons un exemple issu de l'évaluation nationale à l'entrée en sixième de 1994 :

Quelle est l'aire de ce triangle ?

Réponses de trois élèves A, B et C.

A :  $108 \text{ cm}^2$ , B :  $42 \text{ cm}^2$ , C :  $93 \text{ cm}^2$



Pour ces trois élèves, une question qui porte sur l'aire ou le périmètre d'une figure appelle une application de formule. La formule de l'aire du triangle n'est pas induite par la disposition classique d'un triangle posé sur son plus long côté, en revanche la disposition du triangle rappelle celle du rectangle.

Ainsi peut-on expliquer que l'élève A calcule l'aire du rectangle dont les côtés sont 9cm et 12cm c'est-à-dire les côtés perpendiculaires du triangle rectangle.

Le deuxième élève, lui, calcule le périmètre de ce rectangle.

Pour le dernier élève, on remarque un effet de contrat : « dans un problème il faut utiliser toutes les données numériques pour répondre. » L'élève calcule l'aire du rectangle et retire, non pas la moitié du résultat trouvé mais 15 qui figure dans l'énoncé à la place du triangle dont il faut calculer l'aire...

### 2.2. Quelques pistes pour la rééducation : Repenser la transposition didactique

De nombreux didacticiens tentent de montrer que, si face à une notion dont l'acquisition semble difficile, l'enseignant simplifie et réduit l'activité à l'application d'une recette, il risque d'y laisser le sens et l'enfant risque d'oublier la recette. Dans ce cas, finalement, le professeur passe à côté de l'enseignement des mathématiques et l'élève passe à côté de l'apprentissage. Face à des réponses analogues à celles qui ont été produites par les élèves A, B et C, le rééducateur ou l'orthophoniste pourra, par exemple demander à l'enfant de reproduire ce triangle sur un papier quadrillé en cm,

de compter les  $\text{cm}^2$  contenus à « l'intérieur » du triangle. Il pourra enfin amener l'élève à reconstruire la démarche qui justifie la formule de l'aire du triangle en complétant le triangle par un rectangle...

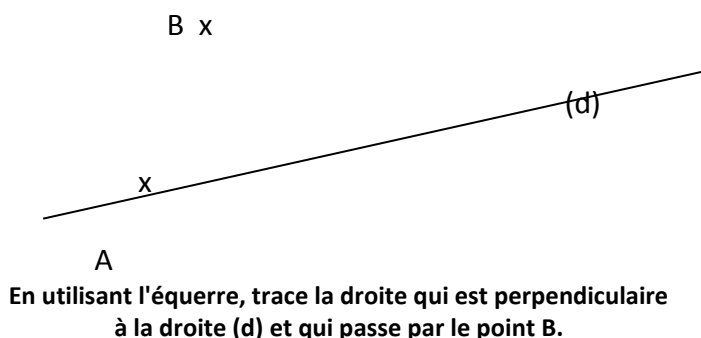
### 3. Difficultés et conceptions

Certaines erreurs sont produites par une conception erronée de l'un des objets mathématiques qui interviennent dans l'énoncé du problème ou dans la procédure de résolution. Il arrive aussi que la conception qui met l'élève en difficulté ne soit pas erronée mais seulement inadaptée à la situation.

Voyons quelques exemples.

#### 3. 1. Exemple de conception erronée

Ainsi, par exemple, on a pu remarquer que les élèves identifient plus difficilement les notions qui modélisent une relation entre deux objets que les notions qui qualifient un seul objet. Par exemple les élèves, à l'entrée en sixième, sont encore nombreux à confondre « verticale » et « perpendiculaire » ainsi, ils sont 25% à tracer une « droite » verticale à l'exercice suivant, posé en 1993 dans le cadre des évaluations nationales.



#### 3.2. Exemple de conception inadaptée

Citons l'expérience de Marie-Alix GIRODET (1996) réalisée avec des étudiants de niveau Bac+3. Elle présentait le ticket de caisse et demandait de lire le contenu du ticket puis de vérifier le prix à payer à l'aide d'un ordre de grandeur puis de le vérifier exactement à la calculatrice.

Toutes les personnes interrogées parviennent à lire le ticket, elles disent facilement 69 francs 90 par kg et 284 grammes pour le poids. Pourtant une sur trois ne parvient pas à contrôler le prix affiché, ne sachant pas quelle opération taper à la calculatrice. Pratiquement aucune d'entre elles ne parvient à déterminer un ordre de grandeur du prix.

#### BOEUF MERLAN

CODE 135

#### SATISFAIT OU REMBOURSÉ

A consommer avant le

2 2 fev 8 6

Prix Unitaire	Poids net	Prix à payer
6 9,9 0 F/kg	0,2 8 4 kg	1 9,8 5 F

D'autres travaux menés sur la multiplication permettent de montrer que c'est la conception de la multiplication qui empêche les personnes de multiplier le prix unitaire par le poids. D'une part, certaines personnes ont du mal à mobiliser la multiplication quand le contexte ne permet pas de l'interpréter comme une addition répétée. Or ici, les nombres étant décimaux, l'addition répétée

n'est pas une conception adaptée de la multiplication. Ce serait pourtant le cas pour un achat de 3 kg de viande. D'autre part, la multiplication est souvent conçue comme une opération qui augmente le nombre de départ, or ici, le prix à payer est inférieur au prix unitaire car le poids de viande acheté est lui-même inférieur à 1 kg.

### **3.3. La notion d'obstacle chez BACHELARD et BROUSSEAU**

Les élèves comme les enseignants sont confrontés à des erreurs qui persistent malgré différentes tentatives pour les dénoncer. Guy BROUSSEAU (1978, 1998) propose de distinguer, parmi les connaissances mathématiques, celles qui ont un domaine de validité restreint mais que des élèves utilisent tout de même, et persistent à utiliser, en dehors de ce domaine de validité. Il appelle **obstacle** une telle connaissance. Le premier à avoir mis en avant cette idée d'obstacle est Gaston BACHELARD qui a écrit en 1938, *la formation de l'esprit scientifique*, où il précise que l'obstacle n'est pas une connaissance totalement inadaptée ; au contraire, selon cet auteur, un obstacle résiste parce que c'est une connaissance adaptée à certaines situations et qu'elle permet donc des réussites.

Dans le problème du contrôle du prix de la viande, ce qui pose une difficulté à une personne sur trois c'est bien la conception de la multiplication à la fois comme une addition répétée et comme une opération qui agrandit. La multiplication n'est pas reconnue par ces personnes car la conception qu'elles en ont n'est pas adaptée à cette situation. Pourtant cette conception convient aux premiers apprentissages, c'est

pourquoi elle est souvent enseignée. Il faudra, indique BROUSSEAU, proposer des situations qui permettent de mettre en défaut cette conception, qui permettent d'en construire une nouvelle qui intègre la précédente pour que l'élève puisse surmonter l'obstacle.

## **4. Au carrefour de la didactique et de la psychologie cognitive**

La méthode de résolution qu'élabore un sujet est liée à la représentation qu'il se fait du problème. On aurait tort de sous-estimer l'importance de la représentation du problème et de la réduire à une simple traduction de l'énoncé dans un langage adapté au traitement mathématique. Des chercheurs en psychologie cognitive ont montré que l'élaboration d'une représentation du problème est une activité cognitive à part entière. Jean JULO (1995), psychologue, chercheur à l'Université et à l'IREM de Rennes et formateur de professeurs de mathématiques, montre que suivant la représentation qu'on se fait du problème, on réussit ou non à raisonner correctement donc à élaborer correctement ou non une méthode de résolution.

### **4.1. Un exemple où la représentation de l'énoncé est opérationnelle**

Dans ce premier exemple, l'énoncé est quasiment illisible. Sa représentation demande de gros efforts, à chaque instant on a l'impression qu'on perd le fil des relations décrites. Mais lorsque cet enchevêtrement relationnel est démêlé, alors la solution s'impose.

*Si le problème que vous avez résolu avant que vous ayez résolu celui-ci était plus difficile que le problème que vous avez résolu après que vous ayez résolu le problème que vous avez résolu avant que vous ayez résolu celui-ci, est-ce que le problème que vous avez résolu avant que vous ayez résolu celui-ci était plus difficile que celui-ci ?*

### **4.2. Un problème où la représentation de l'énoncé n'est pas opérationnelle**

Dans ce deuxième exemple qui ne demande aucune connaissance mathématique d'un niveau supérieur à celui du cycle 2 de l'école élémentaire, la représentation du problème ne pose pas de grande difficulté mais c'est l'opérationnalisation qui est difficile. Ce problème peut constituer un

véritable « casse-tête » car ce n'est pas la représentation de l'énoncé qui pose problème mais bien sa transformation en une représentation opérationnelle.

*Vous appartenez au service des fraudes spécialisé dans la fausse monnaie. Vous êtes en présence de 12 sacs numérotés contenant chacun plusieurs centaines de pièces de 2€. Vous savez que l'un de ces sacs ne contient que des fausses pièces, les autres n'en contiennent pas. Vous savez également que les pièces authentiques pèsent 9g et que les fausses pièces ne pèsent que 8g. Comment pouvez-vous déterminer, en une seule pesée, le sac où se trouvent les fausses pièces ? (Vous pouvez peser ce que vous voulez mais vous n'avez le droit de n'utiliser qu'une seule fois la balance et donc de ne faire qu'une seule mesure).*

#### **4.3. Un problème de mise en oeuvre de la représentation**

Voici un problème donné à une classe de CM1 avant que la division n'ait été enseignée.

***Un pâtissier a fabriqué 274 chocolats. Il prépare des paquets. Dans chaque paquet, il doit mettre 16 chocolats. Combien peut-il remplir de paquets ?***

***Démarches de trois élèves A, B et C.***

***A pose l'opération  $274 \times 16$ .***

***B pose l'opération  $274 - 16$ .***

***C calcule  $16+16+16=48$  ;  $48+48+48+48=192$  ;  $192+48=240$  ;  $240+34=274$  et, finalement, il répond 34 paquets.***

Les élèves A et B n'ont pas une représentation complète du problème, ils élaborent une méthode de résolution à partir d'indices contenus dans l'énoncé.

- Le premier repère un indice verbal et l'associe à une opération, l'opération qu'il faut effectuer pour résoudre le problème : le mot **chaque** est associé à la multiplication.
- Le deuxième comprend, contrairement au premier, qu'il y aura moins de paquet que de chocolats et effectue une association entre réduction et soustraction.
- Le troisième élève, en revanche a élaboré une représentation du problème conforme à l'énoncé. Cette représentation est opérationnelle puisque l'élève simule la fabrication des paquets. Mais sa méthode est trop coûteuse entraîne un phénomène de surcharge mentale de travail. En fin d'opérationnalisation, l'élève ne sait plus bien ce qu'il cherche. Pour cet élève, on pourra dire que la difficulté se situe au niveau de la mise en oeuvre de la représentation du problème.

#### **4.4. Quelques pistes pour l'enseignement et la rééducation**

Les connaissances actuelles nous incitent à rester modeste quant à l'aide qu'on peut apporter à la représentation des problèmes.

Par les « Ateliers de Raisonnement Logique (ARL) » ou par le « Programme d'Enrichissement Instrumental (PEI) » certains psychologues proposent de remédier aux carences qui pourraient exister au niveau de compétences fondamentales par une rééducation cognitive. Les premiers résultats de ces tentatives ont semblé encourageants mais par la suite, les effets de ces programmes sont apparus beaucoup moins nets. Il faut dire que l'évaluation des acquis en ce domaine n'est pas facile.

Certains didacticiens envisagent un enseignement métamathématique c'est à dire un enseignement sur les mathématiques pour aider les élèves à organiser les savoirs et les outils dont ils disposent pour résoudre certaines catégories de problèmes. Des auteurs de manuels scolaires s'inspirent de ces propositions pour rédiger quelques pages intitulées « méthodes » que les enseignants peuvent utiliser afin de programmer un tel enseignement.

Il nous semble important, finalement, de ne pas oublier, conformément à la théorie des champs conceptuels de **Gérard VERGNAUD**, que les situations elles-mêmes font partie du sens des



concepts mathématiques et qu'il n'y a pas de rééducation qui ne passe par un travail approfondi avec l'enfant des situations rencontrées.

## XI- Quelques Travaux réalisés :

- « Etude des performances des élèves aux épreuves de mathématiques dans les évaluations nationales »

Le taux de réussite au BEF 2004 est de 40,14 % pour la wilaya de Constantine. BEF – JUIN 2004

Pourcentages des **candidats** suivant la note obtenue à l'épreuve de mathématiques.

Note	Nombre	%	Nombre	%	Nombre	%		
N<5	10134	51,99	15530	79,67	15530	79,67		
5 ≤ N < 10	5396	27,68						
10 ≤ N < 12	1495	7,67	2679	13,74	3962	20,33		
12 ≤ N < 14	1184	6,07						
14 ≤ N < 16	712	3,66						
16 ≤ N < 18	431	2,21	1283	6,59				
18 ≤ N < 20	140	0,72						
	19492	100,00	19492	100,00			19492	100,00

On peut se demander, si ces performances ne sont pas dues à une incompréhension de certaines notions mathématiques lors des apprentissages. Toutefois, il y a lieu de souligner qu'il ne s'agit pas d'un échec spécifique mais qu'il s'étend aux autres matières exceptées les matières - Arabe- Education Islamique et Sport.

Matière \ Note	Note						
	N < 5	5 ≤ N < 10	10 ≤ N < 12	12 ≤ N < 14	14 ≤ N < 16	16 ≤ N < 18	18 ≤ N < 20
Arabe	00,43	24,6	31,17	27,07	13,21	03,33	00,15
Mathématiques	51,99	27,7	07,67	06,07	03,66	02,21	00,72
1 <sup>e</sup> langue étra.	28,77	39,7	11,37	08,94	06,62	03,84	00,77
2 <sup>e</sup> langue étra.	12,59	44,6	16,02	12,30	08,20	04,41	01,83
Sc. de la nat.	17,97	37,3	15,96	13,89	10,12	04,19	00,60
Technologie.	07,50	28,1	18,87	19,65	15,57	07,86	02,48
Histoire- Géo.	18,64	49,7	16,36	09,46	04,49	01,15	00,16

<i>Edu. Isla.</i>	03,15	15,4	10,62	14,11	16,46	18,46	<b>21,77</b>
<i>Edu. Civique</i>	07,98	<b>43,0</b>	19,71	14,09	09,28	04,89	01,06
<i>Sport</i>	01,19	00,23	00,95	10,70	<b>44,22</b>	38,51	04,19
<i>Moyenne</i>	03,69	<b>56,19</b>	24,11	10,97	04,07	00,95	00,02

Ainsi, il est clair que les mathématiques semblent être la matière où les performances des candidats au BEF- 2004 sont les plus faibles, voire inquiétantes.

**BAC – Juin 2004 (taux global de réussite : 48.62%) à l'échelle de la wilaya**

Pourcentages des **bacheliers** suivant la note obtenue à l'épreuve de mathématiques.

Type d'enseignement	Type de Baccalauréat	Nbre de Bacheliers	N ≥ 10	%	N < 10	%
Enseignement Général.	Sc. Nat. vie.	5460	1595	29,21	3865	70,79
	Sc. exactes.	366	130	35,52	236	64,48
	Sc. humaines.	3012	1446	48,01	1566	51,99
	Gestion/ Eco.	628	237	37,74	391	62,26
	Sc. islamiques.	593	221	37,27	372	62,73
	Lettres/langues	374	130	34,76	244	62,24
	Tech. Compt.	278	99	35,61	179	64,39
Enseignement Technique.	Fab. mécanique.	282	32	11,35	250	88,65
	Electrotechnique	213	26	12,21	187	87,79
	Génie électrique	204	20	09,80	184	90,20
	Travaux publics.	201	14	06,97	187	93,03
	Gén. mécanique.	151	15	09,93	136	90,07
	Chimie.	140	15	10,71	125	89,29
	Génie civil.	97	11	11,34	86	88,66
	Electronique.	69	9	13,04	60	86,96
Classes spéciales.	Mathématiques.	20	16	80,00	4	20,00
	Philosophie.	12	6	50,00	6	50,00

Pour les Baccalauréats SNV et Sciences humaines, le tableau ci-dessous indique la répartition de la note obtenue à l'épreuve de mathématiques.

	Bac sciences de la nature et de la vie				Bac sciences humaines	
	5460				3012	
<b>N &lt; 5</b>	1273	<b>23,32 %</b>	} <b>70,8 %</b>	581	<b>19,29 %</b>	} <b>51,99 %</b>
<b>5 ≤ N &lt; 10</b>	2592	<b>47,48 %</b>		985	<b>32,70 %</b>	
<b>10 ≤ N &lt; 12</b>	796	<b>14,58 %</b>	} <b>29,20 %</b>	459	<b>15,24 %</b>	} <b>48,01 %</b>
<b>12 ≤ N &lt; 14</b>	485	<b>08,88 %</b>		371	<b>12,32 %</b>	
<b>14 ≤ N &lt; 16</b>	226	<b>04,14 %</b>		297	<b>09,86 %</b>	
<b>16 ≤ N &lt; 18</b>	66	<b>01,21 %</b>		226	<b>07,50 %</b>	
<b>18 ≤ N &lt; 20</b>	22	<b>0,40 %</b>		93	<b>03,08 %</b>	

Ainsi, comme pour le BEF-2004, les mathématiques semblent être la matière où les performances des bacheliers Bac-2004 toutes filières confondues et explicitement Bac- SNV et Bac- SH, sont les plus faibles. Ils s'agit, ici, de difficultés se rapportant à la matière « mathématique » car on a affaire, ici, à des **titulaires de baccalauréats**.

**Des recherches didactiques pourraient expliciter et élucider les questionnements relatifs aux conditions et aux raisons ayant conduit aux résultats observés en mathématiques dans des épreuves nationales de fin de cycles dans les enseignements moyen et secondaire.**

## Qu'en-est-il dans l'enseignement supérieur ?

### HYPOTHESES DE TRAVAIL :

Le contenu cognitif et l'organisation rédactionnelle étant deux aspects importants d'un texte mathématique, on peut poser les hypothèses que:

1. D'un texte à un autre, sur un même sujet et d'un sujet à un autre, pour un même lecteur, la correspondance entre le contenu cognitif et l'organisation rédactionnelle peut considérablement varier.
2. L'écart entre la base de connaissance et le contenu cognitif peut aussi beaucoup varier. Nous avons proposé deux problèmes dans le cadre d'une étude sur les implications matérielle et formelle et qui consiste à étudier, entre autre, les équivalences des phrases langagières et des phrases symboliques avec une phrase donnée.

Dans une première étape, nous avons quantifié ces équivalences auprès d'étudiants de 3<sup>ème</sup> année de Licence Mathématiques académique de l'Université de Constantine ayant suivi un enseignement dans une langue non maternelle.

Problème 1 :

*Reconnaissance de l'équivalence (ou non) avec une phrase donnée*

Enoncé :

Soit la phrase : «  $x^2$  se termine par 996 si le nombre  $x$  se termine par 114 » que l'on notera « A si B ». Les phrases suivantes sont-elles équivalentes à la phrase donnée ?

[Le problème 1 a été proposé à des étudiants d'universités scientifiques (Grenoble, Lyon et Montpellier) et d'IUFM (Grenoble, Chambéry), plusieurs années de suite et à différents niveaux.]

## Résultats

Nous avons porté sur le tableau ci-dessous les réponses de 127 étudiants.

de 3<sup>ème</sup> année de Licence Mathématiques académique de l'Université.

Nous y avons joint, une (\*) aux réponses correctes du point de vue de la logique formelle.

	Oui	Non	Je ne sais pas	Equivalence (ou non) %
<b>Pour que A il faut que B</b>	45	<b>81*</b>	1	<b>63.78</b>
<b>Pour que B il faut que A</b>	<b>84*</b>	39	4	<b>66.14</b>
<b>Pour que A il suffit que B</b>	<b>97*</b>	28	2	<b>76.37</b>
<b>Pour que B il suffit que A</b>	23	<b>99*</b>	5	<b>77.95</b>
Non A ou B	19	<b>98*</b>	10	<b>77.16</b>
A et non B	13	<b>107*</b>	7	<b>84.27</b>
(non B) ou A	<b>102*</b>	24	1	<b>80.31</b>
A => B	16	<b>98*</b>	13	<b>77.16</b>
non A => non B	<b>100*</b>	27	0	<b>78.74</b>
B seulement si A	<b>70*</b>	47	10	<b>55.12</b>
non B si A	11	<b>104*</b>	12	<b>81.89</b>

**Les phrases qui sont (re)connues assez bien, voire très bien, comme équivalences ou non à**

**« A si B » sont les suivantes :**

- si B alors A
- B est une condition suffisante pour A ..... (97 bonnes réponses)
- «  $B \Rightarrow A$  » n'est pas équivalent à «  $A \Rightarrow B$  »..... (98 bonnes réponses)
- A n'est pas une condition suffisante pour B..... (99 bonnes réponses)
- «  $B \Rightarrow A$  » est équivalent à « non A  $\Rightarrow$  non B »..... (100 bonnes réponses)
- «  $B \Rightarrow A$  » est équivalent à « (non B) ou A »..... (102 bonnes réponses)
- «  $B \Rightarrow A$  » n'est pas équivalent à « (non B) si A »..... (104 bonnes réponses)
- «  $B \Rightarrow A$  » n'est pas équivalent à « A et non B »..... (107 bonnes réponses)

**Ce qui est peu reconnu, comme équivalent à « A si B », alors que c'est vrai :**

- B seulement si A ..... (70 bonnes réponses)
- B n'est pas une condition nécessaire pour A..... (81 bonnes réponses)
- A est une condition nécessaire pour B ..... (84 bonnes réponses)

**Pour les 4 premières phrases, la réponse correcte est NOON. 59.84 % (76 étudiants sur 127), ont produit une réponse correcte conforme à  $B \Rightarrow A$ . Or, on a enregistré aussi que 40.16% (51 étudiants sur 127) ne peuvent reconnaître des phrase équivalentes (ou non) à la phrase « A si B ».**

Il y a lieu de souligner que :

- 18 étudiants sur 51 ont produit la réponse « ONNO » qui est conforme à «  $A \Rightarrow B$  ». C'est comme si l'utilisation quasi exclusive du raisonnement déductif dans l'enseignement, même à un niveau élevé, ne permet pas de construire une connaissance sur l'implication comme concept mathématique, car ce qui se construit semble rester très proche de la logique naturelle.
- 9 étudiants sur 51 ont produit des réponses partielles. Ce sont des productions qui comportent la réponse « je ne sais pas ».
- 24 étudiants sur 51 [ONON(13), NONO(5), ONNN(4), OONN(1), OOOO(1)] ont produit des réponses incorrectes faisant ressortir essentiellement des contradictions :  $B \Leftrightarrow A$  et  $B \neq A$ .

La grande diversité des réponses incorrectes pour ces quatre phrases révèle qu'il y a une réelle difficulté à distinguer condition nécessaire, condition suffisante et leurs rapports à l'implication ou à l'équivalence.

La reconnaissance de l'équivalence (ou non) avec la phrase « A si B » paraît, ici aussi, mieux réussie quand il s'agit de la condition suffisante. La condition nécessaire semble poser quelques difficultés à la population interrogée.

Dans le raisonnement déductif, on note que l'implication est utilisée pour avancer dans la preuve, elle permet de passer d'une affirmation (hypothèse ou donnée) à une autre par une règle d'inférence. On écrit :  $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow \dots$

Or, dans cette écriture, P est avant Q, qui est avant R, etc... et P suffit pour déduire Q, qui suffit pour déduire R, etc.... On dit aussi « Si P alors Q ». On note aussi qu'on n'utilise jamais « P

seulement si Q », puisque P est vérifiée d'abord, pour en déduire Q. D'où la question qui peut se poser : si P est avant Q, comment Q peut-elle être une condition nécessaire à P ?

**On peut faire l'hypothèse que l'enseignement usuel, qui privilégie très fortement le raisonnement déductif, crée une conception temporelle et causale de l'implication qui se résume ainsi :**

*« Examiner ou utiliser  $P \Rightarrow Q$  n'a de sens que si P et Q ont un lien de cause à effet entre eux, et dans «  $P \Rightarrow Q$  », P est avant Q. »*

Cette conception fait obstacle à l'objet « implication », puisque, en logique formelle, on décide de la véracité d'une implication uniquement sur le critère de véracité de chacune des propositions.

### **Problème 2 : Transcription en termes symboliques d'une phrase donnée**

Enoncé : On considère les assertions A et B suivantes :

**A : « Une condition pour qu'un entier N différent de 2 soit premier est qu'il soit impair »**

**B : « Une condition pour qu'un nombre soit divisible par 5 est que l'écriture en base 10 de ce nombre se termine par un zéro ».**

1. Ecrire les assertions A et B dans le langage symbolique.
2. Indiquer, pour chaque cas, la condition nécessaire et la condition suffisante.
3. Y-a-t-il dans A et B des conditions nécessaire et suffisante à la fois ? justifier votre réponse.

### **Résultats**

Soient  $A_1$  : « N différent de 2 est premier » ;

$A_2$  : « N est impair »

$B_1$  : « M est divisible par 5 »

$B_2$  : « l'écriture de M en base 10 se termine par zéro »

Le tableau ci-dessous indique les types de réponses produites :

	Question 1	Question 2	Question 3
--	------------	------------	------------

			Assertion A		Assertion B		oui	non	N.R.
	A1 => A2	B1 => B2	A2 C.N .	A1 C.S.	B2 C.N.	B1 C.S.			
Réussite	36	5	48	48	24	25	//// /	54	////
Echec	90	121	53	53	54	54	19	//// /	////
N.R.	1	1	6	5	5	5	//// /	//// /	54
A1	//// //	//// //	17	//// //	//// //	//// //	//// /	//// /	////
Autre	//// //	//// //	3	4	//// //	//// //	//// /	//// /	////
A2	//// //	//// //	//// /	17	//// //	//// //	//// /	//// /	////
B1	//// //	//// //	//// /	//// //	41	//// //	//// /	//// /	////
B2	//// //	//// //	//// /	//// //	//// //	40	//// /	//// /	////
Autre	//// //	//// //	//// /	//// //	3	3	//// /	//// /	////

Réponses à la Question 1 :

Assertion A : Réussite : **28.34%**, Echec : **70.87%**

Assertion B : Réussite : **3.94%**, Echec : **95.23%**

Commentaires :

L'énoncé B traite d'une implication où on décide de la véracité de celle - ci uniquement sur la véracité de chacune des propositions B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub> qui la composent: B<sub>1</sub> :« M est divisible par 5» est vrai signifie que M est multiple de 5 différent de zéro.

B<sub>2</sub> : « l'écriture de M en base 10 se termine par zéro » est vrai signifie que M est un multiple de 10 ou M = 0.

Pour les assertions A et B, peut – on supposer que les très faibles réussites enregistrées à la question 1 sont dues à une mauvaise perception de l'implication proposée ? Les réponses fausses produites suggèrent « A<sub>2</sub> => A<sub>1</sub> et « B<sub>2</sub> => B<sub>1</sub> ».

Ce qui revient à considérer que « M est divisible par 5 » est toujours vrai. Que devient alors le cas M = 0 ? Peut- on dire que M = 0 est divisible par 5 ?

Les réponses correctes «B<sub>1</sub> => B<sub>2</sub> » et « A<sub>1</sub> => A<sub>2</sub> » sont, ici, équivalentes respectivement à :

« $B_1 \Rightarrow B_2$ » est équivalente à :	« $A_1 \Rightarrow A_2$ » est équivalente à :
« $B_2$ si $B_1$ »,	« $A_2$ si $A_1$ »,
« Pour que $B_1$ il faut que $B_2$ »,	« Pour que $A_1$ il faut que $A_2$ »,
« Pour que $B_2$ il suffit que $B_1$ »	« Pour que $A_2$ il suffit que $A_1$ »

La reconnaissance de ces équivalences dans le **Problème 1** a été réussie respectivement à **66.14%** et **76.37%**. Cela signifie que d'un texte à un autre, sur un même sujet et d'un sujet à un autre, pour un même lecteur, la correspondance entre le contenu cognitif et l'organisation rédactionnelle peut considérablement varier.

### Réponses à la Question 2:

Les réponses « Autre » à la question 2 ont été données par quatre étudiants. On note :

\* Un étudiant (ET50) a répondu «  $x_0$  pair » à la question 2 portant sur la recherche de la condition suffisante dans ( $A_1 \Rightarrow A_2$ ).

\* Trois étudiants (ET51), (ET52) et (ET53) font apparaître les expressions condition nécessaire et condition suffisante. Ces réponses indiquent une implication entre les assertions A et B. Elles sont accompagnées des commentaires suivants : « A (resp. B) est une condition nécessaire pour B (resp. A) », B (resp. A) est une condition suffisante pour A (resp. B).

Ces étudiants semblent rester très proches de l'implication matérielle.

Les réponses produites révèlent une certaine incapacité des auteurs à transcender le pallier du calcul propositionnel. Ils sont loin du cadre du raisonnement déductif (pratique usuelle dans l'enseignement) qui met en jeu l'ostensif « Si.....Alors..... ».

Les relations causales dans chacune des assertions A et B ne sont pas repérées.

### Réponses à la Question 3 :

Seulement 54 étudiants sur 127 ont répondu correctement. 19 sur 127 considèrent qu'il y a dans A et B des conditions nécessaire et suffisante à la fois, mais aucune justification n'a été donnée.

### Conclusion :



Le problème de compréhension des textes étant d'un point de vue didactique « comment développer la possibilité pour un apprenant d'acquérir des connaissances nouvelles par la lecture, c'est-à-dire comment développer sa capacité de comprendre des textes sur des thèmes et sur des sujets qui ne lui sont pas déjà familiers ? ».

Ainsi, le processus de compréhension doit être analysé de façon spécifique dans chacune des situations de lecture possibles. La plupart des textes auxquels les étudiants sont confrontés et à propos desquels les enseignants constatent des difficultés de compréhension lors de la lecture relèvent de l'une de ces situations de lecture.

#### Références et bibliographie :

- ABDELLI M. (2009). *La dimension linguistique dans l'enseignement des mathématiques*, EMF 2009 Dakar SENEGAL
- ANTIBI A. (1988). *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : Réflexion, propositions* Thèse de Doctorat d'Etat – Sciences (Mention : Didactique des mathématiques) IREM de TOULOUSE n° 1371
- BEBBOUCHI R. (2009). *Le passage des mathématiques en arabe aux mathématiques en français en Algérie* EMF 2009 – Dakar SENEGAL
- GRENIER D., DELOUSTALV. (2001). *L'implication dans le raisonnement mathématique : Etat des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants* Conférence publiée dans Learning in mathematics and Science and Educational Technology, A. Gagatsis editeur, Intercollege press Cyprus.
- GRENIER D. (2005) *Eléments d'analyse des problèmes sur l'implication* » E.H.D.D.M. Alger/Bejaia
- KAZADI C. (2009) *Quelques difficultés logico - linguistiques des élèves congolais du secondaire*. EMF 2009 – Dakar SENEGAL.

La note de synthèse ci-dessus a montré « l'évolution » et le champ d'application de la didactique des mathématiques. Nous avons mis l'accent sur trois approches essentielles dénommée :  
Théorie des champs conceptuels,  
Théorie des situations didactiques,  
Théorie anthropologique du didactique.

- Voyons à présent comment nous avons mené nos recherches et sur quoi ont porté nos travaux de didactique et pédagogiques.

Nous avons souligné, plus haut, que les réflexions de nature épistémologique et psychologique étaient dominantes au moment où émergeait la notion de didactique. Nous nous sommes intéressés, à cette période, au rôle du vocabulaire dans l'apprentissage des mathématiques. Nous avons confectionné un questionnaire (joint en annexe 2) à l'effet de savoir comment interprétaient les élèves de 5<sup>ème</sup> (collège) certains mots fréquemment utilisés en mathématiques. Il s'agit des mots : vérifier, montrer, démontrer, comparer et mathématiques.

Pour la justification des réponses à la question « quelle solution te semble la plus mathématique ? », nous avons repéré des arguments de type : « parce que je n'ai rien compris ». Peut-on supposer que pour ce niveau scolaire, il existe une « liaison » entre les mots « incompréhension » et « mathématique » ?

La même problématique a été abordée sous un autre angle, dans un autre travail [M.Abdelli(1981)]. Nous avons étudié le vocabulaire d'un manuel scolaire de mathématiques rédigé en langue française et édité par l'IPN (1979-80) pour des élèves âgés de 12-13 ans des classes d'Algérie. Le problème abordé est le suivant : Bien que le discours mathématique utilise un langage relativement pauvre et qu'il recourt à des supports figuratifs, l'enseignement des mathématiques dans une langue non maternelle, voire même étrangère, se trouve confronté d'une part à la difficulté due à l'emploi fréquent d'un vocabulaire technique et d'autre part, à l'absence des termes qui servent à traduire les observations et la marche logique de la pensée qui prépare la naissance d'un concept.

Nous avons considéré le vocabulaire d'un manuel de la classe de 2<sup>ème</sup> année moyenne pour nous placer d'un point de vue didactique prenant essentiellement pour objets une évaluation du vocabulaire et une analyse basée sur la fréquence et la répartition de celui-ci.

La problématique de la langue d'enseignement ainsi posée, nous a emmené à étudier le cas des élèves n'ayant pas de langue maternelle. Il s'agit d'élèves déficients auditifs - E.D.A.- [M.Abdelli(1985)]. Le handicap que constitue la déficience auditive altère le développement d'un ensemble de capacités et d'habitudes en rapport avec l'acquisition et la maniement de la langue maternelle.

Nous avons examiné les performances des élèves déficients auditifs à deux types d'épreuves :

- épreuves mathématiques, correspondant à des activités numériques,
- épreuves de lecture, au moyen de la technique de closure.

Signalons à cette étape que le point de départ, comme le point d'arrivée des analyses et travaux réalisés sont de type didactique bien que les difficultés de prise d'information et de communication deviennent massivement prépondérantes.

Ainsi, la détection des difficultés didactiques est la question première. Cette question se pose d'abord en termes d'apprentissage.

L'acquisition de la compétence en mathématiques est un subtil processus, mais le dialogue entre l'élève et le professeur de mathématiques est impératif et dépend ainsi de la communication efficace.

De même, la compréhension approfondie du sens des mots et de la syntaxe est nécessaire à l'apprentissage de la lecture de toutes sortes de manuels de mathématiques. Ceci est particulièrement vrai pour des programmes de mathématiques qui mettent l'accent sur des concepts exigeant plus d'explication. Nous avons illustré cette problématique à l'aide de la question « comment fonctionne la langue naturelle dans l'expression de notions exactes ? ». La communication intitulée « Interaction langue naturelle – langue mathématique », [M.Abdelli (2002)], traite cette question sur le lemme général de Pascal : « traité des tri lignes rectangles et leurs onglets ».

Nous avons également examiné, à travers un projet de recherche [agrée le 01 /01 /98 sous le code R 2501 /09 /98], les compétences réelles en mathématiques des élèves au sortir de la 6<sup>ème</sup> année de l'école fondamentale (cf, résumé joint en annexe 1 ). Il en ressort que 25% des élèves interrogés rencontrent beaucoup de difficultés dans la résolution de problèmes additifs (utilisation de l'addition et de la soustraction). Le constat devient alarmant quand il s'agit de la multiplication et de la division. En effet, 50% des élèves interrogés sont en situation d'échec face à une multiplication décimale et seulement 20% des élèves réussissent à effectuer une division décimale – soit 80% d'échec. Ainsi, le calcul arithmétique semble constituer un handicap réel pour les élèves interrogés, avant d'entrer dans le cycle moyen (3<sup>ème</sup> palier) de l'école fondamentale.

Le rôle du professeur dans l'acquisition de la compétence et l'apprentissage en mathématiques a constitué l'autre volet des travaux réalisés :

- « Situer la didactique des mathématiques » [ M.Abdelli (1993)],
- Réalisation de brochures pour la formation des enseignants de mathématiques pour les cycles moyen et secondaire, ainsi que les enseignants du primaire [M.Abdelli (1999 – 2000)],
- « De la pédagogie par objectifs à la pédagogie par compétences : fiches techniques pour l'enseignement du calcul numérique » [M.Abdelli (2002–2003 )],
- Confection et mise en pratique de programme de formation en mathématiques des enseignants du primaire « BAC + 3 » [M.Abdelli (2001)],
- Evaluation des programmes de mathématiques en formation initiale à l'E.N.S. de Constantine [M.Abdelli (2002)] ,
- Confection d'un manuel d'analyse de 1<sup>ère</sup> année de l'université au profit des étudiants de l'E.N.S.de Kouba [projet de recherche agréé le 01 /01 /87 sous le code R 1601 /01 /01 /87].

Nous ne savons pas à l'avance quel sera le contenu de la bonne théorie de l'apprentissage, ni son objet, ni sa thèse, ni ce dont elle va traiter, ni comment elle en traitera ; mais nous savons très bien quel est le type de satisfactions que nous en attendons et c'est, entre autres, aussi par là que nous la reconnâtrons.

Il nous est évident que la théorie doit être convaincante et fructueuse ; si elle ne l'est pas vite et constamment, c'est quelle est dans l'embarras et qu'il faut changer d'approche.

Reformulons maintenant le domaine que la théorie des situations doit modéliser.

L'enseignement consiste à provoquer chez l'élève les apprentissages projetés en le plaçant dans des situations appropriées auxquelles il va répondre par des adaptations. Il s'agit donc de déterminer quelles sont les adaptations, qui correspondent aux savoirs et connaissances visées, et à quelles circonstances elles répondent.

Notons, ici, l'importance du rôle joué dans le processus d'enseignement par les phases d'apprentissage où l'élève travaille de façon presque isolée sur un problème ou dans une situation à propos desquels il assume un maximum de responsabilités.

Les élèves déficients auditifs que nous avons questionnés au travers du test de closure [M.Abdelli (1985)] et observés en phase de résolution de problèmes nous ont donné l'opportunité de voir comment et par quels moyens ils accèdent à la compréhension de textes écrits et par suite d'améliorer leur performances dans des activités de résolution de problèmes arithmétiques. Il y a lieu de souligner qu'il apparaît à l'analyse des résultats, des particularités et de simples décalages par rapport aux entendants. Nous avons principalement relevé :

- une tendance à appliquer un traitement d'image plane à un texte présenté, plutôt que de le voir comme une chaîne à une dimension (la ligne d'écriture ).
- La nécessité du recours à un code visuel secondaire pour entrer dans la compréhension des textes écrits.

En exploitant ces dispositions, on observe une amélioration importante des performances.

Dans la perspective d'un apprentissage par adaptation à un milieu problématique, qui est un point de vue prépondérant dans toutes les approches didactiques, l'obstacle épistémologique ne peut être évité. Son apparition et son dépassement sont des conditions incontournables de l'apprentissage. Ces obstacles sont constitutifs de la connaissance. Ils sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances. Dans cette optique, l'analyse des

praxéologies mathématiques ( O.M ) et praxéologies didactiques (O.D) s'impose [ M.Artaud et al. (2005) ].

Nous n'avons pas réalisé cette analyse dans nos travaux de recherche précédents. En revanche, elle est omniprésente dans les ouvrages pédagogiques concernant l'étude des séries et les résolutions d'exercices proposés [M.Abdelli et al. 2003-2004, 2004-2005 ] et dans [ M.Abdelli 2002-2003 ].

## Conclusion et perspectives

Conclure sur ce que nous venons de présenter n'est pas une tâche aisée, dans la mesure où cette présentation constitue déjà une synthèse de notre travail. Ainsi, plutôt que de risquer de nous paraphraser, nous allons faire une petite digression pour permettre une sorte de mise en place de perspectives.

La recherche en didactique des mathématiques sur le calcul numérique a certainement encore beaucoup de questions à soulever et à examiner à différents niveaux d'enseignement et de formation : numération décimale – caractères de divisibilité – calcul de PGCD et PPCM – erreurs absolue et relative – dénombrements – combinaisons – progressions arithmétique et géométrique des suites – calcul des radicaux etc.....

L'enseignement du calcul numérique nous semble être un terrain où de nombreuses interactions cognitives peuvent être développées. Nous avons abordé cette question de façon périphérique dans la présentation précédente. Elle est aussi très présente dans les nouveaux programmes de la 1<sup>ère</sup> année du cycle secondaire en Algérie.

Plusieurs changements de cadres (Douady 1986), des interactions entre différents registres de représentations sémiotiques (Duval 1993) et plus généralement des changements, plus locaux, de points de vue peuvent être activés dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul numérique. Notre mise en perspective vise à mieux problématiser cette dimension dans de futures recherches sur des questions d'enseignement portant sur différents domaines mathématiques. Ainsi, par exemple, les notions de précisions et rigueur des tracés sont des enjeux essentiels pour différentes disciplines découlant des mathématiques.

La notion de précision renvoie à des considérations de mesure donc d'approximations. Dans le cadre numérique, il s'agit des approximations des nombres réels par des décimaux ou rationnels. Dans ce cas, il est possible de mettre en place une problématique du calcul approché et une problématique de l'approximation. On distingue pour les nombres réels plusieurs niveaux d'approximation : une valeur approchée, un encadrement, une suite d'encadrements, etc.... . En géométrie, que retenir comme idée de l'approximation ?

Par ailleurs, nous avons relevé chez des étudiants de 2<sup>ème</sup> année universitaire (facultés des sciences et sciences de l'ingénieur) des difficultés dans le maniement et l'utilisation du concept de limite. Pour mieux cerner ces difficultés, il serait judicieux de mieux comprendre la transition algèbre /analyse et sa gestion didactique, en articulant les trois dimensions épistémologique, cognitive et didactique. En effet, si l'activité mathématique en analyse s'appuie sur des compétences algébriques, elle se situe dans le même temps en rupture avec un certain nombre de pratiques algébriques élémentaires et nécessite une reconstruction du rapport au travail algébrique.

## Bibliographie

**Nous ne rappelons pas dans la bibliographie nos travaux qui figurent dans la section I**

**M. Abdelli** : « Rapport et diplôme élaboré pour le D.E.A. de didactique des mathématiques »  
I.R.E.M. / U.L.P. 1981 / 1982, Strasbourg .

**M. Abdelli** : « Oralisation et apprentissage arithmétique par des élèves déficients auditifs »  
Thèse de Doctorat 3<sup>ème</sup> cycle I.R.E.M. / U.L.P. 1985 ; Strasbourg.

**M. Abdelli** : « Didactique des sciences et enseignement supérieur ». Rapport de stage  
I.R.E.M.de Lyon.( M.A.E.) , 1992, Dijon.

**M. Develay et al.** « la didactique des sciences expérimentale »  
Que sais – je ? n° 2448, P.U.F 1989 Paris.

**G. Glaeser** : Cours de 3<sup>ème</sup> cycle I.R.E.M. U.L.P. 1979 Strasbourg.

**M. Artigue** : « Ingénierie didactique » R.D.M. vol.9/3 pp 231 –308 éd. La pensée  
sauvage, 1988 Grenoble.

**Y.Chevallard et al.** : « la transposition didactique » éd. La pensée sauvage 1991 Grenoble.

**G.Brousseau** : « Problèmes de didactique des décimaux » R.D.M. vol.2/1 pp 37 –125 éd  
. La pensée sauvage, 1981 Grenoble.

**G.Brousseau** : « théorie des situations didactiques » (Didactique des mathématiques 1970 -  
1990) éd. La pensée sauvage 1998 Grenoble.

**J.L.Dorier et al.** : « Actes de la 11<sup>ème</sup> école d'été de didactique des mathématiques » pp21–  
30 éd. La pensée sauvage 2001 Corps (Isère).

**J.L.Dorier** : « Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre  
Linéaire .... » Université Joseph Fourier 1997 Grenoble.

**M.Artaud et al.** : « Théorie anthropologique du didactique – cours de synthèse » 1<sup>ère</sup> école  
d'hiver didactique des mathématiques Alger –Bejaia  
27 Février.- 9 Mars 2005.

**P.Meirieu** : « enseigner pour un métier nouveau » éd. ESF col. Pédagogies p.114 1995 Paris.

**R.Douady** : « Jeux de cadres et dialectique outil – objet » R.D.M. vol. 7/2 pp 5-31  
1986 Grenoble.

**R.Duval** : « Registres et représentations sémiotiques et fonctionnement de la pensée ».  
Annales de didactique et des sciences cognitives n° 5 I.R.E.M. pp 37-65  
1993 Strasbourg.

## **Annexes**

### **Annexe 1 : Projet de recherche**

**Titre du projet** : « Evaluation de compétences minimales dans le domaine du calcul au niveau de la sixième année fondamentale »

**Mots clés** : Evaluation, objectif, occasion d'apprentissage, pratiques pédagogiques.

#### **Résumé** :

*Cette recherche se propose de porter un regard sur la réforme de l'école fondamentale à la lumière des productions des élèves dans le domaine des mathématiques, au sortir de la sixième année scolaire.*

*Le premier objectif de cette recherche est de faire un constat des savoirs des élèves et de leurs compétences réelles dans cette discipline.*

*L'image des compétences des élèves livrée par notre test de mathématiques est décevante dans la mesure où moins d'1/3 des objectifs visés par le test ont été maîtrisés par les élèves.*

*En effet, 1/4 des élèves ne savent pas effectuer une addition ou une soustraction avec nombres entiers. Quant à ces mêmes opérations avec les nombres décimaux, elles sont encore moins réussies que les précédentes dans la mesure où 3 élèves sur 10 ne savent pas effectuer une soustraction de même nature.*

*Le constat devient alarmant quand il s'agit de la multiplication, et surtout de la division avec décimale. En effet, moins d'un élève sur deux est en situation d'échec face à une multiplication décimale, et moins de deux élèves sur 10 réussissent à effectuer une division décimale. Ce sont donc des pans entiers du programme que la majorité des élèves n'a pas acquis parce que les « occasions d'apprentissage » ne leur ont pas été offertes, parce que l'enseignement ne respecte pas les différents rythmes de progression des élèves, et qu'on ne leur a pas laissé suffisamment de temps pour s'approprier les compétences recherchées dans le programme.*

*Les résultats de cette évaluation peuvent servir aux enseignants pour situer la nature des erreurs commises par leurs élèves et d'intervenir par anticipation pour les corriger, et faire en sorte qu'elles ne se reproduisent pas avec la même acuité les années suivantes.*

*Une fois le bilan établi, la recherche des facteurs explicatifs des performances des élèves est une étape obligée dans le but de l'amélioration du système en place. La recherche des facteurs explicatifs constitue de ce fait, notre deuxième objectif.*

*En effet, les performances contrastées des élèves révélées par l'épreuve de mathématiques peuvent s'expliquer par différentes variables et notamment :*

- L'implantation géographique des établissements scolaires.
- Les caractéristiques sociologiques des élèves.
- Les caractéristiques affectives des élèves.
- Les caractéristiques socioprofessionnelles des enseignants.
- Les pratiques pédagogiques des enseignants

## Annexe 2 :

## Questionnaire

Nom :

Prénom(s) :

Naissance :

--	--	--

Les lettres  $a, b, c, d$  représentent ici des entiers naturels non nuls. COMPARE le produit

$a \times b$  avec le produit  $b \times c$  lorsque  $a$  est plus petit que  $b$  et  $d$  plus petit que  $c$ .

**Brouillon :**

**Réponse au propre**

**Solution Pierre :**

L'énoncé dit que  $a < b$ . Je multiplie ici chaque nombre par le naturel  $d$  et j'obtiens :  
 $a \times d < b \times d$ .

L'énoncé dit aussi que  $d < c$ . Je multiplie ici chaque nombre par le naturel  $b$  et j'obtiens :  
 $b \times d < b \times c$ . Finalement:  $a \times d < b \times d$  et  $b \times d < b \times c$  donc :  $a \times d < b \times c$ .

**Solution Brigitte :**

J'ai trouvé que pour toutes les valeurs de  $a, b, c$  et  $d$ , le produit  $b \times d$  est plus grand que le produit  $a \times d$  et plus petit que le produit  $b \times c$ . Donc  $a \times d$  est plus petit que  $b \times c$ .

Par exemple, pour  $a = 4$  ;  $b = 6$  ;  $c = 5$  et  $d = 2$ , on obtient  $b \times d = 6 \times 2 = 12$  ;

$a \times d = 4 \times 2 = 8$  ;  $b \times c = 6 \times 5 = 30$ .

C'est parce que  $a$  est plus petit que  $b$  que  $a \times d$  est plus petit que  $b \times d$ . Et  $b \times c$  est plus grand que  $b \times d$  parce que  $c$  est plus grand que  $d$ . Cela sera vrai pour tous les exemples.

**Solution Paul :**

Pour comparer  $a \times d$  et  $b \times c$ , je regarde si  $a \times d = b \times c$ . Mais  $a \times d = b \times c$  est vrai pour  $a = [(b \times c) / d]$ . Si  $d < c$ , alors  $(c/d) > 1$ . Donc  $[(b \times c) / d] > b$ .

Et puisque  $b > a$ , c'est que  $[(b \times c) / d] > a$ . Finalement  $a \times d \neq b \times c$ .

**Solution Isabelle :**

Je donne des valeurs aux lettres  $a, b, c, d$ .

Je choisis d'abord  $a = 1, b = 2, c = 5$ , et  $d = 3$ .

$$a \times d = 1 \times 3 = 3, \quad b \times c = 2 \times 5 = 10$$

$$3 < 10$$

Je choisis ensuite  $a = 112, b = 721, c = 195$ , et  $d = 1849$

$$a \times d = 112 \times 1849 = 207088, \quad b \times c = 721 \times 1953 = 1408113$$

$$207088 < 1408113$$

$$\text{Donc } a \times d < b \times c$$

1) Quelle solution préfères-tu ?

<input type="checkbox"/>	S/Pierre
--------------------------	----------

<input type="checkbox"/>	S/Brigitte
--------------------------	------------

<input type="checkbox"/>	S/Paul
--------------------------	--------

<input type="checkbox"/>	S/Isabelle
--------------------------	------------

Pourquoi ?

2) La solution Pierre te paraît-elle juste ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

La solution Brigitte te paraît-elle juste ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

La solution Paul te paraît-elle juste ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

La solution Isabelle te paraît-elle juste ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Pourquoi ?



3) Par quelle solution es-tu plus convaincu(e) ?

	S/Pierre
--	----------

	S/Brigitte
--	------------

	S/Paul
--	--------

	S/Isabelle
--	------------

Pourquoi ?

---

4) Quelle solution te semble la plus mathématique ?

	S/Pierre
--	----------

	S/Brigitte
--	------------

	S/Paul
--	--------

	S/Isabelle
--	------------

Pourquoi ?

5) Peut-on dire que Pierre n'a pas comparé ?

	oui
--	-----

	non
--	-----

Peut-on dire que Brigitte n'a pas comparé ?

	oui
--	-----

	non
--	-----

Peut-on dire que Paul n'a pas comparé ?

	oui
--	-----

	non
--	-----

Peut-on dire que Isabelle n'a pas comparé ?

	oui
--	-----

	non
--	-----

Pourquoi ?

---

6) Dans les solutions Pierre, Brigitte, Paul et Isabelle, il n'y a pas d'erreurs.

Pierre a-t-il bien répondu à la question posée ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Brigitte a-t-il bien répondu à la question posée ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Paul a-t-il bien répondu à la question posée ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Isabelle a-t-il bien répondu à la question posée ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Pourquoi ?

$a, b, c, d$  sont des lettres qui représentent des entiers naturels non nuls. Si  $a < b$  et  $d < c$ , MONTRER que  $a \times d < b \times c$

Pour répondre :

Peut-on prendre la solution Pierre ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Peut-on prendre la solution Brigitte ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Peut-on prendre la solution Paul ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Peut-on prendre la solution Isabelle ?

<input type="checkbox"/>	oui
--------------------------	-----

<input type="checkbox"/>	non
--------------------------	-----

Pourquoi ?

7) Démontrer, prouver, établir, justifier, indiquer, montrer, vérifier.

Complète les phrases suivantes par un des verbes ci-dessus :

- La réponse Pierre correspond à la question :  
..... que  $a \times d < b \times c$  lorsque  $a$  est plus petit que  $b$  et  $d$  plus petit que  $c$ .
- La réponse Brigitte correspond à la question :  
..... que  $a \times d < b \times c$  lorsque  $a$  est plus petit que  $b$  et  $d$  plus petit que  $c$ .
- La réponse Paul correspond à la question :  
..... que  $a \times d < b \times c$  lorsque  $a$  est plus petit que  $b$  et  $d$  plus petit que  $c$ .
- La réponse Isabelle correspond à la question :  
..... que  $a \times d < b \times c$  lorsque  $a$  est plus petit que  $b$  et  $d$  plus petit que  $c$ .

## XII Compléments pour la lecture :

### A propos de la formation en statistique. Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique.

JC Regnier - Revue du Centre de recherche en ..., 2003 - [halshs.archives-ouvertes.fr](http://halshs.archives-ouvertes.fr)

... Approches praxéologiques et épistémologiques de questions du champ de la didactique de la statistique . ... Ainsi cette posture épistémologique permet de donner un certain sens à la notion de ... 3-17) 3 Dans son ouvrage (Popper 1988 Appendice II p.323-324) La logique de la ...

### Analyse statistique implicative

R Gras, JC Regnier, F Guillet - 2009 - [halshs.archives-ouvertes.fr](http://halshs.archives-ouvertes.fr)

... A travers thèses, articles de revues, livres et colloques, elle a été développée et l ... Puisant ses origines épistémologiques en didactique des mathématiques, son point de départ est un questionnement ... Cet ouvrage a pour objectif d'en rappeler la genèse unificatrice, de dresser un ...

### [PDF] à partir de archives-ouvertes.fr

#### Education et Didactique des mathématiques

G Brousseau - Educacion y didactica de las matematicas, 2000 - [hal.archives-ouvertes.fr](http://hal.archives-ouvertes.fr)

... formation des professeurs - et à poser quelques questions sur le statut épistémologique, scientifique et ... 1 "Contre les diverses formes d'empirisme, l'épistémologie constructiviste refuse de considérer la ... un savoir est un moyen général de recherche et d'ingénierie en didactique. ...

### [PDF] à partir de archives-ouvertes.fr

#### L'espace de Travail Mathématique et ses genèses

A Kuzniak - Annales de didactique et de sciences ..., 2011 - [halshs.archives-ouvertes.fr](http://halshs.archives-ouvertes.fr)

... autres domaines mathématiques et présentées, pour certaines d'entre elles, dans cet ouvrage incitent à ... que ETM de référence, idoine ou personnel ; - la description des enjeux épistémologiques et didactiques ... DESANTI, JT (1975), Qu'est ce qu'un problème épistémologique ? ...

### [LIVRE] L'enseignement des mathématiques au lycée: un point de vue didactique

A Robert, M Lattuati, J Penninckx - 1999 - [publimath.irem.univ-mrs.fr](http://publimath.irem.univ-mrs.fr)

... Dans l'introduction, les auteurs présentent ainsi le plan de cet ouvrage : "Nous consacrons la ... Ces descriptions empruntent en partie à l'épistémologie d'une façon que nous précisons ... dans les zones d'éducation prioritaire (ZEP), un résumé sur la didactique des mathématiques ...

[LIVRE] Mémoire et étude des mathématiques: une approche didactique à caractère anthropologique

Y Matheron - 2009 - [publimath.irem.univ-mrs.fr](http://publimath.irem.univ-mrs.fr)

... Cet **ouvrage** aborde leur exploration à travers l'étude des **mathématiques**. ... La démarche articule l'analyse d'un savoir – **épistémologie**, organisation, transposition **didactique** ... Observations de classes, entretiens, **ouvrages** de mathématiciens et manuels scolaires sont confrontés ...

[PDF] à partir de [free.fr](http://free.fr)

[PDF] Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire

Y Chevallard - Journées de **didactique** comparée, 2004 - [yves.chevallard.free.fr](http://yves.chevallard.free.fr)

... 1937), « il vecchio muore e il nuovo non può nascere » : l'**épistémologie** scolaire ne ... à un certain niveau de généralité, ils relèvent d'un schéma **épistémologique** commun, celui ... Un troisième média, souvent ignoré par le professeur, est constitué des **ouvrages** dits parascolaires ...

[PDF] à partir de [archives-ouvertes.fr](http://archives-ouvertes.fr)

... et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la ...

V Durand-Guerrier - 2005 - [tel.archives-ouvertes.fr](http://tel.archives-ouvertes.fr)

... article intitulé **Epistémologie et didactique** : «En résumé, on a vu l'analyse **épistémologique** aider la **didactique** à se ... L'auteur développe ensuite deux aspects des relations entre **épistémologie** et **didactique**, le ... Dans cet **ouvrage**, l'auteur classe les concepts logiques que ...

[PDF] à partir de [ujf-grenoble.fr](http://ujf-grenoble.fr)

[PDF] Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège

G Brousseau - Petit x, 1989 - [www-irem.ujf-grenoble.fr](http://www-irem.ujf-grenoble.fr)

... l'échelle de la planète, sans parler des séquelles que nous ressentons encore sur l'**épistémologie** du public ... les met en scène, les interprète, en fait la base d'un de ces **ouvrages** d'indignation ... Aussi l'**ouvrage** de Stella Baruk, bien que passionnant, bourré d'exemples, d'idées, de ...

Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques

R Bkouche - For the learning of mathematics, 1997 - JSTOR

... dans les articles de Piaget et de Dieudonné dans l'un des premiers **ouvrages** où se ... un objet de connaissance pour le super-super-sujet mettant en place une **épistémologie** du second ... in the theoretical physics of the present day.\*\*\* Hermann Weyl Dans un **ouvrage** de réflexion ...

[PDF] Le Passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège

Y Chevallard - Petit x, 1989 - [www-irem.ujf-grenoble.fr](http://www-irem.ujf-grenoble.fr)

... (4) L'**ouvrage** de François Viète (1540-1603), In artem ... Propriété fort ancienne ment notée, semble-t-il, et de laquelle Clairaut - se situant, il est vrai, dans une perspective plus **didactique** qu'**épistémologique**(9) - fait même découler l'intérêt et la nécessité de l'algèbre(10). ...

[HTML] à partir de [persee.fr](http://persee.fr)

Questions à la didactique des mathématiques

C Blanchard-Laville - Revue française de pédagogie, 1989 - JSTOR

... Extrait de l'article **Epistémologie** de I ... noter que les didacticiens ont repris le terme de contrat déjà utilisé par Janine Filloux dans son **ouvrage** « Du contrat ... de départ, ils risquent d'avoir été contaminés, presque à leur insu, par les caractéristiques de l'**épistémologie** dominante en ...

[\[PDF\] à partir de archives-ouvertes.fr](#)

### [L'observation des activités \*\*didactiques\*\*](#)

G Brousseau - Revue française de pédagogie, 1978 - JSTOR

... et s'opposent les faits d'ordres divers : pédagogiques, psychologiques, **épistémologiques**, **didactiques** et sociologiques. ... Il faudra se garder de confondre les opinions didactiques, objets **didactiques**, avec les ... PROBLEMES D'OBSERVATION EN **DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES** ...

[\[PDF\] à partir de umontreal.ca](#)

### [Les représentations: étude en théorie des situations \*\*didactiques\*\*](#)

G Brousseau - Revue des sciences de l'éducation, 2004 - erudit.org

... De ce fait peut-être, un certain nombre de travaux français de **didactique** des **mathématiques**, qui ... de travail différentes, certains n'y voient qu'une différence de position **épistémologique**. ... théoriques, cet article [1] doit relever le défi de souligner ces différences **épistémologiques**. ...

### [Chevallard \(Yves\).—La Transposition \*\*didactique\*\*: du savoir savant au savoir enseigné](#)

J Colomb - Revue française de pédagogie, 1986 - persee.fr

... 90. rupture **épistémologique** lui permettant de sortir de l'illusion de la transparence. ... Yves Chevallard nous a donné là un brillant **ouvrage** théorique sur la **didactique** des **mathématiques** qui constitue un des rares **ouvrages** de référence dans ce champ maintenant solidement ...

[\[HTML\] à partir de revues.org](#)

### [\[HTML\] La sociologie, la \*\*didactique\*\* et leurs domaines scientifiques](#)

B Lahire - Éducation et **didactique**, 2007 - educationdidactique.revues.org

... l'éducation (...); 9 Ce que je me suis efforcé de faire dans l'**ouvrage** Culture écrite ... de la classe), la **didactique** peut se révéler très proche de l'**épistémologie**<sup>19</sup>, de ... Mais dans tous les cas, lorsque les deux conditions évoquées – proximités **épistémologique** et paradigmatique – ne ...

[\[PDF\] à partir de unige.ch](#)

### [\[PDF\] Un modèle de l'action conjointe professeur-élèves: les phénomènes \*\*didactiques\*\* qu'il peut/doit traiter](#)

ML Schubauer, F Leutenegger, F Ligozat, F Annick - 2007 - archive-ouverte.unige.ch

... Conformément à l'**épistémologie** piagétienne . ... du partage topogénétique des responsabilités entre professeur et élèves, partage qui renvoie à deux registres **épistémologiques** (au sens ... il importe alors de savoir si la situation résiste de part sa structure **épistémologique** ou bien ...

[\[PDF\] à partir de unige.ch](#)

### [Théories de l'action et action du professeur](#)

G Sensevy - Raisons éducatives, 2001 - cairn.info

... La métaphore ici employée n'a pas de similitude **épistémologique** avec la théorie des ... que cette modélisation suppose est en consonance avec les remarques **épistémologiques** initialement produites. ... jacente et les obstacles qu'elle charrie est aussi une **épistémologie** du hic et ...

### [Le rapport au symbolisme algébrique: une approche \*\*didactique\*\* et \*\*épistémologique\*\*](#)

C Bardini - 2003 - tel.archives-ouvertes.fr

... 7 – DENIS DIDEROT UFR DE **MATHEMATIQUES** Ecole Doctorale « Savoirs scientifiques : **épistémologie**, histoire des ... repris par René Alleau et appliqué tout au long de son **ouvrage** doit ici ... anciens alchimistes, mais nous la retrouvons également dans les **ouvrages** de biologie ...

[\[PDF\] Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment?](#)

E Barbin - Bulletin AMQ, 1997 - [archimede.mat.ulaval.ca](http://archimede.mat.ulaval.ca)

... 6. Dans les années 1970, nous disposons de peu d'**ouvrages** d'histoire générale des ... Cet **ouvrage** contient seize chapitres consacrés chacun à un philosophe et écrits par des ... Actes du 3<sup>e</sup> Colloque inter-IREM **Épistémologie** et histoire des **mathématiques**, ed. IREM de Rouen ...

[\[PDF\] à partir de free.fr](#)

[\[PDF\] Travaux Personnels Encadrés: un cadre d'analyse didactique pour un changement majeur dans l'enseignement au lycée](#)

Y Chevallard, Y Matheron - ... **mathématiques** dans les collèges ..., 2002 - [yves.chevallard.free.fr](http://yves.chevallard.free.fr)

... encadré par des professeurs au rôle circonscrit à la fourniture d'**ouvrages** adéquats et d ... La formation de l'esprit scientifique (1938), **ouvrage** fondateur de l'**épistémologie** bachelardienne, on ... Dans l'**ouvrage** Théorie des situations **didactiques**, Guy Brousseau reformule en 1998 la ...

## **XV- En guise de conclusion :**

De nos jours la progression enseignante se trouve profondément transformée. La professionnalité d'enseignant se fonde sur la compréhension des apprentissages des élèves à la lumière des données de la psychologie cognitive.

Il s'agit d'une double compétence liée à la maîtrise des savoirs disciplinaires et de leur épistémologie ainsi qu'à celle de savoirs didactiques et pédagogiques (transposition, objectifs évaluation etc.....).

Il n'y a pas une démarche unique d'apprentissage et d'enseignement, vu le fait qu'il n'y a pas un profil unique de développement, mais plutôt une pluralité de modes d'apprentissage. D'où la nécessité, pour les enseignants, de recourir à une pédagogie différenciée et à une pluralité des didactiques.

Le rôle de ces enseignants est celui d'adultes qui accompagnant l'élève dans son apprentissage, qui médiatise le savoir. Toujours à l'écoute de l'élève, ils sont là pour aider à l'appropriation du savoir, pas seulement et simplement pour enseigner. Ils sont là pour changer les représentations erronées, pour affranchir et responsabiliser et non pas de maintenir dans la dépendance du modèle unique et universel.

## **XVI- Références bibliographiques :**

- **Dict.encycl.** Larousse du XX siècle, Paris 1932
- **G. Mialaret** : « Que sais – je » n°1645 les sciences de l'éducation, 1976
- **Georges Glaeser** : « Racines historiques de la didactique des mathématiques » IREM de Strasbourg, 1980
- **Georges Glaeser** : « La didactique expérimentale des mathématiques » IREM de Strasbourg, 1980
- **Georges Glaeser** : « La mathématique et son enseignement » IREM de Strasbourg, 1985
- **E.N.Ivantsyna** : Achieving skill in solving geometry problems – in : soviet studies in the psychology of learning mathematics – vol/4 : problem solving in geometry – University of Chicago, 1970
- **M.Artigue – R.Douady** : La didactique des mathématiques en France. Revue Française de Pédagogie N° 76 (1986) P69-88.
- **Bachelard** : La formation de l'esprit scientifique. Ed.Vrin.
- **G.Brousseau** : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol 7 n°2 (1986) P33-115.
- **Guy Brousseau** : « compte rendu du colloque de l'IREM de Bordeaux, 1975
- **Y.Chevallard - Johsua** : la transposition didactique. Ed La Pensée sauvage (1991).
- **Y.Chevallard** : La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, La Pensée sauvage.(1985).
- **G.Vergnaud** : La théorie des champs conceptuels. RDM Vol 10 - 2, 3.
- **H. Besse** : Remarques sur le statut de la didactique des langues étrangères dans le champ des sciences humaines et sociales. Bulletin de l'ACLA, 7, 7–27. (1985).
- **R. Legendre** : Dictionnaire actuel de l'éducation. Montréal, Guérin et Paris, ESKA. 33 (1993).
- **Claude Germain** : Didactique générale, didactique des langues (4-vol-3-nos1-2-art-germain)
- **G.Vergnaud** : La théorie des champs conceptuels. RDM Vol 10 - 2, 3.