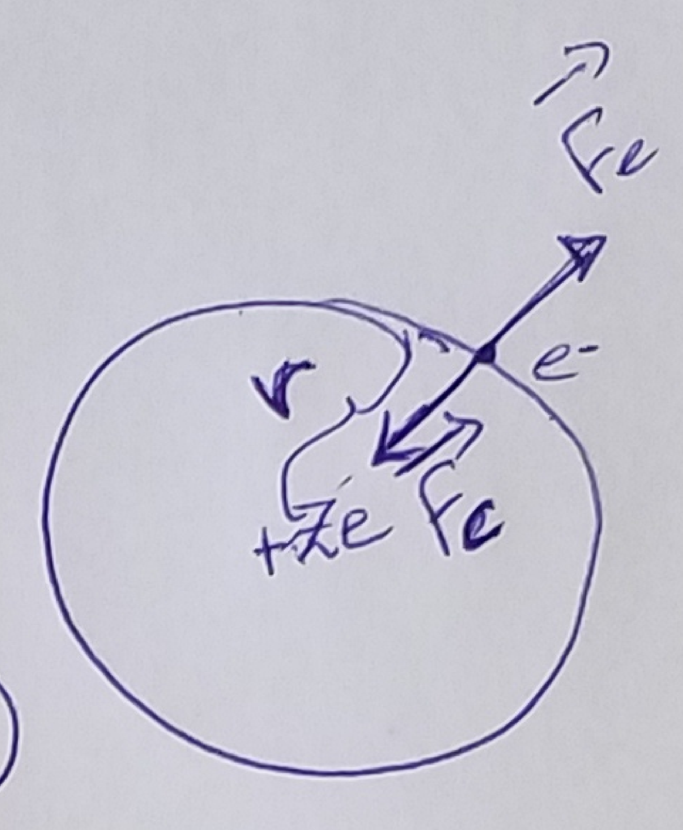
26/04/2020

Corrigé TD3 (Série 3)

Atome d'hydrogène et Atomes d'hydrogénoïdes



EX01

a. Le rayon r_n : L'électron est soumis à deux forces :

- $\vec{F_e}$ (force électrostatique)
- $\vec{F_c}$ (force centrifuge).

Par définition, on a

$$|\vec{F_e}| = F_e = \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} , \quad |\vec{F_c}| = m a_N = m \frac{v^2}{r}$$

Pour que l'électron reste sur l'orbite $\Rightarrow F_e = F_c$.

$$\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (1)$$

(v : La vitesse de l'électron
a_N : l'accélération normale)

D'après le 1er postulat de Bohr : le moment cinétique de l'électron est quantifié : $L = m v r = n \hbar$. (2)

l'équation (2) donne : $v = \dfrac{n \hbar}{m r}$ (3)

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{m}{r}\,\frac{n^2\hbar^2}{m^2 r^2}$$

On en déduit le rayon r_n des différentes orbites

$$\boxed{r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m} \times \frac{n^2}{Z}} \quad (4)$$

1.b L'énergie du système noyau - électron E_n

L'énergie totale E_n = L'énergie cinétique E_c + l'énergie potentielle E_p

- $E_c = \frac{1}{2} m v^2 \xrightarrow{\text{Eqt } (1)} \boxed{E_c = \frac{1}{2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} \quad (5)$

- La force électrostatique est conservative, donc dérive d'une énergie potentielle : $F_e = -\frac{dE_p}{dr} \Rightarrow dE_p = -F\,dr$

Intégrons cette relation pour r variant entre r et l'infini :

$$E_p(\infty) - E_p(r) = -\int_r^{\infty} F_e\,dr = -\int_r^{\infty} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}\,dr = \left[-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_r^{\infty}$$

$$= 0 - \left(\frac{-Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{(Par convention : } E_p(\infty) = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_p(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}} \quad (6)$$

• Energie totale E_n :

$$E_n = E_c + E_p = \frac{Z e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_n = -\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$$

En remplaçant l'équation (4) dans l'expression de l'énergie totale, on trouve

$$E_n = -\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{m}{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0} \times \frac{Z}{n^2}$$

$$E_n = -\frac{Z^2 e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \times \frac{1}{n^2} \quad (7)$$

1.c L'énergie E_n en fonction de l'énergie de l'atome d'hydrogène E_H

Il est clair que $Z=1$ et correspondant l'énergie de l'atome d'hydrogène : $E_{n(H)} = -\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} \times \frac{1}{n^2}$.

$$\Rightarrow \quad E_{n(\text{hydrogénoïde})} = Z^2 E_{n(\text{hydrogène})} \quad (8)$$

On fait la même chose pour le rayon, on trouve.

$$r_{n(\text{hydrogénoïde})} = r_{n(\text{hydrogène})} / Z \quad (9)$$

2. $E_n(Li^{2+})$

L'énergie de l'état fondamental et correspondant à $n = 1$,

on peut écrire l'équation (8) sous la forme suivante :

$$E_{n(\text{hydrogénoïde})} = \frac{Z^2}{n^2} E_{1(\text{hydrogène})} \Big/ E_1 = -\frac{e^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = -13{,}6\,eV$$

• $n_1 = 1 \Rightarrow E_1(Li^{2+}) = -13{,}6 \times \frac{Z^2}{n^2} = -13{,}6 \times \frac{3^2}{1^2} = -122{,}4\,eV$

$$E_2(Li^{2+}) = -122{,}4\,eV = 1{,}95.10^{-17}\ \text{Joule}$$

• $n = 2 \Rightarrow E_2(Li^{2+}) = -13{,}6\,\frac{Z^2}{n^2} = -13{,}6\,\frac{3^2}{2^2} = -30{,}6\,eV$

$$E_2(Li^{2+}) = -30{,}6\,eV = -4{,}9.10^{-18}\ \text{Joule}$$

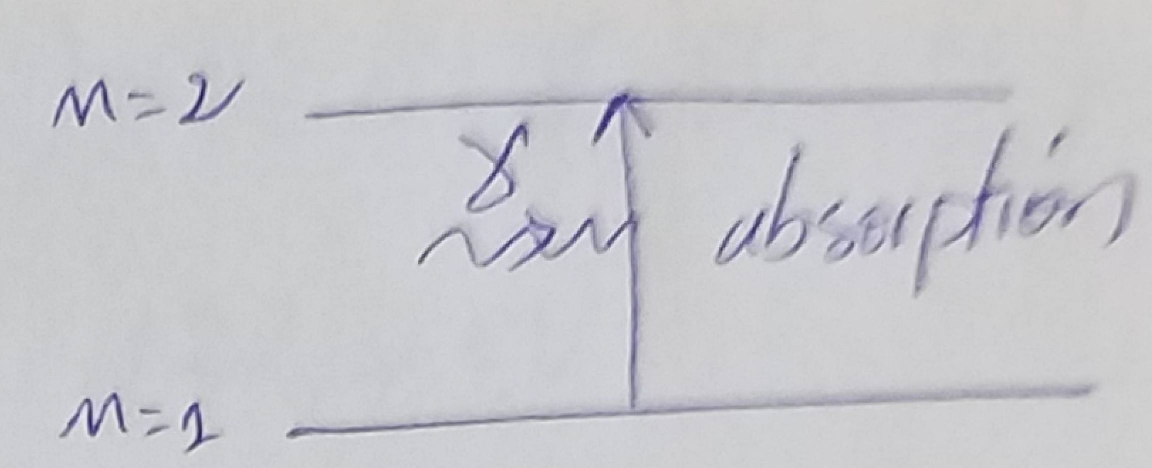
• $n = 3 \Rightarrow E_3(Li^{2+}) = -13{,}6\,\frac{Z^2}{n^2} = -13{,}6\,\frac{3^2}{3^2} = -13{,}6\,eV$

$$E_3(Li^{2+}) = -13{,}6\,eV = -2{,}18.10^{-18}\ \text{Joule}$$

• $n = 4 \Rightarrow E_4(Li^{2+}) = -13{,}6\,\frac{Z^2}{n^2} = -13{,}6\,\frac{3^2}{4^2} = -7{,}65\,eV$

$$E_4(Li^{2+}) = -7{,}65\,eV = -1{,}22.10^{-18}\ \text{Joule}$$

3. L'energie d'absorption $\Delta E_{1\to2}$



L'energie absorbée $\Rightarrow$

$$\Delta E_{1\to2} = E_2 - E_1 = E_2(Li^{2+}) - E_2(L^{2+})$$

A.N: $\Delta E_{1\to2} = -30,6 - (-122,4) = 91,8\, eV = 1,46.10^{-17}$ Joule

4. La longueur d'onde $\lambda_{1\to2}$

On a: $\Delta E_{1\to2} = \dfrac{hc}{\lambda_{1-2}} \Rightarrow \lambda_{1\to2} = \dfrac{h.c}{\Delta E_{1\to2}}$

A.N: $\lambda_{1\to2} = \dfrac{6,62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{1,46.10^{-17}} = 1,36.10^{-8} m = 136\, A°$.

Exo2:

Rappel: L'energie d'ionisation est l'energie nécessaire pour libérer l'electron de l'attraction du noyau, ce qui correspondant à la transition du niveau $n=1$ (l'etat fondamental) au niveau $n=\infty$ (énergie nulle) par absorption d'un photon d'energie:

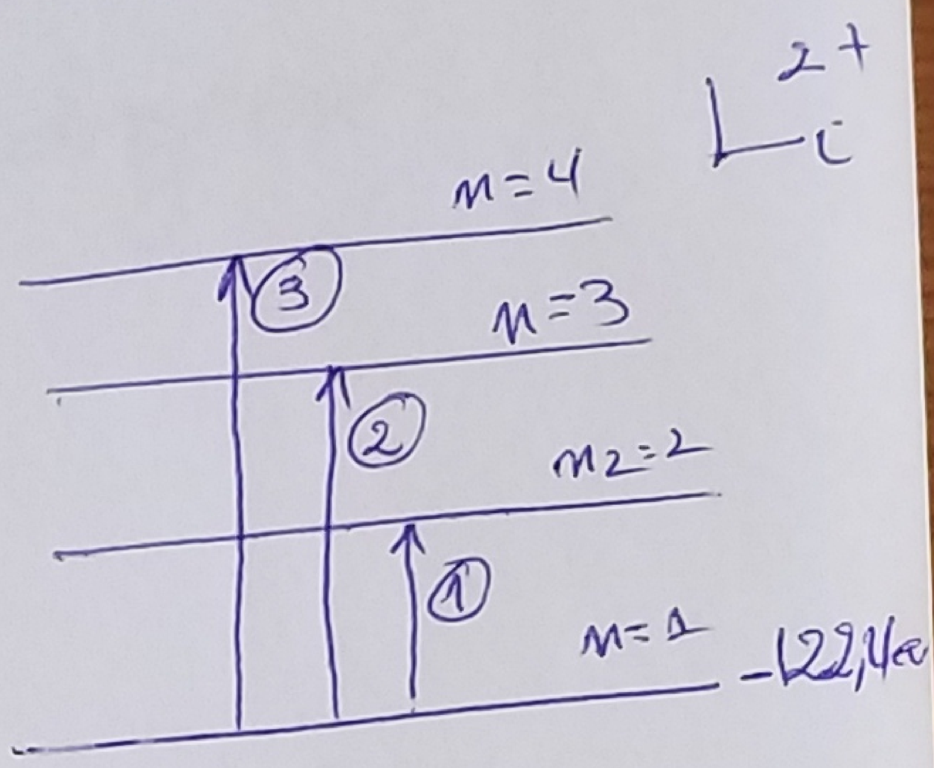
$$E_i = 0 - E_1 = -E_1$$

- atome hydrogène: $Z=1$, $n=1$ $\Rightarrow E_i)_H = 0 - E_1 = 13,6\, eV$.
- Pour H^+ ($n=1$, $Z=2$) $\Rightarrow E_i)_{H^+} = 0 - \left(-13,6 \cdot \dfrac{Z^2}{n^2}\right)$

$$E_i)_{H^+} = +13,6 \times \frac{2^2}{1^2} = 54,4\, eV.$$

• Pour Li^{2+} $(n=1, Z=3) \Rightarrow E_i)_{Li^{2+}} = 0 - (E_H\ 13{,}6 \times \frac{Z^2}{n^2})$

$$E_i)_{Li^{2+}} = 13{,}6 \times \frac{3^2}{1^2} = 122{,}4\ eV.$$



2.a L'energie d'excitation

• l'energie d'excitation ① $n=1 \rightarrow n=2$

$$\Delta E_{1\to n} = E_n)_{Li^{2+}} - E_1)_{Li^{2+}}$$

$$\Delta E_{1\to n} = -\frac{Z^2}{n^2} 13{,}6 + \frac{Z^2}{1} 13{,}6 \quad \text{pour } E_1)_{Li^{2+}} = -122{,}4\,eV = -13{,}6 Z^2$$

on ~~peut~~ peut ecrire

$$\Delta E_{1\to n})_{Li^{2+}} = Z^2 \times 13{,}6 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 122{,}4 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

$$\Rightarrow \Delta E_{1\to 2} = 122{,}4 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 91{,}8\ eV.$$

• l'energie d'excitation ② $n=1 \rightarrow n=3$.

$$\Delta E_{1\to 3} = 122{,}4 \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = 108{,}8\ eV.$$

• L'energie d'excitation ③ $n=1 \rightarrow n=4$

$$\Delta E_{1\to 4} = 122{,}4 \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = 114{,}75\ eV.$$

2.b La longueur d'onde $\lambda_{1\to 2}$:

$$\Delta E_{12})_{Li^{2+}} = \frac{hc}{\lambda_{12}} \Rightarrow \lambda_{12} = \frac{hc}{\Delta E_{1\to 2})_{Li^{2+}}}$$

A.N :

$$\lambda_{1\to2} = \frac{6{,}62.10^{-34} \times 3.10^{8}}{91{,}8 \times 1{,}6.10^{-19}} = 1{,}36.10^{-8}\,m = 136\,\mathring{A}$$

Exercice 03 : (voir le cours ~~a~~atome d'hydrogene).