Cours et exercices corrigés analyse fonctionnelle L3

Auteurs

Hameida Ali

Université Frères Mentouri Constantine

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Memou Ameur

Université M'Sila

Département de Mathématiques

2020 - 2021

Table des matières

Introduction

Noter que,

(1) une fonction associe des nombres à des nombres,

(2) un opérateur transforme des fonctions en fonctions, et

(3) une fonctionnelle transforme les fonctions en nombres.

Le poly décrit brièvement ce cours comme «l'étude d'opérateurs linéaires bornés sur des espaces linéaires normés».

En conséquence, nous commençons par une étude des espaces linéaires (qui, vous le verrez, ne sont en réalité que des espaces vectoriels) et des opérateurs linéaires (dont des exemples sont des matrices dans des espaces vectoriels de dimension finie).

1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.

Un espace vectoriel complexe (ou un espace vectoriel sur le corps IC) (ou un espace linéaire complexe) est un ensemble V avec addition

$$V \times V \to V,$$

$$(x, y) \to x + y \text{ la somme de } x \text{ et } y,$$

et multiplication scalaire

$$C \times V \to V,$$

$$(\lambda, x) \to \lambda x \text{ le produit de } \lambda \text{ et } x,$$

satisfaisant aux règles suivantes:

- $x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in V,$
- $x + y = y + x, \forall x, y \in V,$
- $\exists 0 \in V: 0 + x = x, \forall x \in V,$
- $\forall x \in V, \exists -x \in V: x + (-x) = 0,$
- $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y, \forall x, y \in V, \forall \lambda \in C,$
- $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in C,$
- $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x, \forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in C,$
- $1x = x, \forall x \in V.$

Il est facile de voir que l'arithmétique habituelle est vraie dans V.

Remarque 1.2.

De même, nous pouvons définir un espace vectoriel réel en remplaçant IC par IR dans la définition.

Exemples 1.3.

1. $IC^n = \{(x_1, \ldots, x_n): x_i \in IC, \forall i = 1, \ldots, n; n \in IN\}$, l'espace vectoriel complexe de n-tuples de nombres complexes avec addition des coordonnées

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)\,; (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in IC^n$$

et multiplication des coordonnées par un scalaire

$$\lambda (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda\, x_n), \lambda \in IC, (x1, \ldots, xn) \in IC^n.$$

2. Un espace vectoriel complexe de dimension infinie:

$$IC^{IN} = \{(x_1, \ldots, x_n, \ldots): x_i \in IC, \forall i \in IN\}$$

est l'espace vectoriel complexe de suites de nombres complexes avec addition des coordonnées et multiplication scalaire:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots), \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \dots),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n, \dots), y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in IC^{IN}, \qquad \lambda \in IC.$$

3. L'espace vectoriel complexe de toutes les fonctions continues à valeurs complexes sur [0,1]

$$C\,[0,1] = \{f: [0,1] \to IC: f \text{ est continue sur } [0,1]\}$$

avec addition ponctuelle

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), f, g \in C\,[0,1], t \in [0,1],$$

et multiplication scalaire

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t), f \in C\,[0,1], \qquad \lambda \in IC, t \in [0,1].$$

Ces opérations sont bien définies en raison du fait suivant (du cours d'analyse de base):

Si f, g sont des fonctions continues sur [0,1] et $\lambda \in IC$ alors $(f + g)$ et λf sont continues sur $[0, 1]$.

1.1 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.4.

Un sous-ensemble non vide de W d'un espace vectoriel V est dit un sous-espace vectoriel (ou un sous-espace linéaire) si

1. Pour chaque $x, y \in W, x + y \in W$;

2. Pour chaque $x \in W$ et chaque $\lambda \in IC$ (ou IR); $\lambda x \in W$.

Remarque 1.5.

Un sous-espace vectoriel W est lui-même un espace vectoriel par rapport à l'addition et à la multiplication scalaire définies sur V.

Question 1.6.

Soit $\overline{D}$ le disque unité fermée, c'est-à-dire

$$\overline{D} = \{z \in IC: |z| \leq 1\}$$

Il est évident que $\overline{D}$ est un sous-ensemble de IC.

$\overline{D}$ est-il un sous-espace vectoriel de IC?

La réponse est non.

Les conditions (1) et (2) de la définition d'un sous-espace vectoriel ne sont pas remplies:

1 Pour $z_1 = z_2 = 1$, nous avons $z_1 + z_2 = 2$, donc $|z_1 + z_2| = 2$. Ainsi $z_1 + z_2 \notin \overline{D}$.

2 Pour $z = i$, nous avons $|\lambda z| = |\lambda|$ pour chaque $\lambda \in IC$. Ainsi $\lambda z \notin \overline{D}$ lorsque λ est tel que $|\lambda| > 1$.

Exemple 1.7.
Montrer que $W = \{f \in C\,[0,1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$ est un sous-espace linéaire de $C\,[0,1]$

Preuve.
1) Il est évident que W est un sous-ensemble de $C[0,1]$, c'est-à-dire $W \subset C[0,1]$.

2) W est un sous-ensemble non vide.

Par exemple, $f_0\,(t) = 2t - 1$ appartient à W, puisque

$$\int_0^1 f_0\,(t)\,dt = \int_0^1 (2t - 1)\,dt = (\frac{2t^2}{2} - t)\,|_0^1 = 0.$$

3) Pour chaque $f, g \in W$, nous avons

$$\int_0^1 (f+g)(t)\,dt = \int_0^1 (f\,(t) + g(t))\,dt \overset{\substack{\text{par la linéarité}\\ \text{des intégrales}}}{=} \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

Ainsi $f + g \in W$.

4) Pour chaque $f \in W$ et $\lambda \in IC$, nous avons

$$\int_0^1 (\lambda f)\,(t)\,dt = \int_0^1 \lambda f(t)\,dt \overset{\substack{\text{par la linéarité}\\ \text{des intégrales}}}{=} \lambda \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Ainsi $\lambda f \in W$. Par conséquent, W est un sous-espace vectoriel de $C\,[0,1]$.

Exemple 1.8.
Soit l^2 l'ensemble de toutes les suites complexes $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui sont carré sommables, c'est-à-dire satisfont $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$; on écrit

$$l^2 = \left\{(x_1, \dots, x_n, \dots): x_i \in IC, \forall i \in IN \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\right\}.$$

Montrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de IC^{IN}.

Rappeler que

$IC^{IN} = \{(x_1, \dots, x_n, \dots): x_i \in IC, \forall i \in IN\}$ avec

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + yn, \dots), \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda\, x_n, \dots)$$

Preuve.
1) Il est évident que l^2 est un sous-ensemble de IC^{IN}.

2) La suite $= (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in l^2$, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Ainsi l^2 n'est pas vide.

3) Nous devons prouver que, pour tout $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$,

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots) \in l^2$$

Il faut donc montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2$ converge.

Nous le prouverons dans le théorème 1.11.

4) Pour tout $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$ et $\lambda \in IC$ nous avons $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda\, x_n, \ldots)$

Notez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^2 |x_n|^2 = |\lambda|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

donc $\lambda x \in l^2$.

Ainsi l^2 est un sous-espace vectoriel de IC^{IN}, et l^2 est un espace vectoriel complexe.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz 1.9.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right)^{1/2}$$

pour tout $a_k, b_k \in IR$; $a_k, b_k \geq 0, k = 1,2, \ldots, n$; $n \in IN$.

Elle découle de

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a_i b_j - a_j b_i \right)^2.$$

Lemme 1.10.

Pour tout $x, y \in l^2$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n|$ *converge absolument et*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour chaque $k \in IN$, nous avons

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n \bar{y}_n| = \sum_{n=1}^{k} |x_n| |\bar{y}_n| \overset{\substack{\text{par l'inégalité} \\ \text{de Cauchy-Schwarz}}}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{k} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{k} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cette dernière expression est un nombre fini indépendant de k, et donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n|$ converge et lorsque on fait tendre k vers $+\infty$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n\bar{y}_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.11.

Pour tout $x, y \in l^2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^2 \leq \left\{(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

et $x + y \in l^2$.

Preuve.

Pour chaque $n \in IN$,

$$\begin{aligned} |x_n + y_n|^2 &= (x_n + y_n)(\overline{x_n} + \overline{y_n}) \\ &= x_n\overline{x_n} + y_n\overline{x_n} + x_n\overline{y_n} + y_n\overline{y_n} \\ &= |x_n|^2 + x_n\overline{y_n} + \overline{x_n\overline{y_n}} + |y_n|^2 \\ &\leq |x_n|^2 + 2|x_n\overline{y_n}| + |y_n|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $k \in IN$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k}|x_n + y_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^{k}(|x_n|^2 + 2|x_n\overline{y_n}| + |y_n|^2) \\ &= \sum_{n=1}^{k}|x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{k}|x_n\overline{y_n}| + \sum_{n=1}^{k}|y_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|x_n\overline{y_n}| + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 + 2(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2 \\ &= \left\{(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est un nombre fini indépendant de k, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^2$ Converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n + y_n|^2 \leq \left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$$

et le théorème est démontré.

2 Espaces normés

Supposons que nous ayons un espace vectoriel V, la généralisation de IR^n, et que nous voulons connaître la taille des vecteurs $x \in V$, et la distance entre deux vecteurs $x, y \in V$.

Supposons que nous souhaitions également estimer la distance d'un vecteur $x \in V$ à un sous-espace vectoriel $W \subset V$. Pour traiter ce type de problème, nous définissons une norme sur V.

Définition 2.1.
Une application

$$\| \cdot \| : V \to IR$$

$$x \to \| x \|$$

où V *est un espace vectoriel complexe (réel), est appelée* ***une norme*** *si elle satisfait*

N1 $\| x \| > 0$ *pour tous les* $x \in V \setminus \{0\}$*;*

N2 $\| \lambda x \| = | \lambda | \; \| x \|$ *pour tous les scalaires* $\lambda \in IC$ $(\lambda \in IR)$ *et* $x \in V$*;*

N3 $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *pour tout* $x, y \in V$ *(l'inégalité triangulaire).*

Remarque 2.2.
Notez que $N2$ implique que $\| 0 \| = 0$. Ainsi, nous avons

$$\| x \| = 0 \text{ si et uniquement si } x = 0.$$

Exemple 2.3.
Dans $IR^2 = \big((x, y): x, y \in R\big)$, l'application

$$\|.\|_2 : IR^2 \to IR$$

$$(x, y) \to \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

C'est ce qu'on appelle la norme euclidienne d'un vecteur. La norme euclidienne n'est qu'une façon de mesurer la longueur.

Maintenant, nous allons vérifier que $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ définit vraiment une norme sur IR^2, c'est-à-dire que nous devons vérifier que les conditions N1, N2, N3 sont remplies.

N1 Pour tout $v = (x, y) \neq 0, \|v\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

N2 Pour tout $v \in IR^2$ et $\lambda \in IR$,

$$\|\lambda v\|_2 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_2 = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2(x^2 + y^2)} = |\lambda|\sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda|\|v\|_2.$$

N3 Pour tout $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2) \in IR^2$,

$$\|v_1 + v_2\|_2^2 = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2$$

$$= (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

$$= \|v_1\|_2^2 + \|v_2\|_2^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \leq (x_1^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}(x_2^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}} = \| v_1 \|_2 \| v_2 \|_2$$

Donc

$$\|v_1 + v_2\|_2^2 \leq \|v_1\|_2^2 + 2 \| v_1 \|_2 \| v_2 \|_2 + \|v_2\|_2^2 = (\| v_1 \|_2 + \| v_2 \|_2)^2$$

Par conséquent,

$$\| v_1 + v_2 \|_2 \leq \| v_1 \|_2 + \| v_2 \|_2$$

C'est ce qu'on appelle l'inégalité triangulaire.

Définition 2.4.

Une paire $(V, \| \cdot \|)$, où V est un espace vectoriel réel ou complexe et $\| \cdot \|$ est une norme sur V est appelée ***un espace normé****.*

Exemple 2.5.

Montrons que $(l^2, \| \cdot \|_2)$ est un espace normé, où

$$l^2 = \left\{(x_1, \dots, x_n, \dots) : x_i \in IC, \forall i \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\} \text{ et } \| x \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.

Nous avons prouvé auparavant que l^2 est un espace vectoriel complexe, nous devons donc vérifier que $\| \cdot \|_2$ est une norme sur l^2.

L'application

$$\| \cdot \|_2 : l^2 \to IR ;$$

$$x \to \| x \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est bien définie, car comme $x \in l^2$ par définition la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ converge.

Nous allons maintenant vérifier que les conditions N1, N2, N3 sont remplies.

N1 Il est évident que, pour $x \in l^2 \setminus \{0\}$, c'est-à-dire $x \neq 0$, il existe un entier $i_0 \in IN$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ c'est-à-dire $| x_{i_0} | > 0$. Ainsi

$$\| \ x \ \|_2 \ = \ \lambda \geq \ | \, x_{i_0} \, | > \ 0.$$

N2. Nous devons montrer que $\| \ \lambda x \ \|_2 = \ | \, \lambda \, | \ \| \ x \ \|_2$ pour tout $\lambda \in IC$ et tout $x \in l^2$.

Nous avons

$$\| \ \lambda x \ \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^2 |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \ \| \ x \ \|_2$$

pour tout $\lambda \in IC$ et tout $x \in l^2$, selon les besoins.

N3. Nous devons montrer que $\| \ x \ + \ y \ \|_2 \leq \| \ x \ \|_2 + \| \ y \ \|_2$ pour tout $x, y \in l^2$.

Par le théorème 1.11, pour tout $x, y \in l^2$,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a donc, pour tout $x, y \in l^2$,

$$\| \ x \ + \ y \ \|_2 \leq \| \ x \ \|_2 + \| \ y \ \|_2$$

Par conséquent, $(l^2, \| \cdot \|_2)$ est un espace normé.

Exemple 2.6.
Montrons que $(C\,[0,1], \| \cdot \|_\infty)$ est un espace normé, où

$$C[0,1] = \{f: [0,1] \to \ C: f \text{ est continue sur } [0,1]\} \ \text{ et } \ \| \ f \ \|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} | \, f\,(t) \, | \, .$$

Preuve.
Nous avons montré auparavant que $C\,[0,1]$ est un espace vectoriel complexe.

Nous devons donc vérifier que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme sur $C\,[0,1]$, c'est-à-dire que nous devons montrer que les conditions N1, N2, N3 sont satisfaites.

N1 Si $f \neq \ 0$, il existe $t_0 \in \ [0,1]$ tel que $f(t_0) \ \neq \ 0$ c'est-à-dire $|f(t_0)| > 0$. Ainsi

$$\| \ f \ \|_\infty = \ \sup_{0 \leq t \leq 1} | \, f(t) \, | \geq \ | \, f(t_0) \, | > \ 0.$$

Donc $\| \ f \ \|_\infty > \ 0$ pour tout $f \in C\,[0,1] \setminus \{0\}$.

N2 Soit $\lambda \in IC$ et $f \in C\,[0,1]$, alors

$$\| \, \lambda f \ \|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda\, f(t) \, | = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\lambda \, ||f(t) \, | = |\lambda \, | \sup_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| = |\lambda \, | \ \| \ f \ \|_\infty$$

N3 Soit $f, g \in C\,[0,1]$. On voit facilement que, pour tout $t \in \ [0,1]$,

$$|f(t)+g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)| \leq \sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)| + \sup_{0\leq t\leq 1}|g(t)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

Ainsi

$$\sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)+g(t)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

Donc $\| f+g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$ pour tout $f, g \in C\,[0,1]$.

3 Espaces préhilbertiens

On considère dans tout ce chapitre, un espace vectoriel V sur $K = IR$ ou IC.

Définition 3.1

On appelle **produit scalaire** sur V toute application $\langle .,. \rangle$ de $V \times V$ dans K telle que, quels que soient $x;\ y;\ x' \in V; \lambda;\ \mu \in K$, on ait les propriétés suivantes :

a) $\langle \lambda x + \mu x';\ y \rangle = \lambda \langle x;\ y \rangle + \mu \langle x';\ y \rangle$ (linéarité en x)

b) Si $K = IR;\ \langle y;\ x \rangle = \langle x;\ y \rangle$ (symétrie)

Si $K = IC; \langle y;\ x \rangle = \overline{\langle x;\ y \rangle}$ (antisymétrie ou symétrie hermitienne)

c) $\langle x, x \rangle \in IR_+$ (positivité)

d) $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$:

Remarques 3.2

1) Si $K = IR$, le produit scalaire est aussi linéaire dans la seconde variable; il est "bilinéaire symétrique".

Mais si $K = IC$, les propriétés (a) et (b) donnent :

$$(x;\ \lambda y + \mu y') = \bar{\lambda}(x;\ y) + \bar{\mu}(x;\ y') \qquad \forall x;\ y;\ y' \in H\ ; \forall \lambda;\ \mu \in IC$$

le produit scalaire n'est pas linéaire dans la seconde variable, il est anti linéaire en y.

On parle alors de forme " sesquilinéaire hermitienne".

2) Une application $\langle .,. \rangle :\ V \times V \to K$ qui satisfait uniquement les trois premiers axiomes (a), (b) et (c) est appelée semi-produit scalaire.

Définition 3.3

Un K-espace vectoriel V muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien** (réel si $K = IR$; complexe si $K = IC$).

Les principaux exemples à retenir sont IC^n et ℓ_2.

Exemple 3.4
Considérons

$$IC^n = ((x_1, \dots, x_n): x_i \in IC, \forall i = 1, \dots, n\}$$

Il a un produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

pour $x = (x_1, \dots, x_n)\ et\ y = (y_1, \dots, y_n)$.

Ainsi on définit l'application

$$\langle .,. \rangle : IC^n \times IC^n \to IC$$

$$(x, y) \to \langle x, y\rangle = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

Cette application a les propriétés suivantes:

(i) Pour tout $x, y \in IC^n$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i \overline{x_i}} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x_i}\right)^{-} = \overline{\langle y, x\rangle}.$$

(ii) Pour tout $\lambda \in IC$ et $x, y \in IC^n$,

$$\langle \lambda x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \overline{y_i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \lambda\langle x, y\rangle$$

(iii) Pour tout $x, y, z \in IC^n$,

$$\langle x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\overline{z_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{z_i} = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

(iv) Pour tous les $x \in IC^n \setminus \{0\}$,

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0.$$

Ainsi IC^n muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ est un espace préhilbertien.

Nous aimerions trouver une version de dimension infinie de IC^n.

On peut parler de l'espace vectoriel complexe $IC^{IN} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} : x_i \in IC, \forall i \in IN\}$.

Question 3.5.
La série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ converge-t-elle pour tous les x et y de IC^{IN}?

Malheureusement, cette série ne converge pas pour certains x et y de IC^{IN}, il n'y a donc pas de moyen naturel d'étendre la notion très importante du produit scalaire à IC^{IN}.

Exemple 3.6.
Considérons

$$l^2 = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in IC, \forall n \in IN \text{ telles que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right\}$$

avec le produit scalaire

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : l^2 \times l^2 \to IC$$

$$(x, y) \quad \to \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n} \ .$$

Alors $(l^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

Preuve.
Dans la section 1, nous avons démontré le lemme 1.10:

Pour tout $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n|$ converge absolument et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : l^2 \times l^2 \to IC$$

$$(x, y) \quad \to \langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

est bien définie

2) De manière similaire au cas de IC^n, nous pouvons vérifier que l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : l^2 \times l^2 \to IC$$

satisfait les conditions (i) - (iv) de la définition du produit scalaire.

Exemple 3.7.
L'espace vectoriel complexe $C\,[0,1] = \{f : [0,1] \to IC : f \; est \; continue \; sur \; [0,1]\}$ devient un espace préhilbertien lorsqu'il est doté du produit scalaire

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C\,[0,1] \times C\,[0,1] \to IC$$

donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt.$$

Vérifions que les conditions (i) - (iv) de la définition du produit scalaire sont remplies.

(i) Pour tout $f, g \in C\,[0,1]$,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\,(t)\,\overline{g\,(t)}\,dt = \int_0^1 \overline{g\,(t)\,\overline{f\,(t)}}\,dt = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

(ii) Pour tout $f, g \in C\,[0,1]$ et $\lambda \in IC$,

$\langle \lambda f, g\rangle = \int_0^1 \lambda f(t)\overline{g(t)}dt$

$= \lambda\int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ (par la linéarité des intégrales)

$= \lambda\langle f, g\rangle.$

(iii) Pour tout $f_1, f_2, g \in C\,[0,1]$,

$\langle f_1 + f_2, g\rangle = \int_0^1 (f_1\,(t) + f_2(t))\,\overline{g\,(t)}\,dt$

$= \int_0^1 f_1(t)\,\overline{g(t)}\,dt + \int_0^1 f_2(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ (par la linéarité des intégrales)

$= \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle.$

(iv) Lorsque $f \in C\,[0,1]$ et $f \neq 0$,

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 |\,f(t)|^2\,dt > 0.$$

Ainsi $(C[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

Théorème 3.9.

Pour tout x, y, z dans un espace préhilbertien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *et tout $\lambda \in IC$,*

(i) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$;

(ii) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

(iii) $\langle \underline{0}, x\rangle = \langle x, \underline{0}\rangle = 0$;

(iv) si $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ pour tout $z \in V$, alors $x = y$.

Remarque 3.10.
Par (i) et (ii), un produit scalaire est conjugué linéaire dans le deuxième argument.

Preuve du théorème 3.9.
(i) Soit $x, y \in V$ et $\lambda \in IC$. alors

$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle}$ (par (i) de la définition du produit scalaire)

$= \{\lambda\langle y, x\rangle\}^-$ (par (ii) de la définition du produit scalaire)

$= \bar{\lambda}\,\overline{\langle y, x\rangle}$

$= \bar{\lambda}\,\langle x, y\rangle$ (par (i) de la définition du produit scalaire).

(ii) Soit $x, y, z \in V$. alors

$\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle}$ (par (i) de la définition du produit scalaire)

$= \{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle\}^-$ (par (iii) de la définition du produit scalaire)

$= \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle}$

$= \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ (par (i) de la définition de produit scalaire).

(iii) Pour tout $x \in V$,

$\langle \underline{0}, x\rangle = \langle 0 \cdot \underline{0}, x\rangle = 0 \cdot \langle \underline{0}, x\rangle$ par (ii) de la définition du produit scalaire

$= 0.$

(iv) Soit $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ pour tout $z \in V$. Alors, par la linéarité du produit scalaire dans le premier argument, pour tout $z \in V$,

$$0 = \langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = \langle x - y, z\rangle.$$

En particulier, pour $z = x - y$, on a $\langle x - y, x - y\rangle = 0.$

Il résulte donc de (iv) de la définition du produit scalaire que $x - y = 0$; donc $x = y$.

3.1 Espaces préhilbertiens en tant qu'espaces normés

Dans le cas familier de IR^3, la grandeur $\|u\|_2$ d'un vecteur $u \in IR^3$ est égal à $\langle u, u\rangle^{1/2}$:

$$\|u\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \langle u, u\rangle^{1/2},$$

où $u = (x, y, z)$. La distance euclidienne entre des points avec des vecteurs de position u, v est $\|u - v\|_2$.

Nous pouvons copier ceci pour introduire une norme naturelle dans n'importe quel espace préhilbertien.

Définition 3.11.

La norme d'un vecteur x dans un espace préhilbertien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, écrite $\|u\|_2$, est définie comme étant $\langle u, u\rangle^{1/2}$.

Remarque 3.12.

Plus tard, nous montrerons que l'application

$$\|.\|_2 : \ V \rightarrow IR;$$

$$x \to \|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

est toujours une norme.

Exemple 3.13.
$(l^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Nous avons

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{x_i}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

Trouvez $\| x_0 \|_2$, où $x_0 = (3i, 0, -4, 0, \dots)$.

Par ce qui précède,

$$\| x_0 \|_2 = (|3i|^2 + |-4|^2)^{1/2} = (9 + 16)^{1/2} = 5.$$

Exemple 3.14.
$(C\,[0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Nous avons

$$\| f \|_2 = \left(\int_0^1 f(t)\,\overline{f(t)}\, dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 | f(t) |^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Trouvez $\| f_0 \|_2$, où $f_0(t) = 1 - it$.

Par ce qui précède

$$\| f_0 \|_2 = \left(\int_0^1 |1 - it|^2\, dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (1 + t^2)\, dt\right)^{1/2} = \left(t|_0^1 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Remarque 3.15.
Considérons $C\,[0,1]$, l'espace vectoriel des fonctions à valeur complexes continues sur $[0,1]$.

Notez que les espaces normés:

1. $(C\,[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ où $\| f \|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} |f(t)|$ et

2. $(C\,[0,1], \|\cdot\|_2)$ où $\| f \|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$,

ont le même espace vectoriel sous-jacent, mais des normes différentes.

Théorème 3.16. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Pour tout x, y dans un espace préhilbertien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$,

$$|\langle x, y\rangle| \le \| x \|_2 \| y \|_2$$

avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Preuve.
Lorsque $y = \lambda x$ pour $\lambda \in IC$, nous avons

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x, \lambda x\rangle| = \left|\bar{\lambda}\langle x, x\rangle\right| = |\lambda| \parallel x \parallel_2^2 = |\lambda| \parallel x \parallel_2 \parallel x \parallel_2$$

$$= \parallel \lambda x \parallel_2 \parallel x \parallel_2 = \parallel y \parallel_2 \parallel x \parallel_2 .$$

Supposons maintenant que x et y ne soient pas linéairement dépendants. Alors, pour tout $\lambda \in IC$,

$$x + \lambda y \neq 0, \text{donc} \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle > 0.$$

Ainsi, par la définition du produit scalaire, pour tout $\lambda \in IC$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle &= \langle x, x + \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle. \end{aligned}$$

Choisissez $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, alors

$$\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}.\langle y, x\rangle > 0,$$

par conséquent $\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle > \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle$. Puisque $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ et $\parallel x \parallel_2^2 = \langle x, x\rangle$,

nous avons

$$| \langle x, y\rangle | < \parallel x \parallel_2 \parallel y \parallel_2$$

pour tous les x et y linéairement indépendants.

Remarque 3.17.
Rappel dans IR^3

$$\langle v, w\rangle = \parallel v \parallel_2 \parallel w \parallel_2 \cos\theta,$$

où θ est l'angle entre v et w. Ainsi, nous pouvons utiliser $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pour tester si les vecteurs sont orthogonaux.

Exemple 3.18.
Démontrer que, pour tout $f \in C\ [1,2]$,

$$\left|\int_1^2 t\overline{f(t)}\, dt\right| \leq \sqrt{\frac{7}{3}} \left(\int_1^2 |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour quel f l'égalité est-elle valable?

Preuve.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz 3.16, nous avons

$$\left|\int_1^2 t\overline{f(t)}\,dt\right| = |\langle g,f\rangle| \text{ (ici } g(t)=t, t\in[1,2])$$

$$\leq \| g \|_2 \| f \|_2 \text{ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

$$= \left(\int_1^2 t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \| f \|_2 = \left(\frac{t^3}{3}\Big|_1^2\right)^{1/2} \| f \|_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}\left(\int_1^2 |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'égalité est valable si et seulement si $f(t) = \lambda t$ pour $\lambda \in IC$.

Théorème 3.19.

Soit $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors

(i) $\| x \|_2 \geq 0$ pour tout $x \in V$ et $\| x \|_2 = 0$ implique $x = 0$;

(ii) $\| \lambda x \|_2 = |\lambda| \; \| x \|_2$ pour tous les $x \in V$ et $\lambda \in IC$;

(iii) $\| x+y \|_2 \leq \| x \|_2 + \| y \|_2$ pour tout $x,y \in V$.

Preuve.
(i) $\| x \|_2 = \langle x,x\rangle^{1/2} \geq 0$. Par (iv) de la définition du produit scalaire,

$$\| x \|_2 = \langle x,x\rangle^{1/2} > 0 \text{ lorsque } x \neq 0.$$

(ii) Pour tout $x \in V, \lambda \in C$,

$$\| \lambda x \|_2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle^{1/2} = (\lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle)^{1/2} = |\lambda| \; \| x \|_2.$$

(iii) Pour tout $x,y \in V$,

$$\| x + y \|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \| x \|_2^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \| y \|_2^2$$

$$= \| x \|_2^2 + 2Re\langle x,y\rangle + \| y \|_2^2 \leq \| x \|_2^2 + 2\,|\langle x,y\rangle|\; \| y \|_2^2$$

$$\leq \| x \|_2^2 + 2 \| x \|_2 \| y \|_2 + \| y \|_2^2 \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

$$= (\| x \|_2 + \| y \|_2)^2 .$$

Ainsi, pour tout $x,y \in V$,

$$\| x+y \|_2 \leq \| x \|_2 + \| y \|_2.$$

Remarque 3.20.

Le théorème montre que $\| x \|_2 = \langle x,x\rangle^{1/2}$ définit une norme dans tout espace préhilbertien.

Par conséquent, grosso modo, chaque espace préhilbertien est un espace normé.

Théorème 3.21 (La loi du parallélogramme)

Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace* préhilbertien*. Alors, pour tout* $x, y \in V$,

$$\| x + y \|_2^2 + \| x - y \|_2^2 = 2 \| x \|_2^2 + 2 \| y \|_2^2.$$

Preuve. (Exercice.)

Exemple 3.22.

Considérons l'espace normé l^1 de suites complexes $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ avec la norme $\| x \|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. La loi du parallélogramme est-elle valable en l^1?

La norme $\| \cdot \|_1$ est-elle induite par un produit scalaire?

Théorème 3.23. (L'identité de polarisation)

Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace préhilbertien. Alors, pour tout* $x, y \in V$

$$4\langle x, y\rangle = \| x + y \|_2^2 - \| x - y \|_2^2 + i \| x + i y \|_2^2 - i \| x - iy \|_2^2,$$

ici $i \in IC$ *est tel que* $i^2 = -1$.

Preuve. (Exercice.)

Notez que l'identité de polarisation peut être écrite

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \| x + i^k y \|_2^2.$$

Ainsi, si $\| \cdot \|_2$ est connu, alors le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ peut être récupéré.

Remarque 3.24.

Les espaces préhilbertiens sont beaucoup plus spéciaux que les espaces normés, et leur géométrie est beaucoup plus proche de la géométrie euclidienne familière.

Comme nous l'avons vu, la loi du parallélogramme n'est pas vraie dans un espace normé en général, par exemple, $(\ell_1, \| \cdot \|_1), (C\ [0,1], \| \cdot \|_\infty)$.

En fait, elle est vraie dans les espaces préhilbertiens.

Si la loi du parallélogramme est vraie dans $(V, \| \cdot \|)$, alors la formule

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \| x + i^k y \|^2$$

définit un véritable produit scalaire sur V.

4 Limites

Soit $(V, \| \cdot \|)$ un espace normé. La norme $\| \cdot \|$ nous aide à mesurer la distance entre deux vecteurs $x, y \in V$, soit $d\,(x, y) = \| x - y \|$, on obtient une métrique sur V pour que (V, d) devienne un espace métrique .

Vérifier que tous les axiomes pour la métrique sont satisfaits (Exercice).

Nous avons maintenant la définition habituelle de de la limite dans un espace métrique :

Définition 4.1.

*Soit (V, // · //) un espace normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in V$, **converge** vers $x \in V$ quand $n \to \infty$ si*

pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $N \in IN$ tel que pour tout $n \geq N, \| x_n - x \| < \varepsilon$,

c'est-à-dire la suite de nombres réels $t_n = \| x_n - x \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Exemple 4.2.
Prenons l'espace vectoriel sous-jacent

$$C\,[0,1] = \{f: [0,1] \to IC: f \text{ est continue sur } [0,1]\}$$

avec deux normes différentes :

$$\| f \|_{\infty} = \sup_{0 \leq t \leq 1} | f(t) | \,, \qquad \| f \|_2 = \left(\int_0^1 | f(t) |^2 \, dt \right)^{1/2} .$$

Considérons la suite de fonctions f_n donnée par

$$f_n\,(t) = \begin{cases} -nt + 1, & si\ t \in [0,1/n] \\ 0 \quad , & si\ t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

La suite converge vers $g \equiv 0$ dans $(C\,[0,1], \|.\|_2)$, mais pas dans $(C\,[0,1], \|.\|_{\infty})$.

Preuve, exercice!

Remarque 4.3.
Les deux métriques

$$d_{\infty}\,(f, g) = \| f - g \|_{\infty}, \text{et } d_2(f, g) = \| f - g \|_2$$

Ne sont pas équivalentes sur $C\,[0,1]$.

Exemple 4.4.
Considérons l'espace $normé$ $(l^{\infty}, \| \cdot \|_{\infty})$, où l^{∞} est l'espace vectoriel complexe de toutes les suites bornées $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes, avec addition par composant et multiplication scalaire et

$$\| x \|_\infty = \sup_{n \in IN} | x_n | .$$

1 Considérons la suite de vecteurs $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, où

$$x_m = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, \ldots)$$

et le vecteur

$$x = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{(n+1)}, \ldots).$$

Alors $x_m \xrightarrow[m \to \infty]{} x$ dans $(l^\infty, \| \cdot \|_\infty)$.

Preuve.

$$\|x_m - x\|_\infty = \left\| (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{m fois}}, -\frac{1}{m+1}, -\frac{1}{m+2}, \ldots) \right\|_\infty$$

$$= sup\left\{\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots\right\} = \frac{1}{m+1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

2 Considérons la suite de vecteurs $(y_m)_{m=1}^{\infty}$, où

$$y_m = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m\, fois}, 0, 0, \ldots)$$

et le vecteur $y = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Alors $y_m \nrightarrow y$ quand $m \to \infty$ dans $(l^\infty, \| \cdot \|_\infty)$.

Preuve.

$$\|y_m - x\|_\infty = \left\| \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{m fois}} - 1, -1, \ldots \right) \right\|_\infty$$

$$= sup\{0,1\} = 1 \nrightarrow 0 \text{ quand m} \to \infty.$$

Définition 4.5.

Soit $(V, \| \cdot \|)$ un espace normé et soit Y un sous-ensemble de V.

*On dit qu'un ensemble Y est **dense** dans $(V, \| \cdot \|)$ si pour chaque $v \in V$ et pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $y \in Y$ tel que $\| v - y \| < \varepsilon$. Et on écrit $\overline{Y} = V$.*

Ou de manière équivalente

Si pour chaque $v \in V$ il existe une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ d'élément de Y tel que $\lim_{n \to +\infty} y_n = v$.

C'est-à-dire que nous pouvons approximer tout vecteur $v \in V$ par un vecteur $y \in Y$ aussi près que nous le voulons.

Exemple 4.6.
Q est dense en $(IR, |\ \cdot\ |)$ via des décimales.

Exemple 4.7.
Considérons l'espace normé $(c_0\ , \|\cdot\|_\infty)$, où

$$c_0 = \{v = (v_1, \dots, v_n, \dots) : v_n \in IC, v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ \}$$

et $\| v \|_\infty = \sup_{n \in IN} | v_n |$; et c_F, le sous-ensemble de c_0 constitué des suites $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ ayant seulement quelque termes différents de zéro. Alors c_F est dense dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Preuve.
Etant donné $v \in c_0\ et\ \varepsilon > 0$. Puisque $v \in c_0$, on a $v = (v_1, \dots, v_n, \dots)$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Ainsi pour $\varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in IN$ tel que $| v_n | < \varepsilon$ pour tout $n \geq N_0$.

Prenons l'élément

$$w = (v_1, \dots, v_{N_0}, 0, \dots) \in c_F.$$

On peut voir que

$$\| v - w \|_\infty = \| (0, \dots, 0, v_{N_0+1}, v_{N_0+2}, \dots) \|_\infty = sup \{| v_{N_0+1} |, | v_{N_0+2} |, \dots\} < \varepsilon.$$

Par conséquent, c_F est dense dans $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Définition 4.8.
Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit $v_1, \dots, v_k, \cdots \in V$.

*On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ **converge** dans $(V, \|\cdot\|)$ si la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ converge dans $(V, \|\cdot\|)$, c'est-à-dire s'il existe $S \in V$ tel que*

$$\| S_n - S \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Définition 4.9.
Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit $v_1, \dots, v_k, \dots \in V$.

*Nous disons que la série $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ **converge absolument** dans $(V, \|\cdot\|)$ si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \| v_n \|$ converge dans IR, c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{\infty} \| v_n \| < \infty$.*

Exemple 4.10.
Considérons l'espace normé $(l^2, \|\cdot\|_2)$, où

$$l^2 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in IC, \forall n \in IN, \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\} \text{ et } \| x \|_2 = (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{1/2} .$$

(1) Fixons un vecteur $x \in l^2, x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, et pour $k \in IN$ considérons le vecteur $v_k = (0, \dots, 0, x_k, 0, \dots)$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = x$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_2$.

(2) Soit $y = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$. La séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, donc $y \in l^2$.

Nous avons prouvé que la série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, où $v_k = (0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots)$ converge dans $(l^2, \| \cdot \|_2)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = y$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ne converge pas absolument dans $(l^2, \| \cdot \|_2)$.

(3) La série $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, où $w_k = (0,0, \dots, 0, \frac{1}{k^2}, 0, \dots)$, converge absolument dans $(l^2, \| \cdot \|_2)$.

Preuve.1
Les sommes partielles

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} v_k \\ &= (x_1, 0,0, \dots, 0,0, \dots) + (0, x_2, 0, \dots, 0,0, \dots) + \dots + (0,0,0, \dots, x_n, 0, \dots) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots), \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| S_n - x \|_2^2 &= \| (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) - (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \|_2^2 \\ &= \| (0, \dots, 0, -x_{n+1}, -x_{n+2}, \dots) \|_2^2 = \textstyle\sum_{k=n+1}^{\infty} | x_k |^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 , \end{aligned}$$

puisque $\sum_{k=1}^{\infty} | x_k |^2 < \infty$.

Preuve.2
Pour $k \in N$,

$$\| v_n \|_2 = \| (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots) \|_2 = \left(\left| \frac{1}{n} \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{n}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{\infty} \| v_n \|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ne converge pas.

Preuve.3
En effet

$$\| w_n \|_2 = \| (0,0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \dots) \|_2 = \left(\left| \frac{1}{n^2} \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{n^2}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| w_n \|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

5 Complétion des espaces normés

Définition 5.1.

*Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé. Une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dans V est appelée **suite de Cauchy** si, pour chaque $\varepsilon > 0$,*

$$\text{il existe } N_0 \in IN \text{ tel que } n, m \geq N_0 \text{ implique } \| x_n - x_m \| < \varepsilon.$$

Cela nous aide à vérifier si une suite converge (éventuellement dans un espace plus grand) sans calculer la limite.

Exemple 5.2.

Considérons l'espace normé $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$, où c_F est l'espace vectoriel composé des suites $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ n'ayant qu'un nombre fini de termes différents de zéro et

$$\| v \|_\infty = \max_{i \in IN} | v_i | .$$

Considérons la suite $v_k = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, \ldots)$ dans $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$.

Montrer que $v = (v_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$.

Preuve.

Étant donné $\varepsilon > 0$, prenons $N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, où $[x]$ est la partie entière de x.

Alors, pour tout $m, n \geq N_0$,

$$\| v_n - v_m \|_\infty = \| (1, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, \ldots) - (1, \tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{m}, 0, \ldots) \|_\infty$$

$$= \begin{cases} \| \left(0, \ldots, -\frac{1}{n+1}, \ldots, -\frac{1}{m}, 0, \ldots\right) \|_\infty & si\ m > n \\ \| \left(0, \ldots, \frac{1}{m+1}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right) \|_\infty & si\ n > m \\ 0 & si\ m = n \end{cases}$$

$$= max \left\{\frac{1}{(n+1)}, \frac{1}{(m+1)}\right\} < \varepsilon.$$

Remarque 5.3.

Nous avons montré dans l'exemple 4.4 que

$$v_k \xrightarrow[k \to \infty]{} v = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$ par rapport à la norme $\| . \|_\infty$.

Notez que $v \in c_0$, mais $v \notin c_F$. Donc la suite v_k est une suite de Cauchy, qui ne converge pas dans $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$, mais converge dans le plus grand espace $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Définitions 5.4.

*a) Un espace normé $(V, \|\cdot\|)$ est dit **complet** si chaque suite de Cauchy converge vers une limite en V.*

b) Un espace normé complet est appelé un espace de ***Banach.***

Exemple 5.5.
L'espace normé $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Preuve.
Nous avons prouvé que la suite $v_k = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0, 0, \ldots)$ dans c_F est une suite de Cauchy, qui ne converge pas dans $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$; voir l'exemple 5.2 et la remarque 5.3. Par conséquent $(c_F, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Théorème 5.6.

a) L'espace normé $(IR, |\cdot|)$ est complet.

b) L'espace normé $(IC, |\cdot|)$ est complet.

Proposition 5.7.

Dans un espace linéaire normé:

(a) Une suite convergente est de Cauchy.

(b) Une suite de Cauchy (x_n) est bornée. Autrement dit,

il existe un $M > 0$ tel que $\| x_n \| < M$ pour tout n.

(c) Toutes les sous-suites d'une suite de Cauchy sont de Cauchy.

(d) Si (x_n) est de Cauchy et qu'une sous-suite converge vers x, alors

x_n converge vers x.

Preuve

(a).

Soit (x_n) une suite convergente avec comme limite x. Il existe alors $N \in IN$ tel que

$$\text{pour tout } n \geq N, \text{on a } \|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit donc $m, n \geq N$, alors

$$\begin{aligned} \| x_m - x_n \| &= \| x_m - x + x - x_n \| \\ &\leq \| x_m - x \| + \| x_n - x \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc (x_n) est de Cauchy.

(b).

Supposons que (x_n) soit une suite de Cauchy, Il existe alors $N \in IN$ tel que

$$\text{pour tout } n, m \geq N \text{ nous avons } \| x_n - x_m \| < \varepsilon = 1.$$

En particulier, avec $n = N$ nous avons $\|x_N - x_m\| < \varepsilon = 1$ et donc $\| x_m \| < \|x_N\| + 1$. Soit

$$K = max \{\|x_1\|, \|x_2\|, \|x_3\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + 1\}.$$

Alors pour tout $n \in N$, $\| x_n \| \leq K$ et donc $\{ x_n \}$ est bornée.

(c).

Soit (x_{n_k}) une sous-suite de la suite de Cauchy (x_n).

Remarquez que $n_k \geq n$ pour tout $k \in IN$. On a que, pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in IN$ tel que

$$\text{pour tout } m, n \geq N, \text{on a } \| x_n - x_m \| < \varepsilon.$$

Donc pour tout $k, l \geq N$, $n_k \geq n \geq N$ et $n_l \geq n \geq N$ et donc $\| x_{n_k} - x_{n_l} \| < \varepsilon$.

Donc $\{ x_{n_k}\}$ est de Cauchy.

(d).

Soit (x_n) Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, Il existe alors $N \in IN$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$\| x_n - x_m \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit (x_{n_k}) converger vers x. Il existe alors $J \in IN$ tel que

$$\text{pour tout } k \geq J \geq N, \text{on a } \| x_{n_k} - x \| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors pour $n \geq max \, \{N, J\}$, on a

$$\| x_n - x \| = \| x_n - x_J + x_J - x \| \leq \| x_n - x_J \| + \| x_J - x \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $(x_n) \rightarrow x$.

Théorème 5.8.

Un espace vectoriel normé X est complet si et seulement si chaque série absolument convergente converge en norme.

Preuve.

Supposons d'une part que X soit complet et que $\sum_n \| x_n \|$ converge.

En écrivant $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$, nous avons

$$\| S_N - S_M \| = \| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \| \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|x_n\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Ainsi $\{S_N\}$ est de Cauchy et donc convergente.

Supposons en revanche que toutes les séries absolument convergentes convergent et que $\{x_n\}$ soit de Cauchy. Choisissons pour chaque j un indice n_j de sorte que

$$m, n \geq n_j \ et \ \| x_m - x_n \| < 2^{-j} .$$

Si $x_0 = 0$, nous avons

$$x_{n_k} = \sum_{j=1}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) .$$

Par l'inégalité triangulaire la série $\sum_{j=1}^{k} (x_{n_j} - x_{n_{j-1}})$ converge absolument.

Par conséquent, x_{n_k} converge vers une certaine limite y.

Pour voir que $\{x_n\}$ converge vers y, nous notons que pour $n \geq n_k$ et k assez grand, nous avons

$$\| x_n - x_{n_k} \| \leq 2^{-k}$$

et donc

$$\| x_n - y \| \leq \| x_n - x_{n_k} \| + \| x_{n_k} - y \| \leq 2^{-k} + 2^{-k} \leq 2^{-(k-1)}$$

et donc $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y$.

Exemple 5.9.
Soit X un espace topologique et Soit $C_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées (à valeurs complexes) sur X.

Définissons la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $C_b(X)$ par $\| u \|_\infty = sup\{| u(x) | : x \in X\}$.

Supposons que $\sum_n \| f_n \|_\infty < \infty$. Alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in C_b(X) \; et \; \| f \|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_\infty$$

et $\sum_n^\infty f_n$ converge vers f en norme (Vérifiez!).

Par le théorème précédent nous concluons que $C_b(X)$ est complet.

Exemple 5.10.
Soit (X, M, μ) un espace de mesure. Nous affirmons que $L^1(X, M, \mu)$ est un espace normé complet par rapport à la norme

$$\| f \|_1 = \int |f(x)| \, d\mu(x) .$$

(Ici, nous identifions les fonctions qui sont égales p.p.)

En fait, supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_1 < \infty$. Alors, par le théorème de la convergence monotone,

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \ \ d\mu \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_1 < \infty$$

de sorte que $g \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ est dans L^1 et donc fini pour presque tout x.

Pour de tels x, nous avons que $f(x) \ = \ \sum_{n\,=\,1}^{\infty} f_n \ (x)$ est fini.

Par le théorème de convergence monotone (TCM)

$$\int |f| \, d\mu = \int \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| \, d\mu \leq \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \ \ d\mu \ \leq \ (MCT) \ \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_1 \ < \infty,$$

nous avons que f est dans L^1. En utilisant à nouveau le TCM,

$$\| \sum_{n=1}^{N} f_n \ - \ f \ \|_1 = \int \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n \right| \, d\mu \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \int |f_n| d\mu \ = \sum_{n=N+1}^{\infty} \| \, f_n \, \|_1 \ \xrightarrow[N \to \infty]{} \ 0.$$

Maintenant, le théorème précédent prouve notre affirmation.

6 Sous-espaces linéaires fermés

Définition 6.1.

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé et soit X un sous-ensemble de V.

*On dit que X est **fermé** si, pour chaque suite convergente de vecteurs de X, sa limite est dans X.*

Exemple 6.2.

1. $(IR, |\cdot|)$ et $X = (0,1)$. X **n'est pas fermé**, par exemple, $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$, mais

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \notin (0,1).$$

2. $(IR, |\cdot|)$ et $X = [0,1]$. X **est fermé**.

Définition 6.3.

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé. Nous disons que W est un sous-espace linéaire fermé de V si W est un sous-espace linéaire et W est fermé par rapport à $\|\cdot\|$.

Exemple 6.4.

c_F est un sous-espace linéaire de c_0, mais c_F n'est pas fermé par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Nous avons prouvé que, pour $v^k = (1, \dots, \frac{1}{k}, 0, \dots)$ de c_F,

$$\lim_{k\to\infty} v^k = v = \left(1, \dots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots\right),$$

donc $v \notin c_F$.

Exemple 6.5.

Montrer que, $W = \{f \in C\,[0,1]: f(t_0) = 0\}$, où $t_0 \in [0,1]$, est un sous-espace linéaire fermé de $C\,[0,1]$ par rapport à la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

Preuve

1. Il est facile de montrer que W est un sous-espace linéaire.

2. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite convergente de fonctions de W, c'est-à-dire

$$f_n \in W \text{ pour tout } n \in IN \text{ et il existe } f \in C\,[0,1] \text{ tel que } \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Notez que, pour tout $t_0 \in [0,1]$,

$$|f_n(t_0) - f(t_0)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \| f_n - f \|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = f(t_0)$. Par hypothèse, $f_n \in W$, c'est-à-dire $f_n(t_0) = 0$.

D'où $f(t_0) = 0$, et donc $f \in W$. Ainsi W est fermé par rapport à $\| \cdot \|_\infty$.

Exercice 6.6.

Soit $Y = \{ (x_n) \in l^1 | \text{au plus un nombre fini de } x_n \neq 0 \}$:

1) Montrez que Y n'est pas complet.

2) Montrer que $\bar{Y} = l^1$.

Solution.

1) Soit

$$x_n = \left(2^{-1} ;\ 2^{-2} ;\ 2^{-3} ; \dots ;\ 2^{-n} ;\ 0 ;\ 0 ;\ 0 ; \dots\right).$$

Alors $x_1;\ x_2; \dots \in Y$. Nous définissons également

$$x = (2^{-1} ;\ 2^{-2} ;\ 2^{-3} ; \dots) \in l^1$$

(Le fait que $x \in l^1$ découle de $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < +\infty$.)

Noter que $v = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in l^1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |v_n| < +\infty$ et $\|v\|_{l^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |v_n|$

Nous affirmons maintenant que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$; cela découle de

$$\|x_n - x\| = \left\|\left(0 ;\ 0 ; \dots ;\ 0 ;\ 2^{-n-1} ;\ 2^{-n-2} ; \dots\right)\right\|$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Notez que $x \notin Y$, par la définition de Y.

Donc par le Théorème 6.7 (b), Y n'est pas fermé (en tant que sous-espace de l^1).

Par conséquent, d'après le Théorème 6.8, Y n'est pas complet.

2) Montrons que la fermeture de Y c'est l^1 i.e. $\bar{Y} = l^1$.

Pour le prouver, soit $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^1$.

Puis formons la suite $y_1, y_2, \dots$ où

$$y_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

Alors $y_1, y_2, \ldots \in Y$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ Car

$$\|x - y_n\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[Preuve détaillée de la dernière affirmation: Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} |x_n|$.

Alors $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n|$ existe en tant que nombre réel, puisque $x = (x_n) \in l^1$.

Donc (S_n) est une suite de Cauchy, et donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que $|S_m - S_n| < \epsilon$ chaque fois que $m \geq n \geq N$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \epsilon \text{ chaque fois que } m \geq n \geq N.$$

Pour n fixé, nous faisons $m \to \infty$ dans la dernière instruction pour obtenir

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \epsilon \text{ chaque fois que } n \geq N$$

Mais un tel $\epsilon > 0$ était arbitraire; d'où nous avons prouvé $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| = 0.$]

D'où par le Théorème 6.7 (a), $x \in \bar{Y}$. Ceci est vrai pour chaque $x \in l^1$. D'où $\bar{Y} = l^1$.

Théorème 6.7 (Fermeture et ensemble fermé)

Soit M un sous ensemble non vide d'un espace métrique (X, d) et $\bar{M}$ sa fermeture. Alors on a

a) $(x \in \bar{M})$ si, et seulement si $(\exists (x_n) \in M$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x)$

b) $(M$ est fermé$)$ si, et seulement si (si $(x_n) \in M$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ alors $x \in M)$

Théorème 6.8 (Sous espace complet):

Un sous espace M d'un espace métrique complet X est lui-même complet si, et seulement si l'ensemble M est fermé dans X.

7 Espaces de Hilbert

Les espaces préhilbertiens IC^n et l^2 partagent une autre propriété pratique:

ils sont complets par rapport à la norme induite par le produit scalaire, c.-à-d.

$$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

7.1 Premières propriétés, exemples

Définition 7.1.

*Un **espace de Hilbert** est un espace préhilbertien qui est complet par rapport à la norme générée par le produit scalaire.*

Théorème 7.2.

L'espace préhilbertien $(l^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert.

Preuve.

Nous prouverons l'exhaustivité de $(l^2, \| \cdot \|_2)$, où

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \quad \text{pour } x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Soit $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $(l^2, \| \cdot \|_2)$ avec $x_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots)$.

Nous devons montrer que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers une limite dans $(l^2, \| \cdot \|_2)$. Nous le ferons en trois étapes:

1. Trouvez une limite candidat a;

2. Montrez que $a \in l^2$;

3. Montrez que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ dans $(l^2, \| \cdot \|_2)$.

Étape 1. Trouver une limite candidate a.

Nous devons trouver $a \in l^2$ tel que

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots)$$

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots)$$

$$x^3 = (x_1^3, x_2^3, \dots, x_n^3, \dots)$$

$$\dots$$

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \dots)$$

$$\dots$$

converge vers $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Considérons une «colonne» fixe n.

La suite $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $(IC, |\cdot|)$ puisque

$$|x_n^k - x_n^l|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k - x_i^l|^2 = \| x^k - x^l \|_2^2$$

et, par hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N_0 \in IN$ tel que

$$k, l \geq N_0 \text{ implique } \| x^k - x^l \|_2 < \epsilon,$$

ce qui implique que

$$|x_n^k - x_n^l| \leq \| x^k - x^l \|_2 < \epsilon.$$

Rappelez-vous que $(IC, |\cdot|)$ est complet.

Ainsi $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers une limite $a_n \in IC$ quand $k \to \infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{k \to \infty} x_n^k = a_n.$$

Considérons $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ dans IC^{IN}.

Étape 2. La limite candidate a appartient à l^2.
Nous montrerons que $(x^k - a) \in l^2$ pour certains k.
Puisque l^2 est fermé par soustraction, il s'ensuit que

$$a = \underbrace{x^k}_{\in l^2} - \underbrace{(x^k - a)}_{\in l^2} \in l^2.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N_0 \in IN$ tel que $k, l \geq N_0$ implique $\| x^k - x^l \|_2 < \epsilon$.

Choisissons $N \in IN$. On a, pour tout $k, l \geq N_0$,

$$\sum_{i=1}^{N} \left| x_i^k - x_i^l \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^k - x_i^l \right|^2 = \| x^k - x^l \|_2^2 < \epsilon^2.$$

Soit $l \to \infty$ la somme finie sur le côté gauche. Par les propriétés des limites dans IC, nous avons

$$\lim_{l \to \infty} \textstyle\sum_{i=1}^{N} \left| x_i^k - x_i^l \right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| x_i^k - \lim_{l \to \infty} x_i^l \right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| x_i^k - a_i \right|^2 \text{ et}$$

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{i=1}^{N} |x_i^k - x_i^l|^2 \leq \epsilon^2.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i^k - a_i|^2 \leq \epsilon^2.$$

Étant donné que cela est vrai pour tous les $N \in IN$, nous avons, en faisant $N \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} | \ x_i^k \ - \ a_i \ |^2 \ \leq \epsilon^2.$$

D'où $x^k \ - \ a \in l^2$ et $\|x^k \ - \ a\|_2 \ = \ \left(\sum_{i=1}^{\infty} | \ x_i^k \ - \ a_i \ |^2\right)^{1/2} \leq \epsilon$ pour tout $k \geq N_0$.

Étape 3. $\boldsymbol{\lim_{k \to \infty} x^k \ = \ a.}$

Nous avons montré à l'étape 2 que pour tout $\epsilon > \ 0$, il existe $N_0 \in N$ tel que

$$k \geq N_0 \text{ implique } \| \ x^k \ - \ a \ \|_2 \leq \epsilon.$$

D'où $\lim_{k \to \infty} x^k \ = \ a.$

Ainsi, chaque suite de Cauchy dans l^2 converge vers une limite dans l^2, et donc l^2 est complet.

Exemple 7.3.
Soit ℓ_F^2 le sous-espace de l^2 composé des suites $x \ = \ (x_n)_{n\,=\,1}^{\infty}$ ayant seulement un nombre fini de termes différents de zéro.

Montrer que ℓ_F^2 n'est pas un espace normé complet par rapport à la norme

$$\| \ x \ \|_2 = \ \langle x, x \rangle^{1/2} \ = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} ,$$

donc ℓ_F^2 n'est pas un espace de Hilbert.

Preuve.
1. Considérons la suite $(x_k)_{k\,=\,1}^{\infty}$ dans ℓ_F^2 avec

$$x^1 \ = \ (1,0, \ldots , 0,0, \ldots)$$

$$\ldots$$

$$x^k \ = \ (1, \frac{1}{2}, \ldots , \frac{1}{k}, 0, \ldots)$$

$$\ldots$$

2. Nous pouvons voir que

$$\| \ x^k \ - \ x^l \ \|_2 = \left(\sum_{i\,=\,1}^{\infty} \left| \ x_i^k \ - \ x_i^l \ \right|^2\right)^{1/2} \ = \ \left(\sum_{min\,\{k,l\}+\,1}^{max\,\{k,l\}} (1/i\,)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \ | \ S_{max\,\{k,l\}} \ - S_{min\,\{k,l\}} \ |^{1/2} \ \ \rightarrow \ 0 \text{ quand } k, l \ \rightarrow \ \infty,$$

où $S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i^2}$, puisque la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge dans $(IR, |\cdot|)$.

Ainsi la suite $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $(\ell_F^2, \|.\|_2)$.

3. On voit aussi que, pour $y = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in l^2$,

$$\| x^k - y \|_2 = \left\| \left(0, \ldots, 0, -\frac{1}{(k+1)}, -\frac{1}{(k+2)}, \ldots\right) \right\|_2 = \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2}\right)^{1/2} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

D'où $\lim_{k \to \infty} x^k = y$ dans l^2.

4. Notez que si une suite dans un espace normé tend vers une limite, alors la limite est unique.

Supposons que $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ converge vers $w \in \ell_F^2 \subset l^2$, alors dans $(l^2, \|\cdot\|_2)$, $\lim_{k \to \infty} x^k = y$ et $\lim_{k \to \infty} x^k = w$.

Ainsi $w = y$, mais $y \notin \ell_F^2$.

Par suite, la suite $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ne converge pas vers une limite dans ℓ_F^2.

Par conséquent, ℓ_F^2 n'est pas complet, et donc ℓ_F^2 n'est pas un espace de Hilbert.

Remarque 7.4.
$(\ell_F^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien qui n'est pas un espace de Hilbert.

Remarque 7.5.
Chaque espace de Hilbert avec $\|\cdot\|_2 = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$ est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace normé complet.

Exemple 7.6.
$(C\,[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach qui n'est pas un espace de Hilbert, car il est impossible de définir un produit scalaire sur $C\,[0,1]$ qui induit la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pourquoi?

Exemple 7.7.
L'espace vectoriel complexe $C\,[0,1]$ avec le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt,$$

est un espace préhilbertien qui n'est pas complet par rapport à la norme

$$\| f \|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left(\int_0^1 | f(t) |^2\, dt\right)^{1/2},$$

et n'est donc pas un espace de Hilbert.

Preuve.
Dans la section 3, nous avons prouvé que $(C\ [0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

Maintenant nous devons montrer que $(C\ [0,1], \|\cdot\|_2)$ n'est pas complet.

1) Considérons les fonctions $f_n \in C\ [0,1]$, où

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 \quad , & t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1, & t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \\ 1 \quad , & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Montrez que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $(C\ [0,1], \|\cdot\|_2)$ mais $\{f_n\}$ n'a pas de limite dans $C\ ([0,1])$ et complétez la preuve.

7.2 Orthogonalité, théorèmes de projection

Définition 7.8.

Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien sont dits orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$

La relation d'orthogonalité ainsi définie, notée $\perp$, est symétrique.

Soit $x \in H$. D'après l'axiome (d) de la définition 1.1, il est immédiat que si x est orthogonal à tout $y \in H$, alors $x = 0$.

Proposition 7.9. (Théorème de Pythagore)

Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux d'un espace préhilbertien, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad (5)$$

Preuve.

Découle immédiatement de ce que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\ (x;\ y) \qquad \forall x;\ y \in H$$

Remarque 7.10.

La réciproque de la proposition ci-dessus est vraie dans le cas des espaces préhilbertiens réels.

Définition 7.11.

On appelle orthogonal d'une partie A de H, l'ensemble noté $A^{\perp}$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A,

$$A^{\perp} = \{x \in H;\ (x;\ a) = 0,\ \ \forall a \in A\}$$

Proposition 7.12.

Pour deux parties A et B d'un espace préhilbertien H, on a :

i) $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé.

ii) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$

iii) $A^{\perp} = (\bar{A})^{\perp} = (VectA)^{\perp} = (\overline{VectA})^{\perp}$:

Définition 7.13. (Ensemble/Fonction convexe)

(i) Un ensemble K est dit convexe si, pour tous points x et y de K, le segment $[x; y]$ est inclus dans K, i.e. quel que soit $t \in [0;\ 1]$, le point $tx + (1 - t)y$ appartient à K.

(ii) Une fonction f définie sur un ensemble convexe K est dite convexe si

$$\forall (x; y) \in K^2;\ \forall t \in]0;\ 1[;\ f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

La fonction est dite strictement convexe si

$$\forall (x; y) \in K^2;\ x \neq y;\ \forall t \in]0;\ 1[;\ f(tx + (1 - t)y) < tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Théorème 7.14. (Projection sur un convexe fermé)

Soit K un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout point x de H, il existe un unique point x_K de K

tel que :

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\| \quad \big(= d(x;\ K)\big) \tag{6}$$

Autrement dit, il existe un unique point $x_K \in K$ qui est à une distance de x la plus petite possible. Ce point x_K s'appelle la projection de x sur K, et est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} x_K \in K \\ Re(x - x_K;\ y - x_K) \leq 0\,, \quad \forall y \in K \end{cases} \tag{7}$$

Remarque 7.15

Si $x \in K$; alors $x_K = x$.

Remarque 7.16.

La conclusion du théorème reste vraie si l'on suppose simplement que H est préhilbertien et que le convexe K est complet pour la distance induite.

En posant $P_K(x) = x_K$, on définit une application $P_K\colon H \to H$, appelée opérateur de projection sur l'ensemble convexe K.

Le cas particulier le plus important du théorème précèdent est la projection sur un sous-espace vectoriel fermé V de H (c'est un convexe particulier).

Théorème 7.17. (Projection sur un s.e.v. fermé)

Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_V \in V$ tel que

$$\|x - x_V\| = \min_{v \in V} \|x - v\|.$$

De plus, $x_V = P_V(x)$ est caractérisé par

$$\begin{cases} x_V \in V \\ \langle x - x_V;\ v\rangle = 0;\ \forall v \in V \quad i.e.\, x - x_V \in V^{\perp}. \end{cases} \tag{9}$$

Remarque 7.18.

La caractérisation (9) signifie que $u = P_V(x)$ est l'unique point de V tel que $x - u \in V^{\perp}$.

Corollaire 7.19.

Soit V un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H.

i) H se décompose en somme directe des sous-espaces orthogonaux V et $V^{\perp}$; i.e. $H = V \oplus V^{\perp}$

et P_V est la projection sur V parallèlement à $V^{\perp}$ (on dit que P_V est la projection orthogonale ou encore le projecteur orthogonal sur V).

ii) P_V est un opérateur linéaire continu de H dans H.

iii) Si $V \neq \{0\}$, alors $\|P_V\| = 1$.

iv) $P_V^2 = P_V \ et \ \langle P_V(x), y\rangle = \langle x, P_V(y)\rangle = \langle P_V(x), P_V(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$.

v) $ker P_V = V^{\perp} \ et \ Im P_V = V$.

vi) $(V^{\perp})^{\perp} = V$.

Remarque 7.20.

Ces deux résultats (théorème 7.18 et corollaire 7.19) demeurent vrais si l'on suppose seulement que H est préhilbertien et V complet pour la norme induite, en particulier si V est de dimension finie.

Le corollaire suivant fournit un critère de densité très utile.

Corollaire 7.21.

Pour tout sous-espace vectoriel V d'un espace de Hilbert H, on a : $H = \bar{V} \oplus V^{\perp}$

En particulier, V est dense dans H si et seulement si $V^{\perp} = \{0\}$.

Remarque 7.22.

Soit A une partie d'un espace de Hilbert H. Du corollaire ci-dessus, il découle que :

A est totale dans H (i.e. $Vect A = H$) si et seulement si $V^{\perp} = \{0\}$.

7.3 Définition de la convergence faible et propriétés élémentaires

Soit H un espace de Hilbert, muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle_H$ et de norme associée notée $\|.\|_H$.

Définitions 7.23.

1) On dit que la suite x_n d'éléments de H converge fortement vers $x \in H$ si

$$\|x_n - x\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

On note $x_n \to x$.

2) On dit que la suite (x_n) de H converge faiblement vers $x \in H$ si

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H \quad , \quad \forall y \in H.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

La convergence forte entraine la convergence faible :

Proposition 7.24.

Si (x_n) converge fortement vers x, alors (x_n) converge faiblement vers x.

Preuve.

En effet, pour tout $y \in H$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x_n, y\rangle_H - \langle x, y\rangle_H| = |\langle x_n - x, y\rangle_H|$$
$$\leq \|x_n - x\|_H \|y\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Remarque 7.25.
La réciproque est fausse en général.

Par exemple, il est bien connu que, dans $H := L^2([0,2\pi])$, la fonction $x_n(t) := sin(nt)$ vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} sin(nt)y(t)dt = 0 \quad , \quad \forall y \in H.$$

En effet, on vérifie d'abord que c'est vrai pour les fonctions y de classe C^1 (faire une intégration par parties), puis par densité, pour toutes les fonctions $y \in H$.

Cela signifie que x_n converge faiblement vers la fonction nulle dans H.

Mais x_n ne tend pas fortement vers la fonction nulle, puisque

$$\|x_n\|_H^2 = \int_0^{2\pi} sin^2(nt)dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} sin^2(s)ds = \int_0^{2\pi} sin^2(s)ds,$$

où le dernier terme est une constante strictement positive indépendante de n.

Proposition 7.26. (Unicité de la limite faible)

Si (x_n) converge faiblement, alors sa limite faible est unique.

Preuve.

Soient x et x' deux limites faibles de (x_n). Alors par définition de la convergence faible, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H = \langle x', y\rangle_H \ , \ \ \forall y \in H ,$$

soit $\langle x - x', y\rangle_H = 0$ pour tout $y \in H$. Donc $x = x'$.

En dimension finie, convergences faible et forte coïncident :

Proposition 7.27.

Si H est de dimension finie et (x_n) est une suite d'´éléments de H, alors (x_n) converge faiblement, si et seulement si, (x_n) converge fortement.

Preuve.

Soit $(e_k)_{k=1,\dots,N}$ une base orthonormée de H. Si (x_n) converge faiblement vers $x \in H$,

alors pour tout $k = 1, \dots, N$, la suite scalaire $(\langle x_n, e_k\rangle)_{n\in N}$ converge vers $\langle x, e_k\rangle$. Donc

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} (\langle x_n, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle)^2 \to 0.$$

Cela prouve que (x_n) converge fortement vers x.

8 Espaces de Banach

Rappelons qu'un espace normé complet est appelé un espace de Banach.

Exemples d'espaces Banach 8.1.

1. $(IC, |\ \cdot\ |)$.

2. $(IC^n, \| \cdot \|_2)$, où

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour } x = (x_i)_{i=1}^{n} .$$

3. $(l^2, , \| \cdot \|_2)$, où

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad \text{pour } x = (x_i)_{i=1}^{\infty} .$$

4. $(l^1, , \| \cdot \|_1)$, où

$$\| x \|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \quad \text{pour } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}.$$

5. $(l^\infty, , \| \cdot \|_\infty)$, où

$$\| x \|_\infty = \sup_{i \in IN} |x_i| \quad pour\ x = (x_i)_{i=1}^{\infty}.$$

6. $(c_0, , \| \cdot \|_\infty)$, où

$$\| x \|_\infty = \sup_{i \in IN} |x_i| \quad pour\ x = (x_i)_{i=1}^{\infty}.$$

7. $(C\ [0,1], , \| \cdot \|_\infty)$, où

$$\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| .$$

Proposition 8.2.

Un sous-espace linéaire fermé d'un espace de Banach $(X, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.

Preuve.

Soit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $(Y, \| \cdot \|)$, et donc dans $(X, \| \cdot \|)$.

Puisque $(X, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach, la suite $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une limite $y \in X$.

Par hypothèse, Y est fermé. Par conséquent, la limite de la suite convergente $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de Y appartient à Y, c'est-à-dire, $\lim_{n \to \infty} y_n = y \in Y$.

Ainsi $(Y, \|\cdot\|)$ est complet, et $(Y, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Exemple 8.3: L'espace de Hilbert $L^2\ (a, b)$.
Soit $-\infty\ \leq a\ < b \leq\ \infty$. $L^2\ (a, b)$ est l'espace linéaire des fonctions mesurables de Lebesgue $f: (a, b)\ \rightarrow\ IC$ qui sont carré-intégrable, dans le sens où

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt\ < \infty \text{ (intégrale de Lebesgue)},$$

Avec les opérations ponctuelles et le produit intérieur

$$\langle f, g\rangle\ =\ \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\, dt.$$

Remarque 8.4.
Les fonctions f et g sont considérées comme égales dans $L^2(a, b)$ si elles sont égales «presque partout», c'est-à-dire si $\{t: f(t)\ \neq\ g(t)\}$ est un ensemble nul.

À strictement parler, nous devrions définir les éléments de $L^2(a, b)$ comme n'étant pas des fonctions mais des classes d'équivalence de fonctions égales presque partout.

Par exemple, $f\ = g$ dans $L^2(a, b)$ où $f(t)\ = 1$ et

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = \frac{1}{n}, n \in IN \\ 1, & \quad sinon \end{cases}.$$

Remarque 8.5.
Pour a et $b\in IR$ finis, l'espace linéaire $C\ [a, b]$ des fonctions à valeur complexe continue sur $[a, b]$ est un sous-espace dense de $L^2(a, b)$ par rapport à la norme

$$\| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\ dt\right)^{1/2}.$$

Remarque 8.6.
$L^2(a, b)$ est complet par rapport à la norme $\|\cdot\|_2$. La norme $\|\cdot\|_2$ est induite par le produit intérieur

$$\langle F, g\rangle\ =\ \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\, dt,$$

donc $L^2(a, b)$ est un espace de Hilbert.

8.1 Complétion d'un espace normé

Si un espace normé n'est pas complet, on peut toujours l'immerger dans un espace normé complet.

Soit $(X, \| \cdot \|_X)$ un espace normé. Un espace de Banach $(\tilde{X}, \| \cdot \|_{\tilde{X}})$ est appelé une complétion de X si

• X est un sous-espace de $\tilde{X}$

• $\| \ x \ \|_X = \| \ x \ \|_{\tilde{X}}$ pour tous les $x \in X$;

• X est dense dans $\tilde{X}$,

Théorème 8.7.

Chaque espace linéaire normé a une complétion unique (jusqu'à l'isomorphisme qui fixe les points de X).

Nous allons juste donner une idée de la preuve. Elle se compose de plusieurs étapes:

Étape 1. Définir l'ensemble $\tilde{X}$ (= un espace de classes d'équivalence de suites de Cauchy dans X):

on dit que deux suites de Cauchy $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont équivalentes (écrire $\{x_n\} \sim \{y_n\}$) si $\| x_n - y_n \| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Il n'est pas difficile de vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Par conséquent, l'espace de toutes ces suites peut être décomposé en classes d'équivalence.

Nous définissons $\tilde{X}$ comme l'ensemble de toutes ces classes d'équivalence.

Désignons par $[\{x_n\}]$ la classe d'équivalence contenant $\{x_n\}$.

Étape 2. Définir une structure d'espace vectoriel sur $\tilde{X}$:

nous considérons

$$[\{x_n\}] + [\{y_n\}] := [\{x_n + y_n\}] \ et \ \lambda \, [\{x_n\}] := [\{\lambda x_n\}].$$

On vérifie que les opérations sont bien définies, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas d'un choix particulier de suites dans les classes d'équivalence.

Étape 3. Définir une norme sur $\tilde{X}$:

nous considérons

$$\| \ [\{x_n\}] \ \|_{\tilde{X}} := lim \| \ x_n \ \|_X.$$

On vérifie qu'elle est bien définie et satisfait les axiomes pour les normes. Observe ceci

$$\| \ [\{x_n\}] \ \|_{\tilde{X}} = 0 \text{ ssi } x_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

c'est-à-dire $\{x_n\}$ est équivalente à la suite constante constituée de zéro.

Étape 4. X comme sous-espace de $\tilde{X}$:

à chaque $x \in X$ on associe la classe d'équivalence constituée de suites de Cauchy qui convergent vers x, c'est-à-dire la classe d'équivalence de la suite constante $x^* = \{x, x, \ldots\}$; $x \leftrightarrow [x^*]$.

Cette application est injective et $\| [x^*] \|_{\tilde{X}} = \| x \|_X$.

Étape 5. X est dense dans $\tilde{X}$:

soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans X. Alors étant donné $\epsilon > 0$ il existe $N = N(\epsilon) > 0$ tel que

$\| x_N - x_n \|_X < \epsilon$ pour tout $n \geq N$

et donc

$$\| [\{x_n\}] - [x_N^*] \|_{\tilde{X}} = lim_n \| x_n - x_N \|_X \leq \epsilon$$

donnant la densité.

Étape 6. $\tilde{X}$ est complet:

soit $\tilde{x}_n = [\{x_k^n\}_k], n = 1,2, \ldots$ une suite de Cauchy dans X. Pour chaque n, prenons $y_n \in X$ telle que $\| \tilde{x}_n - [y^*] \|_{\tilde{X}} < \frac{1}{n}$ qui existe d'après l'étape 5.

On montre alors que la suite $(y_1, y_2, \ldots)$ est de Cauchy et que $\tilde{x}_n$ converge vers la classe d'équivalence de cette suite de Cauchy.

Étape 7. Unicité de de la complétion.

De la même manière, on définit la complétion d'un espace préhilbertien en un espace de Hilbert.

Théorème

> *Soit X un ensemble. On note $B(X, IR)$ le $IR -$ espace vectoriel des fonctions bornées de X dans IR. On norme $B(X, IR)$ en posant*
>
> $$\forall f \in B(X, IR), \ \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$
>
> *Montrer que $B(X, IR)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.*

Preuve

Rappelons qu'un espace de Banach est $e.v.n$ complet. La preuve de la complétude d'un espace métrique est hyper classique. On procède comme suit :

(i) On considère une suite de Cauchy, et on construit sa limite éventuelle,

(ii) On vérifie qu'elle appartient à l'ensemble de départ,

(iii) On montre que la suite de Cauchy converge bien vers cette limite éventuelle.

(i) Soit (f_n) une suite de Cauchy de $B(X, IR)$.

Fixons $x \in X$. Pour $p, q \in IN$, l'inégalité

$$\left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \sup_{x \in X}\left|f_p(x) - f_q(x)\right| = \left\|f_p - f_q\right\|$$

Implique que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans IR . Comme IR est complet, la suite $(f_n(x))$ converge. Notons $f(x)$ sa limite.

(ii) L'application $f: X \to IR$ ainsi construite vérifie $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$.

Montrons que f est bornée.

La suite (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\| \leq M, \forall n \in IN$.

Si $x \in X$, on a $|f_n(x)| \leq M, \forall n \in IN$, donc en passant à la limite, on obtient $|f(x)| \leq M$.

Ceci étant vrai pour tout x, f est bien bornée, i.e. $f \in B(X, IR)$.

(iii) Montrons maintenant que (f_n) tend vers f dans $B(X, IR)$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $p, q \geq N, on$ a $\left\|f_p - f_q\right\| \leq \epsilon$.

Ainsi, si on fixe un élément x quelconque de X, on a

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \ \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \left\|f_p - f_q\right\| < \epsilon$$

En fixant p dans l'assersion précédente et en faisant tendre q vers l'infini, on en déduit l'inégalité

$$\left|f_p(x) - f(x)\right| < \epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, on a $\left\|f_p - f\right\| < \epsilon$. Ceci est vrai $\forall p \geq N$, donc $\left(f_p\right)$ converge vers f.

Finalement, toute suite de Cauchy (f_n) de $B(X, IR)$ converge, donc $B(X, IR)$est complet.

9 Espaces L^P

Soit (X, M, μ) un espace de mesure. Pour f mesurable: $X \to IC$ et $0 < p < \infty$ on définit

$$|| f ||_p = (\int | f |^p d\mu)^{1/p}$$

(permettant la possibilité que $|| f ||_p = \infty$).

L'ensemble $L^P (X, M, \mu) = \{f: X \to IC: f \text{ est mesurable et } || f ||_p < \infty\}$.

On note $L^P (X, M, \mu)$ par $L^P (\mu)$ ou $L^P (X)$ ou simplement L^P lorsqu'il n'y a pas de confusion.

Si X n'est pas vide et $M = P(M)$, µ est la mesure de comptage que nous notons $L^P(X, M, \mu)$ par $l^P (X)$. On note $l^P (IN)$ simplement par l^P.

• L^P **est un espace vectoriel par rapport à l'addition habituel de fonctions et la multiplication par un scalaire**. En fait, si $f, g \in L^P$ alors

$$| f + g |^p \leq (2max (| f |,| g |))^p \leq 2^p(| f |^p + | g |^p)$$

et donc

$$\int | f + g |^p d\mu \leq 2^p (\int | f |^p d\mu + \int | g |^p d\mu) < \infty$$

donnant $f + g \in L^P$.

Que $f \in L^P$ implique $\lambda f \in L^P$ pour $\lambda \in IC$ est trivial.

• $L^P, \mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} < \infty$**, est un espace normé par rapport à** $|| \boldsymbol{f} ||_{\boldsymbol{p}}$ **si nous identifions des fonctions qui sont égales presque partout.**

Lemme 9.1.

Si $a, b \geq 0$ *et* $0 < \lambda < 1$ *alors*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1 - \lambda) b \qquad (9.3)$$

avec égalité si et seulement si $a = b$.

Preuve.

L'inégalité est clairement vraie pour $a = 0$ ou $b = 0$.

Supposons $a, b \neq 0$ et considérons $g(x) = a^x b^{1-x}$.

Alors $g: [0,1] \to IR$ est convexe sur $[0,1]$ car

$$g''(x) = a^x b^{1-x} (lna - lnb)^2 \geq 0$$

impliquant

$$g(\lambda) = g(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0) \leq \lambda g(1) + (1-\lambda) g(0)$$

cela équivaut à $a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)\, b.$ L'inégalité est stricte si $a \neq b$.

Théorème 9.2 (Inégalité de Holder)

Supposons $1 < p < \infty$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si f, g sont des fonctions mesurables sur X alors

$$|| fg ||_1 \leq || f ||_p \; || g ||_q \,. \qquad (9.4)$$

En particulier, si $f \in L^P, g \in L^P$ alors $fg \in L^1$. Dans ce cas, l'égalité en (9.4) est valable ssi
$\alpha \mid f \mid^p = \beta \mid g \mid^q$ p.p. pour certains $\alpha, \beta \geq 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0{,}0)$.

Preuve.
Si $|| f ||_p = 0$ ou $|| g ||_q = 0$ le résultat est trivial.

Dans l'inégalité (9.3) considérons

$a = \frac{| f |^p}{|| f ||_p^p}$, $b = \frac{| g |^q}{|| g ||_q^q}$ *et* $\lambda = \frac{1}{p}$, alors

$$\frac{| f || g |}{\| f \|_p \| g \|_q} \leq \frac{1}{p} \mid f \mid^p \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \mid g \mid^q \|g\|_q^q \qquad (9.5)$$

et donc

$$\frac{1}{\| f \|_p \| g \|_q} \int |f|\,|g| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

donnant la première déclaration.

L'égalité est vraie si nous avons l'égalité en (9.5) qui se produit si $a = b$.

Le nombre q tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ est appelé l'exposant conjugué de p.

Théorème 9.3 (Inégalité de Minkowski)

Si $1 \leq p < \infty$ et $f, g \in L^P$ alors

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Preuve.
Le résultat est évident si $p = 1$ ou si $\| f + g \|_p = 0$.

Supposons que $p > 1$ et $\| f + g \|_p \neq 0$. Nous avons

$$| f + g |^p \leq (|f| + |g|)\,(|f+g|)^{p-1} = |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1} \,.$$

Après avoir appliqué l'inégalité de Holder, nous obtenons

$$\int |f+g|^p \, d\mu \; \leq \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int |g|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \| f \|_p \ \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \ + \| g \|_p \ \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Et donc

$$\| f \ + \ g \|_p \leq \ \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Clairement $\| f \|_p \geq 0 \ et \ \ \| \lambda f \|_p = \ | \lambda | \ \| f \|_p$.

Ainsi, avec l'inégalité de Minskowski, cela montre que L^P (où nous identifions des fonctions qui sont égales presque partout: $\| f \|_p = \ 0$ si $f \ = 0$ p.p.) est un espace normé.

Remarque 9.4.
On remarque que l'inégalité triangulaire échoue pour $p \ < 1$.
Supposons $a > \ 0, b > \ 0$ et $0 \ < p \ < 1$.

Alors pour $t > \ 0$ nous avons $t^{p\,-\,1} \ < (a \ + \ t)^{p\,-\,1}$, et en intégrant de 0 à b on obtient

$$a^p \ + \ b^p > \ (a \ + \ b)^p$$

Si maintenant E et F sont des ensembles disjoints de mesure finie positive dans X, alors, considérons $a \ = \ \mu\,(E)^{1/p} \ \ et \ b \ = \ \mu\,(F)^{1/p}$, nous obtenons

$$\| \chi_E \ + \ \chi_F \|_p^p = \ \int \ (\chi_E(x) \ + \ \chi_F(x))^p \ d\mu$$

$$= \int_E \ d\mu \ + \int_F \ d\mu \ = \ a^p \ + \ b^p$$

$$> \ (a \ + \ b)^p \ = \ (\| \chi_E \|_p + \ \| \chi_F \|_p)^p$$

• $\boldsymbol{L^P, 1 \ \leq p \ < \infty}$ **est un espace de Banach.**

Preuve:
Nous devons prouver que l'espace est complet.

D'après le théorème 5.8, il suffit de voir que toute série absolument convergente dans L^P est convergente. Considérons

$$\{f_n\}_n \ \subset L_p \ et \ \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_p \ = \ B \ < \infty.$$

Soit $G_n \ = \ \sum_{k=1}^{n} | \, f_k \, |$ et $G \ = \sum_{k=1}^{\infty} | \, f_k \, |$.

Par l'inégalité de Minkowski, $\| G_n \|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \| f_k \|_p \ \leq B$ pour tout n.

D'où par le théorème de convergence monotone

$$\int G^p d\mu \ = \ \int lim G_n^p d\mu \leq B^p.$$

D'où $G \in L^P$ et, en particulier, $G(x)$ est fini pour presque tous les x.

Cela implique que la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge pour un tel x.

Soit $F(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Nous avons $|\ F(x)\ | \ \leq \ G(x)\ a.e.$ et donc $F \in L^P$.

Pour voir que F est la limite de $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ dans L^P on observe que

$$|\ F \ - \ \sum_{k=1}^{n} f_k|^p \leq (\sum_{k=n+1}^{\infty}|f_k|)^p \ \leq G^p\ p.p.$$

Par le théorème de convergence dominé,

$$\|F \ - \ \sum_{k=1}^{n} f_k\|_p^p \ = \int|\ F \ - \ \sum_{k=1}^{n} f_k|^p d\mu \ \to \ 0.$$

• **Certaines autres propriétés de L^P.**

Proposition 9.5.

Pour $1 \leq p \ < \infty$, l'ensemble des fonctions simples $f \ = \ \sum_{j\,=\,1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, où E_j est mesurable et $\mu\,(E_j) \ < \infty$, $a_j \ \in IC$, est dense dans L^P.

Preuve.
Clairement $\sum_{j\,=\,1}^{n} a_j \chi_{E_j} \in L^P$: nous avons

$$\int \ |\ \chi_{E_j}\ |^p \ d\mu \ = \ \mu\,(E_j) \ < \infty;$$

comme L^P est un espace vectoriel

$$\sum_{j\,=\,1}^{n} a_j \chi_{E_j} \in L^P.$$

Fixons un $f \ \in L^P$ arbitraire. C'est un fait fondamental de la théorie de l'intégration que l'on peut trouver une suite de fonctions simples $\{f_n\}_n$ telles que $f_n \ \to \ f$ p.p. et $|\ f_n\ | \ \leq \ |\ f\ |$.

Alors $f_n \in L^P$ et $|f_n - \ f\ |^p \ \leq 2^p\ |\ f\ |^p \ \in L^1$.

En utilisant le théorème de convergence dominé, nous avons

$$lim_n \int |f_n - \ f\ |^p d\mu \ = \ \int lim_n\ |f_n - \ f\ |^p d\mu \ = \ 0,$$

c'est-à-dire $\|\ f_n - \ f\ \|_p \to \ 0$.

• **Séparabilité de L^P.**

Définition 9.6.

Une mesure μ dans un espace mesurable (X, M) est dite séparable s'il existe une collection dénombrable d'ensembles mesurables $A \ = \ \{E_i\}_i$ tels que *étant donné* $\varepsilon > 0$ *et* $A \in M$*, il existe* $E_i \in A$ *tel que* $\mu((E_i \setminus A) \cup (A \setminus E_i)) < \varepsilon$.

La mesure de Lebesgue sur $[a, b)$ *est séparable.*

Pour cette mesure, on peut définir, par exemple,

$$A = \{\cup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j) : \alpha_j, \beta_j \in Q \cap [a, b), n \in IN\}.$$

Proposition 9.7.

$L^P(\mu), 1 \leq \mathrm{p} < \infty$, est séparable si la mesure μ est séparable.

• **L'espace L_∞.**

Soit (X, M, μ) un espace de mesure. Pour la fonction mesurable f sur X, nous définissons

$$\| f \|_\infty = inf \{a \geq 0 : \mu(\{x : | f(x) | > a\}) = 0\}$$

avec la convention $inf\emptyset = \infty$.

Notez que si $\| f \|_\infty < \infty$, $\mu(\{x : | f(x) | > \| f \|_\infty\}) = 0$. $\| f \|_\infty$ est appelé le supremum essentiel de f.

Observez que si $f = g \ p.p.$ alors $\| f \|_\infty = \| g \|_\infty$. Nous définissons

$$L^\infty = L^\infty(X, M, \mu) = \{f : X \to C : f \text{ mesurable et } \| f \|_\infty < \infty\}$$

En identifiant les fonctions qui sont égales p.p. Nous avons l'attente suivante.

Théorème 9.8.

1. *Inégalité de Holder.*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_1 \| g \|_\infty \ \ pour\ tous\ les\ f, g\ mesurables;$$

2. *L'inégalité de Minkowski.*

$$\| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty;$$

3. $\| f_n - f \|_\infty \Rightarrow \exists E \in M, \mu(E^c) = 0$*, tel que*

$$\sup_{x \in E} | f_n(x) - f(x) | \to 0 \ quand\ n \to \infty;$$

4. *la famille des fonctions simples est dense dans* L^∞*;*

5. L^∞ *est un espace de Banach.*

Preuve.

(1) découle de

$$\int | f(x) g(x) | d\mu \leq \| g \|_\infty \int | f(x) | d\mu = \| f \|_1 \| g \|_\infty.$$

(2) Nous avons

$$| f(x) + g(x)| \leq | f(x)| + | g(x)| \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$$

pour tout x dans certains E avec $\mu(E^c) = 0$ et donc

$$\| f + g \|_\infty \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty.$$

(3) Soit $E = \cap n \{x: | f_n(x) - f(x) | \leq \| f_n - f \|_\infty\}$. alors

$$E^c = \cup n \{x: | f_n(x) - f(x) | > \| f_n - f \|_\infty\}$$

et donc $\mu(E^c) = 0$.

De plus, pour tout $x \in E$ nous avons

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \| f_n - f \|_\infty \to 0.$$

(4) Utilisez le théorème 2.10 dans Folland.

(5) Utilisez des arguments similaires à ceux utilisés pour prouver la complétion des espaces L^p, $1 \leq p < \infty$.

Si $X = IN$ et µ est la mesure de comptage sur $M = P(X)$, alors $L^\infty(X, M, \mu)$ est noté l^∞. Nous avons

$$l^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots): \sup_i | x_i | < \infty\}.$$

• **Relations entre différents espaces L^p.**

1. *Si* $0 < p < q < r \leq \infty$ *alors* $L^q \subset L^p + L^r$*, c'est-à-dire,*

$$\forall f \in L^q,\ \exists g \in L^p, h \in L^r \text{ tel que } f = g + h.$$

2. *Si* $0 < p < q < r \leq \infty$ *alors* $L^p \cap L^r \subset L^q$ *et*

$$\| f \|_q \leq \| f \|_p^\lambda \| f \|_r^{1-\lambda},$$

où $\lambda \in (0,1)$ *et tel que* $q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1-\lambda) r^{-1}$.

3. *Si* $0 < p < q \leq \infty$ *alors* $l^p(A) \subset l^q(A)$ *et* $\| f \|_q \leq \| f \|_p$ *pour tout* $f \in l^p(A)$.

4. *Si* $\mu(X) < \infty$*,* $0 < p < q \leq \infty$ *alors* $L^p(\mu) \supset L^q(\mu)$ *et*

$$\| f \|_p \leq \| f \|_q \, \mu(X)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Preuve.

1. Soit $f \in L^q$ et soit $E = \{x: | f(x) | > 1\}$.

Prenez $g = f\chi_E$ *et* $h = f\chi_{E^c}$, alors

$$| g |^p = | f |^p \chi_E \leq | f |^q \chi_E \text{ donnant } g \in L^p.$$

De même

$$| h |^r = | f |^r \chi_{E^c} \leq | f |^q \chi_{E^c}$$

et donc $h \in L^r$. L'affirmation est prouvée puisque $f = g + h$.

2. Utilisez l'inégalité de Holder.

3. On prouve d'abord que $l^p (A) \subset l^\infty (A)$ puis on utilise la deuxième affirmation.

4. Si $q = \infty$

$$\| f \|_q^p = \int | f |^p d\mu \leq \int \| f \|_\infty d\mu = \| f \|_\infty \mu (X).$$

Si $q < \infty$ l'inégalité de Holder donne

$$\| f \|_q^p = \int | f |^p \cdot 1 d\mu \leq (\int (| f |^p)^{q/p} d\mu)^{p/q} (\int 1 d\mu)^{q - p/q}$$

$$= \| f \|_q^p \mu (X)^{q - p/q} .$$

On remarque que si $\mu (X) = \infty$ il n'y a pas de relation en général entre L^p et L^q.

10 Opérateurs linéaires

Le motif de l'introduction et de l'étude des espaces de Banach et Hilbert était d'aider à l'étude des équations différentielles et intégrales linéaires issues de la physique.

De telles équations peuvent être écrites $Tx = y$ où x, y désignent des éléments d'un certain espace linéaire de fonctions (par exemple $L^2\ (a, b)$ ou un espace de fonctions différenciables), et T est une transformation linéaire, par exemple

$$T = \frac{d}{dx} \quad \text{ou} \quad T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \text{ou} \quad Tx(t) = \int_a^b K(t,s)\, x\,(s)\, ds.$$

En s'attaquant à ces problèmes, nous nous inspirons de l'algèbre linéaire.

Dans cette section, nous définissons l'un des objets les plus fondamentaux de l'analyse fonctionnelle: l'opérateur linéaire. Le reste de ce cours est consacré à l'étude des propriétés et à la classification des opérateurs linéaires sur les espaces linéaires.

Définition 10.1.

Si X, Y sont des espaces vectoriels sur IK, un opérateur linéaire de X dans Y est une application $T: X \to Y$ satisfaisant

$$T\,(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T x_1 + \mu T x_2 \textit{ pour tous les } x_1, x_2 \in X \textit{ et } \lambda, \mu \in IK.$$

*Les opérateurs linéaires sont également appelés **transformations linéaires** ou **applications linéaires**.*

Remarque 10.2.

En algèbre linéaire, vous voyez qu'un opérateur linéaire de IR^n dans IR^m est équivalent à une matrice $m \times n$ (rappelez-vous que les éléments de IR^n sont les n-tuples de nombres réels).

Définitions 10.3.

*On appelle **domaine de définition** de l'operateur $T: X \to Y$, et on le désigne par $D(T)$ou D_T , le sous-espace vectoriel des éléments x de X tels que $T(x)$ ait un sens.*

***Notation** Si $\in D_T$, le vecteur $T(x)$ est, en général, noté Tx.*

***L'espace nul (ou noyau)** de l'opérateur linéaire $T: X \to Y$, noté **N(T)** ou $\boldsymbol{KerT}$, est l'ensemble de tous les $x \in X$ tels que $T(x) = 0$.*

***La plage de T** (également appelée **l'image de X par T**), notée $\boldsymbol{R(T)}$, est l'ensemble de tous les $y \in Y$ tels que $Tx = y$ pour $x \in X$, notée aussi $\boldsymbol{Im(T)}$.*

Remarque 10.4

La notation $T: X \longrightarrow Y$ n'implique pas que $D(T) = X$ ni que $Im(T) = Y$; on dit simplement que T est un opérateur de X dans Y .

Définition 10.5.

> *Un opérateur linéaire $T: X \to Y$ est **surjectif** si $R(T) = Y$.*
>
> *T est **injectif** si $Ta = Tb$ implique $a = b$.*

Théorème 10.6.

> *Un opérateur linéaire $T: X \to Y$ est injectif si et seulement si $N(T) = 0$.*

Preuve.

Supposons que $N(T) = 0$ et $Ta = Tb$. Alors $Ta - Tb = T(a - b) = 0$ puisque T est linéaire. Donc $a - b \in N(T)$ et donc $a - b = 0$; d'où $a = b$.

Supposons que T soit injectif (c'est-à-dire que $Ta = Tb$ implique $a = b$).

Nous savons que $T(0) = 0$, donc si $Tc = T(0) = 0$ alors $c = 0$ et donc $N(T) = 0$.

Remarque 10.7.

> Avec $T: X \to Y$ un opérateur linéaire, nous pouvons considérer l'équation $Tx = y$ où $x \in X$ et $y \in Y$.
>
> Une solution $x \in X$ existe pour tout $y \in Y$ si et seulement si $R(T) = Y$.
>
> Maintenant, si une solution $x \in X$ existe pour chaque $y \in Y$, alors elle est unique si et seulement si $N(T) = 0$ puisque $Ta = Tb$ si et seulement si $a - b \in N(T)$.

Définition 10.8.

> *Si $N(T) = 0$, alors nous définissons*
>
> $$T^{-1} : R(T) \to X \text{ par } T^{-1}y = x \text{ où } Tx = y.$$

Théorème 10.9.

> *Soit $T: X \to Y$ linéaire avec $N(T) = 0$. Alors $T^{-1}: R(T) \to X$ est linéaire.*

Preuve.

Soit $y_1, y_2 \in R(T)$. Disons $y_1 = Tx_1$ *et* $y_2 = Tx_2$. Alors pour $\alpha, \beta \in IK$,

$$\alpha y_1 = \alpha T(x_1) = T(\alpha x_1) \text{ et } \beta y_2 = \beta T(x_2) = T(\beta x_2)$$

puisque T est linéaire. Donc

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = T(\alpha x_1) + T(\beta x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

et donc

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + \beta T^{-1}(y_2).$$

Donc T^{-1} est linéaire.

Remarque 10.10.

Soit X et Y des espaces linéaires. Si T_1 et T_2 sont des transformations linéaires de X dans Y, alors pour les scalaires $\alpha, \beta \in IK$, nous pouvons définir la transformation

$$\alpha T_1 + \beta T_2: \quad X \to Y$$

Par

$$(\alpha T_1 + \beta T_2)(x) = \alpha T_1(x) + \beta T_2(x).$$

Alors puisque pour $\gamma, \delta \in IK$ et $x, y \in X$ nous avons

$(\alpha T_1 + \beta T_2)(\gamma x_1 + \delta x_2) = \alpha T_1(\gamma x_1 + \delta x_2) + \beta T_2(\gamma x_1 + \delta x_2)$

par définition de $\alpha T_1 + \beta T_2$

$$= \alpha\,(T_1(\gamma x_1) + T_1(\delta x_2)) + \beta\,(T_2(\gamma x_1) + T_2(\delta x_2))$$

puisque T_1 et T_2 sont linéaires

$$= \alpha T_1(\gamma x_1) + \alpha T_1(\delta x_2) + \beta T_2(\gamma x_1) + \beta T_2(\delta x_2)$$

par distribution de la multiplication scalaire sur l'addition vectorielle

$$= \alpha\gamma T_1(x_1) + \alpha\delta T_1(x_2) + \beta\gamma T_2(x_1) + \beta\delta T_2(x_2)$$

puisque T_1 et T_2 sont linéaires

$$= \gamma\,(\alpha T_1(x_1) + \beta T_2(x_1)) + \delta\,(\alpha T_1(x_2) + \beta T_2(x_2))$$

par distribution de la multiplication scalaire sur l'addition du vecteur

$$= \gamma\,(\alpha T_1 + \beta T_2)(x_1) + \delta\,(\alpha T_1 + \beta T_2)(x_2)$$

par définition de $\alpha T_1 + \beta T_2$.

Nous pouvons donc créer un espace linéaire à partir des opérateurs linéaires de X dans Y.

Définition 10.11.

- *Pour les espaces linéaires X et Y, l'espace linéaire de tous les opérateurs linéaires de X dans Y est noté $L(X, Y)$. Si $X = Y$, nous désignons cela par $L(X)$.*
- *Si $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sont des espaces normés, un opérateur linéaire $T: X \to Y$ est dit borné s'il existe $M \geq 0$ tel que*

$$\| Tx \|_Y \leq M \| x \|_X \text{ pour tous les } x \in X.$$

- *On note $B(X, Y)$ l'espace linéaire de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans Y. Si $X = Y$ il est noté $B(X)$*

10.1. La norme d'un opérateur linéaire borné

Définition 10.12.

Soit $T \in B(X, Y)$ où X et Y sont des espaces linéaires normés. Définissons

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X\}$$

Ce nombre s'appelle la norme de T.

Nous montrons ci-dessous que l'application $T \rightarrow \|T\|$ est vraiment une norme sur $B(X, Y)$.

Il y a au moins quatre façons de calculer la norme d'une transformation linéaire T. Utilisez la définition ou l'une des trois formules données dans le lemme suivant.

Lemme 10.13.

Soit T une application linéaire bornée entre des espaces linéaires normés non nuls. Alors

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tu\| : \|u\| \leq 1\}$$

Preuve.

(a) La première égalité est un calcul facile

Remarquer que si A est un sous ensemble de IR, non vide, majoré, alors supA existe et est égal au plus petit des majorants, donc

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \inf\left\{M > 0 : M \geq \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \qquad \forall x \neq 0\right\}$$

$$= \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \qquad \forall x \in X\} = \|T\|$$

(b) La seconde est encore plus facile.

$$\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} = \sup\left\{T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) : x \neq 0\right\} = \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\}$$

Remarquer que pour $u = \frac{x}{\|x\|}$, $\|u\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$

(c) Pour obtenir la dernière égalité noter que puisque

$$\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} \subset \{\|Tu\| : \|u\| \leq 1\}$$

il est évident que

$$\sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} \leq \sup\{\|Tu\| : \|u\| \leq 1\}$$

Par contre, si $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$, alors $v = \frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire, et donc

$$\|Tx\| \leq \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|Tv\| \leq \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\}$$

Donc

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\}$$

D'où

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\|Tu\| : \|u\| \leq 1\}$$

Lemme 10.14.

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces normés et soit $T: X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Alors

$$\| Tx \|_Y \leq \| T \| \| x \|_X \textit{ pour tous les } x \in X.$$

Preuve.

Pour $x \in X$, si $x = 0$ le résultat est évident. Supposons maintenant que $x \neq 0$, donc

$$\left\|\frac{x}{\| x \|_X}\right\|_X = \frac{1}{\| x \|_X} \| x \|_X = 1.$$

Puisque T est un opérateur linéaire, $T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) = \frac{1}{\|x\|_X} T(x)$, et

$$\left\|T\left(\frac{x}{\| x \|_X}\right)\right\|_Y = \left\|\frac{1}{\| x \|_X} Tx\right\|_Y = \frac{1}{\| x \|_X} \|Tx\|_Y$$

Donc

$$\frac{1}{\| x \|_X} \|Tx\|_Y = \left\|T\left(\frac{x}{\| x \|_X}\right)\right\|_Y \leq \| T \|.$$

Ainsi

$$\|Tx\|_Y \leq \| T \| \| x \|_X \text{ pour tous les } x \in X.$$

Lemme 10.15

Soient X et Y deux espaces normés. Si $\|.\|: B(X, Y) \to IR$ est définie par

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}, \ \forall T \in B(X, Y)$$

Alors $\|.\|$ *est une norme sur* $B(X, Y)$.

Preuve

Soient $S, T \in B(X, Y)$ et $\lambda \in IK$.

(i) Il est clair que $\|T\| \geq 0, \ \forall T \in B(X, Y)$.

(ii) Rappelons que l'opérateur linéaire nulle R, satisfait $R(x) = 0, \forall x \in X$. Donc

$\|T\| = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0, \ \forall x \in X$

$\Leftrightarrow Tx = 0, \ \forall x \in X$

$\Leftrightarrow T$ est l'opérateur linéaire nulle

(iii) Comme $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ alors

$$\|(\lambda T)(x)\| \leq |\lambda|\|T\|\|x\|, \qquad \forall x \in X \text{ d'après le lemme 14 (b).}$$

Donc $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\|T\|$.

Si $\lambda = 0$ alors $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$

Tandis que si $\lambda \neq 0$ alors

$$\|T\| = \|\lambda^{-1}\lambda T\| \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda T\| \leq |\lambda^{-1}||\lambda|\|T\| = \|T\|$$

Donc $\|T\| = |\lambda^{-1}|\|\lambda T\|$ et par suite $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$

(iv) La dernière propriété à montrer est l'inégalité triangulaire.

$$\|(S + T)(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\|$$

$$\leq \|S\|\|x\| + \|T\|\|x\| = (\|S\| + \|T\|)\|x\|$$

Donc $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Par suite, $B(X, Y)$ est un espace vectoriel normé.

L'exemple suivant montre comment utiliser le lemme (en conjonction avec la définition) pour calculer la norme d'un opérateur linéaire.

Exemple 10.16

Soit $T: IR^2 \to IR^3$ *défini par*

$$T(x, y) = (3x + y, x - 3y, 4y).$$

(a) Montrer que T *est un opérateur linéaire borné c.-à-d.* $T \in B(IR^2, IR^3)$.

(b) Trouver la norme de T.

Solution

(a) Il est facile de voir que T est linéaire. Montrons que T est bornée, en effet

Pour tout $(x, y) \in IR^2$

$$\|T(x,y)\| = \|3x + y, x - 3y, 4y\| = ((3x + y)^2 + (x - 3y)^2 + (4y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (10x^2 + 26y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{26}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}\|(x,y)\|$$

Ainsi l'opérateur linéaire T est bornée.

(b) Nous avons déjà

$$\|T(x,y)\| \leq \sqrt{26}\|(x,y)\|, \qquad \forall (x,y) \in IR^2.$$

Puisque $\|T\|$ est défini comme étant le minimum de l'ensemble de tous les nombres M tel que

$$\|T(x,y)\| \leq \sqrt{26}\|(x,y)\|, \qquad \forall (x,y) \in IR^2,$$

et puisque $\sqrt{26}$ est l'un de ces nombres, nous avons que $\|T\| \leq \sqrt{26}$ (1)

D'autre part, du lemme 10.13 nous savons que $\|T\|$ est le supremum de l'ensemble de tous les nombres $\|Ty\|$ où y est un vecteur unitaire. Puisque $(0, 1)$ est un vecteur unitaire et que

$$\|T(0,1)\| = \|(1, -3,4)\| = \sqrt{26}$$

nous concluons que

$$\|T\| \geq \sqrt{26} \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) impliquent que $\|T\| = \sqrt{26}$.

Remarque 10.17.

Si $X = IR^n$ et $Y = IR^m$, alors $L(X, Y)$ est l'ensemble de toutes les $m \times n$ matrices.

Exemple 10.18.
Toute matrice $A \in M_{m \times n}(IC)$ donne un opérateur linéaire de IC^n dans IC^m.

Pour tout vecteur $v = (x_1, \dots, x_n) \in IC^n$,

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

appartient à C^m. Considérons donc l'application $T: IC^n \rightarrow IC^m$ telle que $Tv = Av$ pour $v \in IC^n$, où $A \in M_{m\times n}\,(IC)$, $A = (aij)_{i,j=1}^{m,n}$.

1. Montrez que T est un opérateur linéaire.

2. Montrez que

$$T: (IC^n, \|\cdot\|_2) \rightarrow (IC^m, \|\cdot\|_2)$$

$$v \rightarrow Av$$

est borné.

Preuve de 1
Pour tout $v_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1), v2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) \in IC^n$ et $\lambda, \mu \in IC$, nous avons

$$T(\lambda v_1 + \mu v_2) = A(\lambda v_1 + \mu v_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}\left(\lambda x_j^1 + \mu x_j^2\right) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}\left(\lambda x_j^1 + \mu x_j^2\right) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}\left(\lambda x_j^1 + \mu x_j^2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^1 + \mu \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^2 \\ \lambda \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j^1 + \mu \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j^2 \\ \vdots \\ \lambda \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j^1 + \mu \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j^2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j^1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j^1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^2 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j^2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j^2 \end{pmatrix} = \lambda A v_1 + \mu A v_2 = \lambda T v_1 + \mu T v_2$$

Preuve de 2

$$\|Tv\|_2 = \left\{\sum_{k=1}^m |(Tv)_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{k=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j\right| \le \left\{\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \|v\|_2 \left\{\sum_{j=1}^n |a_{kj}|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\|Tv\|_2 \le \left\{\sum_{k=1}^m \|v\|_2^2 \sum_{j=1}^n |a_{kj}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{kj}|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \|v\|_2.$$

Ainsi T est borné et

$$\|T\| = \sup_{\|v\|_2 \leq 1} \|Tv\|_2 \leq \sup_{\|v\|_2 \leq 1} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |akj|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|v\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |akj|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 10.19.
Considérons l'espace normé $(C\ [0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Définissons $T: C\ [0,1] \to C\ [0,1]$ par la formule

$$(Tx)(t) = f(t)\, x(t) \text{ où } f \in C\ [0,1] \text{ et } t \in [0,1\ ].$$

Montrez que T est un opérateur linéaire borné. Trouvez $\|\ T\ \|$.

Preuve.
1. Montrons que T est un opérateur linéaire. Pour tout $x, y \in C\ [0,1], \lambda, \mu \in IC$,

$$[T\ (\lambda x + \mu y)]\ (t) = f\ (t)\ (\lambda x + \mu y)\ (t) = f\ (t)\ (\lambda x\ (t) + \mu y\ (t))$$

$$= \lambda f\ (t)\ x\ (t) + \mu f\ (t)\ y\ (t) = \lambda\ (Tx)\ (t) + \mu\ (Ty)\ (t)$$

$$= (\lambda Tx + \mu Ty)\ (t), t \in [0,1].$$

donc

$$T\ (\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty,$$

et par suite T est un opérateur linéaire.

2. Montrons que T est borné. Pour tout $x \in C\ [0,1]$,

$$\|\ Tx\ \|_\infty = \sup_{t\in [0,1]} |\ (Tx)\ (t)\ | = \sup_{t\in [0,1]} |\ f(t)\ x(t)\ |$$

$$\leq \sup_{t\in [0,1]} |\ f(t)\ | \sup_{t\in [0,1]} |\ x(t)\ | = \|\ f\ \|_\infty \|\ x\ \|_\infty.$$

Ainsi T est borné.

3. Recherchez $\|\ T\ \|$.

$$\|\ T\ \| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\ Tx\ \|_\infty \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\ f\ \|_\infty \|\ x\ \|_\infty = \|\ f\ \|_\infty.$$

Pour $x_0(t) = 1,\ t \in [0,1]$,

$$\|\ x_0\ \|_\infty = \sup_{t\in [0,1]} |x_0(t)| = \sup_{t\in [0,1]} 1 = 1,$$

Et

$$(Tx_0)(t) = f(t) x_0(t) = f(t), \qquad t \in [0,1].$$

Par conséquent

$$\| f \|_\infty = \| Tx_0 \|_\infty \leq \| T \| \leq \| f \|_\infty.$$

Par conséquent, $\| T \| = \| f \|_\infty$.

Définition 10.20.

Soit $T: (X, \| \cdot \|_X) \to (Y, \| \cdot \|_Y)$ un opérateur linéaire borné. Un vecteur $x \in X$ est appelé vecteur de maximisation de T si

$$\| x \|_X = 1 \; et \; \| Tx \|_Y = \| T \|.$$

Exemple 10.21.

Considérons l'opérateur de multiplication

$$T: (C\,[0,1], \| \cdot \|_\infty) \to (C\,[0,1], \| \cdot \|_\infty)$$

$$x \to f \cdot x$$

où $f \in C\,[0,1]$. Nous avons montré que, pour $x_0\,(t) = 1, t \in [0,1]$,

$$\| x_0 \|_\infty = 1 \text{ et } \| Tx_0 \|_\infty = \| T \| = \| f \|_\infty.$$

Ainsi x_0 est un vecteur de maximisation pour T.

Exemple 10.22.

Définissez une application $R: C\,[0,1] \to IC$ par

$$Rf = \int_0^1 xf(x)\, dx.$$

1. Montrez que R est un opérateur linéaire.

2. Considérons $C\,[0,1]$ avec la norme

$$\| f \|_1 = \int_0^1 | f(t) |\, dt\,.$$

Montrez que R est borné.

3. Montrez que $\| R \| = 1$.

Preuve.1

Pour tout $f, g \in C\,[0,1]$ et $\lambda, \mu \in IC$, nous avons

$$R\,(\lambda f + \mu g) = \int_0^1 x\,(\lambda f + \mu g)\,(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\,(\lambda f\,(x) + \mu g\,(x))\,dx$$

$$= \int_0^1 (\lambda x f\,(x) \;+\; \mu x g\,(x))\, dx$$

$$= \lambda \int_0^1 x f\,(x)\, dx \;+\; \mu \int_0^1 x g\,(x)\, dx \text{ par la linéarité des intégrales}$$

$$= \lambda R f \;+\; \mu R g.$$

Ainsi R est un opérateur linéaire.

Preuve.2

$$|\, Rf \,| \;=\; |\, \int_0^1 x f(x)\, dx \,| \;\leq \int_0^1 |\, x f(x) \,|\, dx \;\leq \int_0^1 |\, f(x) \,|\, dx \;= \|\, f \,\|_1$$

pour tout $f \in C\,[0,1]$. Ainsi R est borné et

$$\|\, R \,\| = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |\, Rf \,| \;\leq\; \sup_{\|f\|_1 \leq 1} \|\, f \,\|_1 \;=\; 1.$$

Preuve.3

Considérons la suite de fonctions continues $f_n\,(t) = (n+1)\, t^n$. On peut voir que

$$\|\, f_n \,\|_1 = \int_0^1 |\, f_n(t) \,|\, dt \;=\; \int_0^1 (n+1)\, t^n \;=\; (n+\;1) \left.\frac{t^{n+\,1}}{n+1}\right|_0^1 \;=\; 1$$

Et

$$|\, R f_n \,| = \left| \int_0^1 x f_n(x) dx \;| = |\int_0^1 x(n+1)\, x^n\, dx \right|$$

$$= \;|\, (n+1) \int_0^1 \; x^{n+1}\, dx \;| = (n+\;1) \left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^1 = \frac{n+1}{n+2}.$$

Donc

$$\|\, R \,\| = \sup_{\|f\|1 \leq 1} |\, Rf \,| \;\geq\; |R f_n\,| \;=\; \frac{n\;+\;1}{n\;+\;2}$$

pour tous n. Par conséquent

$$\|\, R \,\| \geq \lim_{n \to \infty} \frac{n\;+\;1}{n\;+\;2} \;=\; 1.$$

Ainsi $1 \geq \|\, R \,\| \geq 1$, donc $\|\, R \,\| = \;1$.

Définition 10.23.

Soit $T\colon (X, \|\cdot\|_X) \;\to\; (Y, \|\cdot\|_Y)$ *un opérateur linéaire entre espaces normés.*

- Pour $T \in L\,(X,Y)$, T est continu en $x_0 \in X$ si pour tout $\varepsilon >\; 0$ il existe $\delta >\; 0$ tel que $\forall x \in X$

$$\|x - x_0\| \;< \delta \;\Rightarrow\; \|T(x) - T(x_0)\| \;< \varepsilon$$

(c'est-à-dire $T(B(x_0;\ \delta) \subseteq B(T(x_0);\varepsilon))$.

- T est uniformément continu sur X (ou un sous-ensemble de X) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\|x_1 - x_2\| < \delta$ implique $\|T(x_1) - T(x_2)\| < \varepsilon$ pour tout $x_1, x_2 \in X$ (ou dans le sous-ensemble de X).

Théorème 10.24.
Soit $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ un opérateur linéaire entre les espaces normés. Les assertions suivantes sont alors équivalentes:

(i) T est borné;

(ii) T est continu sur X, c'est-à-dire que T est continu pour tout $x \in X$;

(iii) T est continu en $0 \in X$.

Preuve.
Nous allons montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

(ii) ⇒ (iii). C'est trivial, puisque $0 \in X$.

(i) ⇒ (ii). Supposons que T soit borné et donc, pour tout $x \in X$,

$$\| Tx \|_Y \leq \| T \| \| x \|_X.$$

Étant donné $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, définissons $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$.

Alors, pour tout $x' \in X$, $\| x - x' \|_X < \delta$ *implique*

$$\begin{aligned} \| Tx - Tx' \|_Y &= \| T(x - x') \|_Y, \text{ T est un opérateur linéaire} \\ &\leq \| T \| \| x - x' \|_X, \text{ T est un opérateur borné} \\ &< \| T \| \delta = \| T \| \frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, T est continu en tout $x \in X$.

(iii) ⇒ (i). Supposons que T soit continu en $0 \in X$. Ainsi, pour $\varepsilon = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x' \in X$, $\| 0 - x' \|_X < \delta$ implique $\| T0 - Tx' \|_Y < 1$.

Pour tout $x \in X$, $x \neq 0$, définissons $x' = \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_X} \in X$. Notez que

$$\|x'\|_X = \left\|\frac{\delta}{2}\frac{x}{\| x \|_X}\right\|_X \overset{\text{définition de la norme}}{\cong} \frac{\delta}{2}\frac{1}{\| x \|_X}\| x \|_X = \frac{\delta}{2} < \delta$$

Par conséquent, $\| Tx' \|_Y < 1$, et

$$\| Tx' \|_Y = \left\|T\left(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y$$

$$= \left\| \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|_X} Tx \right\|_Y, \text{ } T \text{ est un opérateur linéaire}$$

$$= \frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y \text{ définition de la norme}$$

Donc $\frac{\delta}{2} \frac{1}{\|x\|_X} \|Tx\|_Y < 1$ et par suite $\|Tx\|_Y < \frac{2}{\delta} \| x \|_X$ pour tous les $x \in X$.

Donc T est borné et $\| T \| \leq \frac{2}{\delta}$.

Théorème 10.25.

Soit $(X, \| \cdot \|_X) \rightarrow (Y, \| \cdot \|_Y)$ des espaces normés. Alors l'ensemble

$$L(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y: c'est\ un\ opérateur\ linéaire\ borné\}$$

est un espace normé par rapport aux opérations ponctuelles:

$$(T + S)(x) = Tx + Sx \ et \ (\lambda T)(x) = \lambda Tx,$$

où $T, S \in L(X, Y)$, $\lambda \in C$, $x \in X$ et la norme de l'opérateur.

Si $(Y, \| \cdot \|_Y)$ est un espace de Banach, alors $L(X, Y)$ l'est aussi.

Preuve.

Il est facile de vérifier que $L(X, Y)$ est un espace normé par rapport à la norme opérateur.

Montrons que $L(X, Y)$ est complet chaque fois que l'est $(Y, \| \cdot \| Y)$.

Prenons une suite de Cauchy $\{T_n\}$ dans $L(X, Y)$. Puisque pour $x \in X$,

$$\| T_n x - T_m x \| \leq \| T_n - T_m \| \| x \|,$$

la suite $\{T_n x\}$ est de Cauchy dans Y et a donc une limite dans Y. On définit maintenant $T: X \rightarrow Y$ par $Tx = lim T_n x$, $x \in X$. Il est facile de voir que T est un opérateur linéaire.

Montrons qu'il est borné. Pour cela nous observons d'abord que par l'inégalité triangulaire

$$| \ \| T_n x \| - \| Tx \| \ | \leq \| T_n x - Tx \| \text{ et donc } \| Tx \| = \lim \| T_n x \|.$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à la norme d'opérateur que nous obtenons

$$| \ \| T_n \| - \| T_m \| \ | \leq \| T_n - T_m \|$$

montrant que la suite de nombres réels $\{\| T_n \|\}$ est de Cauchy et a donc une limite, K.

Par conséquent, pour $x \in X$,

$$\| Tx \| = \lim \| T_n x \| \leq \lim \| T_n \| \| x \| \leq K \| x \|$$

et donc T est borné.

Il reste à montrer que $\| T_n - T \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Comme $\{T_n\}$ est de Cauchy, étant donné ϵ il existe N tel que

$$\text{pour tout } m, n \geq N, \| T_n - T_m \| < \epsilon$$

et donc pour tout $x \in X$

$$\| T_n x - T_m x \| \leq \| T_n - T_m \| \| x \| < \epsilon \| x \|.$$

En faisant tendre m vers l'infini nous obtenons

$$\| T_n x - T x \| \leq \epsilon \| x \| \text{ et donc } \| T_n - T \| < \epsilon,$$

donnant le résultat souhaitée.

Corollaire 10.26.

Soit $(X, \| \cdot \|_X)$) un espace normé. Alors $L\ (X, IC)$ est un espace de Banach.

Preuve.
Il découle du théorème précédent, puisque IC est un espace de Banach.

Définition10.27.

*Un opérateur linéaire $T \in L\ (X, Y)$ est une **isométrie** si $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$.*
Autrement dit, si $\|T\| = 1$.

Exemple 10.28.

Considérons l'ensemble des fonctions bornées sur l'ensemble S, $B(S)$, avec la norme du sup.

Pour $g \in B(S)$, définissons l'opérateur linéaire $M_g: B(S) \to B(S)$ par $M_g\ (f(s)) =$ $g(s)\ f(s)$.

M_g est un opérateur de multiplication. Nous affirmons que $\|M_g\| = \|g\|$.

Soit $f \in B(S)$ avec $\|f\| = 1$. Alors

$$|M_g(f)(s)| = |g(s)f(s)| = |g(s)||f(s)| \qquad \text{(pour tous les } s \in S)$$

$$\leq \|g\|\|f\| = \|g\|.$$

Prenez le sup sur tous les $s \in S$ pour obtenir $\|M_g f\| \leq \|g\|$.

Prenez un supremum sur tous ces $\|f\| = 1$, pour obtenir $\|M_g\| \leq \|g\|$.

De plus, pour tout $s \in S$, nous considérons la fonction caractéristique

$$\chi_s\ (x) = \begin{cases} 1\ si\ x = s \\ 0\ si\ x \neq s \end{cases}$$

(le texte désigne cela comme δ_s) et nous avons

$$| g (s) | = | (M_g \chi_s) (s) | \leq \|M_g\| \|\chi_s\| = \|M_g\| (1) = \|M_g\|.$$

Par conséquent,

$$\sup_{s \in S} |g(s)| = \|g\| \leq \|M_g\|,$$

et $\|M_g\| = \|g\|$ suit.

Définition 10.29.

Si $T \in L(X,Y)$ et $S \in L(Y,Z)$ sont des opérateurs linéaires bornés, alors la composition de S et T est définie par

$$S \circ T : X \to Z \text{ où } (S \circ T)(x) = STx = S(Tx).$$

Remarque 10.30.

Les compositions de fonctions continues sont continues, donc pour S et T continus, $S \circ T$ est continu. Donc, pour S et T bornés, nous avons que $S \circ T$ est borné.

Le résultat suivant donne une borne spécifique sur $\|ST\|$ en termes de $\|S\|$ et $\|T\|$.

Proposition 10.31.

Pour les opérateurs linéaires bornés $T \in L(X,Y)$ et $S \in L(Y,Z)$, $S \circ T$ est linéaire et

$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Preuve.

Pour $x_1, x_2 \in X$ et $\alpha, \beta \in R$,

$$ST(\alpha x_1 + \beta x_2) = S(\alpha T x_1 + \beta T x_2) = \alpha ST x_1 + \beta ST x_2,$$

donc ST est linéaire.

Pour $x \in X$ avec $\|x\| = 1$,

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\|.$$

Remarque 10.32.

L'espace de Banach $X^* = B(X, IC)$ est appelé l'espace dual de X.

Les vecteurs $F \in X^*$ sont appelés fonctionnelles linéaires continues.

11 Espace dual

Définition 11.1.

Une fonctionnelle linéaire sur un espace vectoriel complexe V est une application $F: V \rightarrow IC$ qui satisfait

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y) \text{ pour tout } x, y \in V \text{ et } \lambda, \mu \in C.$$

Définition 11.2.

Une fonctionnelle linéaire sur un espace normé (X, ‖ · ‖x) est dite bornée s'il existe $K > 0$ telle que

$$|F(x)| \leq K \| x \|_X \text{ pour tous les } x \in X.$$

Définition 11.3.

Une fonctionnelle linéaire $F: X \rightarrow IC$ sur un espace normé $(X, \| x \|_X)$ est continue en $x \in X$ si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in X$,

$$\| x - y \|_X < \delta \text{ implique } |F(x) - F(y)| < \epsilon.$$

Théorème 11.4.

Soit $(X, \| \cdot \| X)$ un espace normé et F une fonctionnelle linéaire sur X. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) F est bornée;

(ii) F est continue sur X, c'est-à-dire F est continue pour tout $x \in X$;

(iii) F est continue en $0 \in X$.

Preuve.

Elle découle du théorème similaire pour les opérateurs linéaires.

Définition 11.5.

La norme d'une fonctionnelle linéaire bornée $F: X \rightarrow IC$ sur un espace normé

$(X, \| \cdot \| X)$ est

$$\| F \| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |F(x)|. \text{ Tapez une équation ici.}$$

Exercice 11.6.

Soit C^1 [0,1] l'espace vectoriel complexe des fonctions de valeurs complexes à différenciation continue sur [0,1] avec la norme du sup $\| \cdot \|_\infty$.

Définissons une application $F: C^1 [0,1] \rightarrow IC$ par $F(f) = f'(1)$.

Montrez que F est une fonctionnelle linéaire.

Montrez que F n'est pas bornée. F est-elle continue?

Théorème 11.7.

Soit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors, pour chaque $y \in V$, l'application

$$\phi_y : V \to IC \text{ définie par } \phi_y(x) = \langle x, y\rangle,\ x \in V,$$

est une fonctionnelle linéaire continue par rapport à la norme $\| x \|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

De plus, $\| \phi_y \| = \| y \|_2$.

Preuve.

Pour tous les $x_1, x_2 \in V$ et $\lambda, \mu \in IC$,

$\phi_y(\lambda x_1 + \mu x_2) = \langle \lambda x_1 + \mu x_2, y\rangle$

$= \lambda\langle x_1, y\rangle + \mu\langle x_2, y\rangle$ par la définition d produit scalaire

$= \lambda\phi_y(x_1) + \mu\phi_y(x_2)$.

Ainsi ϕ_y est une fonctionnelle linéaire.

(ii) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|\phi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \| x \|_2 \| y \|_2 \text{ pour tout } x \in V.$$

Ainsi ϕ_y est bornée. Cela implique que ϕ_y est continue sur V.

(iii) Selon la définition,

$\| \phi_y \| = \sup_{\|x\|_2 \leq 1} |\langle x, y\rangle|$

$\leq \sup_{\|x\|_2 \leq 1} \| x \|_2 \| y \|_2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$= \| y \|_2$.

Pour $x_0 = \frac{y}{\|y\|_2}$, on a

$$\| x_0 \|_2 = \left\| \frac{y}{\| y \|_2} \right\|_2 = \frac{1}{\| y \|_2} \| y \|_2 = 1$$

Et

$$\phi_y(x_0) = \langle x_0, y\rangle = \left\langle \frac{y}{\| y \|_2}, y \right\rangle = \frac{1}{\| y \|_2}\langle y, y\rangle = \frac{1}{\| y \|_2} \| y \|_2^2 = \| y \|_2.$$

Par conséquent

$$\| y \|_2 = |\phi_y(x_0)| \leq \| \phi_y \| \leq \| y \|_2,$$

donc $\| \phi_y \| = \| y \|_2$.

Exemple 11.8.
Définissons une application $T: C\ [0,1]\ \rightarrow\ IC$ par la formule

$$T\ (f) =\ 5i \int_0^1 f(t)e^{-2t}\ dt,\quad i^2\ =\ -1.$$

T est-elle une fonctionnelle linéaire bornée par rapport à la norme $\|.\|_2$?

Rappelons que $\| f \|_2 =\ \{\int_0^1\ |f(t)|\ ^2dt\}^{1/2}$.

Trouvez $\| T \|$.

Solution.
1) Considérons $C\ [0,1]$ avec le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle\ =\ \int_O^1 f(t)\ \overline{g(t)}\ dt.$$

on peut voir que

$$\| f \|_2 =\ \{\int_0^1\ |f(t)|\ ^2dt\}^{1/2}\ =\ \langle f, f\rangle^{1/2}.$$

2) Pour tout $f\ \in C\ [0,1]$,

$$T\ (f) =\ 5i \int_0^1 f(t)e^{-2t}\ dt =\ \langle f, g\rangle, \text{où}$$

$$\overline{g\ (t)}\ =\ 5ie^{-2t}, \text{donc}\ g(t) = -5ie^{-2t}.$$

3) Par le théorème ci-dessus, T est une fonctionnelle linéaire bornée sur $(C\ [0,1], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ et

$\| T \| = \| g \|_2$, où

$$\|g\|_2^2 = \int_0^1 |g(t)|^2 dt = \int_0^1 |-5ie^{-2t}|^2 dt = \int_0^1 25e^{-4t} dt$$

$$= 25\int_0^1 e^{-4t}dt = 25 \times \frac{1}{-4}e^{-4t}\Big|_0^1 = \frac{25}{4}(1-e^{-4})$$

Donc $\| T \| = \frac{5}{2}\sqrt{1-e^{-4}}$.

Théorème 11.9. (Riesz-Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert et F une fonctionnelle linéaire continue sur H. Il existe un $y \in H$ unique tel que

$$F\ (x)\ =\ \langle x, y\rangle\ pour\ tout\ x \in H.$$

De plus, $\| F \| = \| y \|_2$.

Remarque 11.10.
Le théorème n'est pas vrai pour un espace préhilbertien arbitraire.

Exemple 11.11.
Soit l_F^2 le sous-espace linéaire de l^2 constitué de ces suites ayant seulement un nombre fini de termes différents de zéro.

Nous savons que l_F^2 est un espace préhilbertien qui n'est pas un espace de Hilbert (voir section 6, Espaces de Hilbert).

Définissons une application $F: l_F^2 \to IC$ par $F\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$.

1. Nous pouvons voir que $F(x) = \langle x, y\rangle$ où $y = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots) \in l^2$; notez que $y \notin l_F^2$.

2. Cependant, F est une fonctionnelle linéaire bornée sur l_F^2 et

$$\| F \| = \sup_{x \in l_F^2, \|x\|_2 \leq 1} |\langle x, y\rangle| \leq \| y \|_2.$$

3. Montrons que F n'est pas égal à $\langle \cdot, z\rangle$ pour tout $z \in l_F^2$.

Soit $z \in l_F^2$ avec $F(x) = \langle x, z\rangle$ pour tout $x \in l_F^2$.

Alors $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ pour tout $x \in l_F^2$.

Donc $\langle e_n, y\rangle = \langle e_n, z\rangle$ pour tout $n \in N$, où

$$e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots) \text{ [1 à la nième place]}.$$

D'où $y_n = z_n$ pour tout $n \in N$, donc $y = z$ et z $\notin l_F^2$.

Ainsi F est une fonctionnelle linéaire continue sur un espace de produit scalaire $(l_F^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ telle que F n'est pas égal à $\langle \cdot, z\rangle$ pour tout $z \in l_F^2$.

Définition 11.12.
Soit $(X, \| \cdot \|)$ un espace normé. L'espace de Banach $X^* = L(X, IC)$ de toutes les fonctionnelles linéaires continues sur X est appelé l'espace dual de X.

11.1 Applications

Définition 11.13.
Soit X, Y des ensembles.

(i) Une application $f: X \to Y$ est injective si, pour tout $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \neq x_2 \text{ implique } f(x_1) \neq f(x_2).$$

(ii) Le sous-ensemble $Imf = \{f(x): x \in X\}$ est appelé l'image de X par f.

(iii) Une application $f: X \to Y$ est surjective si $Imf = Y$.

(iv) Une application $f: X \rightarrow Y$ à la fois injective et surjective est appelée bijective.

Définition 11.14.

Soit E, F des espaces vectoriels, $T: E \rightarrow F$ un opérateur linéaire.

Le noyau de T est

$$KerT = \{x \in E: Tx = 0\}.$$

Proposition 11.15.

Soit E, F des espaces vectoriels, $T: E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors T est injectif si et seulement si $KerT = 0$.

Preuve.

Soit $x \in KerT$, alors $Tx = T0 = 0$.

($\Rightarrow$) Supposons que T soit injectif. Donc $x \neq 0$ implique $Tx \neq T0$, donc $x \notin KerT$, seulement $0 \in KerT$.

($\Leftarrow$) Soit $KerT = 0$. Pour tout $x_1, x_2 \in E$ tels que $x1 \neq x2$, nous avons

$$x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow (x_1 - x_2) \notin KerT.$$

Ainsi $T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2) \neq 0$.

Donc $T(x_1) \neq T(x_2)$, donc T est injectif.

Théorème 11.16.

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des espaces normés et soit $T: E \rightarrow F$ un opérateur linéaire borné. Alors $Ker\ T$ est un sous-espace linéaire fermé de $(E, \|\cdot\|_E)$.

Preuve. (Exercice.)

Exercice 11.17.

Soit E un espace normé et soit $T: E \rightarrow IC$ une fonctionnelle linéaire.

Montrer que f est bornée si et seulement si $KerT$ est un sous-espace fermé de E.

Définition 11.18.

Soit E, F des espaces vectoriels sur IC. Un opérateur linéaire $T: E \rightarrow F$ qui est bijectif est appelé un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 11.19.

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des espaces normés. Un opérateur linéaire $T: E \rightarrow F$ est appelé une isométrie ((ou une application préservant la norme)) si, pour tout $y \in E$,

$$\| T(y) \|_F = \| y \|_E.$$

Remarque 11.20.

Le théorème de Riesz-Fréchet montre que, pour tout espace de Hilbert H, il existe une application $T: H \rightarrow H^*$ donnée par $T(y) = \phi_y$ où $\phi_y(x) = \langle x, y\rangle$ qui est

(i) bijective;

(ii) la préservation des normes, c'est-à-dire $\| T(y) \| = \| y \|$; et

(iii) conjugué-linéaire, c'est-à-dire $T(\lambda y + \mu z) = \bar{\lambda} T y + \bar{\mu} T z$.

Ainsi, un espace de Hilbert peut être identifié avec son propre espace dual.

On dit parfois que les espaces de Hilbert sont «auto-dual».

Exemple 11.21.
Montrons que $(\ell_1)^*$ peut être identifié avec ℓ_∞.

Preuve.
1. Il existe une application $T: \ell_\infty \to (\ell_1)^*$ donnée par $T(c) = \phi_c$ où

$$\phi_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \qquad c = (c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty, \qquad (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Dire $(c_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ signifie simplement que les c_n sont bornés, disons, par M_c.

Pour $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |$ est fini, et donc $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ est une série absolument convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} M_c | x_n | = M_c \sum_{n=1}^{\infty} | x_n | < \infty$$

Ainsi ϕ_c est bien défini sur ℓ_1.

Nous devons montrer que, pour tout $c \in \ell_\infty$, l'application $\phi_c \in (\ell_1)^*$, c'est-à-dire que ϕ_c est une fonctionnelle linéaire bornée sur ℓ_1.

(a) Pour tout $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ_1 et $\lambda, \mu \in IC$,

$$\phi_c(\lambda x + \mu y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\lambda x_n + \mu y_n)$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n = \lambda \phi_c(x) \mu \phi_c(y).$$

Ainsi ϕ_c est une fonctionnelle linéaire.

(b) Pour tout $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$,

$$|\phi_c| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n| \le \sup_{n \in IN} |c_n| \sum_{n=1}^{\infty} | x_n | = \| c \|_\infty \| x \|_1.$$

Ainsi ϕ_c est bornée. Par conséquent, l'application

$$T: \ell_\infty \rightarrow (\ell_1)^*$$

$$c \rightarrow \phi_c$$

est bien définie.

2. Montrons que T est linéaire.

Pour tout $\lambda, \mu \in IC;\ c = (c_n)_{n=1}^{\infty}, d = (d_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty\ et\ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1,$

$$[T(\lambda c + \mu d)](x) = \phi_{\lambda c + \mu d}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda c + \mu d)_n x_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda c_n + \mu d_n)x_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n$$

$$= \lambda\phi_c(x) + \mu\phi_d(x) = [\lambda T(c) + \mu T(d)](x).$$

3. Montrons que T est surjectif.

Choisissons n'importe quel $g \in (\ell_1)^*$: nous devons trouver $c \in \ell_\infty$ tel que $T(c) = g$;

cela signifie $\phi_c = g$.

(a) Soit $c_n = g(e_n)$, où $e_n = (0, \ldots, 0,1,0, \ldots)$ (1 en nième position).

Ceci est le seul candidat possible puisque $\phi_c(e_n) = c_n$. Notez que, pour tout $n \in N$,

$$|c_n| = |g(e_n)| \leq \| g \| \| e_n \|_1 = \| g \|$$

Ainsi c est une suite bornée, c'est-à-dire, $c \in \ell_\infty$ et

$$\| c \|_\infty = \sup_{n \in IN} | c_n | \leq \| g \|.$$

(b) Pour montrer que $\phi_c = g$, considérons tout $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ et écrivons

$$S^k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n .$$

Notez que

$$\| x - S^k \|_1 = \| (0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots) \|_1 = \sum_{n=k+1}^{\infty} | x_n | \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, puisque g est continue,

$$g(x) = g(\lim_{k \to \infty} S^k) = \lim_{k \to \infty} g(S^k).$$

Par la linéarité de g,

$$g(S^k) = g\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n c_n$$

Par conséquent, pour tout $x \in \ell_1$,

$$g\,(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} x_n c_n \;=\; \phi_c(x).$$

4. Montrons que T est injectif.

Supposons que $c \neq\; d, c = (c_n)_{n\,=\,1}^{\infty}, d = (d_n)_{n\,=\,1}^{\infty} \in \ell_\infty$.

Il existe donc $n_0 \in IN$ tel que $c_{n_0} \neq\; d_{n_0}$.

$$\phi_c\;(e_{\,n_0}) \;=\; c_{n_0} \neq d_{n_0} \;=\; \phi_d\;(e_{\,n_0}), \text{donc}\; \phi_c \neq\; \phi_d.$$

5. Il reste à montrer que T est une application qui préserve la norme.

Nous avons déjà prouvé que

$$\|\; c\; \|_\infty \leq \|\; g\; \| = \|\; \phi_c\; \| \;\text{ pour tout } c \in \ell_\infty,$$

et que, pour tout $x \in \ell_1$,

$$|\; \phi_c\;(x)\;| \;\leq\; \|\; c\; \|_\infty \|\; x\; \|_1.$$

Cela implique

$$\|\; \phi_c\; \| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} |\; \phi_c\;(x)\;| \;\leq\; \|\; c\; \|_\infty.$$

Ainsi $\|\; \phi_c\; \| = \;\|\; c\; \|_\infty$, donc T préserve les normes:

$$\|\; T(c)\; \|_{(\ell_1)^*} \;= \|\; \phi_c\; \| = \;\|\; c\; \|_\infty.$$

Par conséquent, T est un isomorphisme d'espaces vectoriels et une isométrie.

11.2 Le dual de L^p

Soit (X, M, μ) un espace de mesure.

Considérons les espaces de Banach $L^p\;(X, M, \mu), 1 \leq p \leq \infty$ que nous désignons simplement par L^p en l'absence de confusion.

Supposons que p et q soient des exposants conjugués, c'est-à-dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, si\; 1 < p < \infty \text{ ou } (p, q) \;=\; (1, \infty) \text{ ou } (\infty, 1).$$

Le but de cette section est d'identifier les espaces duals $(L^p)^*$.

$$\text{Pour } g \in L^q, \qquad \text{soit } \phi_g(f) = \int fg d\mu, \qquad f \in L^p.$$

Il résulte de l'inégalité (étendue) de Holder que $\phi_g(f)$ est fini pour tout $f \in L^p$ et

$$|\ \phi_g(f)\ | = |\int fg d\mu\ | \le \| f \|_p \| g \|_q, 1 \le p \le \infty.$$

De plus, ϕ_g est linéaire et définit donc une fonction linéaire bornée sur L^p et

$$\| \phi_g \| \le \| g \|_q.$$

D'où l'application $T: L^q \to (L^p)^*$ définie par $T(g) = \phi_g$ est une application bornée linéaire (facile) bien définie.

Précisons quand elle est injective, surjective et isométrique.

L'énoncé suivant montre que T est presque toujours une isométrie et donc une injection.

Proposition 11.22.

Soit $1 \le q < \infty$. Alors $\| \phi_g \| = \| g \|_q$. Si la mesure μ est semi-finie, le résultat est valable même pour $q = \infty$.

Preuve.

Soit $q < \infty$. Pour montrer l'égalité des normes, il suffit de voir que

$$\| \phi_g \| \ge \| g \|_q.$$

Si $g = 0$ p.p. l'assertion est triviale.

Supposons donc $\| g \|_q \neq 0$ et considérons

$$f = \frac{|\ g\ |^{q-1}\overline{sgng}}{\| g \|^{q-1}},$$

où

$$sgnz = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} \ si\ z \neq 0 \\ 0\ si\ z = 0 \end{cases}$$

Alors pour $1 < p < \infty$

$$\| f \|_p^p = \frac{\int |\ g\ |^{(q-1)p}}{\| g \|_q^{(q-1)\,p}} = \frac{\int |\ g\ |^q}{\int |\ g\ |^q} = 1$$

Donc

$$\| \phi_g \| \ge \int fg = \frac{\int |\ g\ |^q}{\| g \|_q^{(q-1)}} = \| g \|_q.$$

Si $p = \infty, q = 1, f = sgng, \| f \|_\infty = 1$ et $\| \phi_g \| \geq \int fg = \| g \|_1$.

Soit maintenant $q = \infty$ et µ est semi-fini, c'est-à-dire

$$\forall A \in M, \mu(A) = \infty, \exists B \subset A, B \in M, \text{tels que } 0 < \mu(B) < \infty.$$

Alors pour $\epsilon > 0$ et $A = \{x: | g(x) | > \| g \|_\infty - \epsilon\}$, nous avons $\mu(A) > 0$.

Soit $B \subset A$ tel que

$$0 < \mu(B) < \infty \text{ et } f = \mu(B)^{-1} \chi_B \overline{sgng}.$$

Alors

$$\| f \|_1 = 1 \text{ et } \| \phi_g \| \geq \int fg = \frac{1}{\mu(B)} \int_B | g | \geq \| g \|_\infty - \epsilon.$$

Puisque ϵ est arbitraire, $\| \phi_g \| \geq \| g \|_\infty$.

Le théorème suivant montre que dans «presque tous» les cas, c'est un surjectif.

Théorème 11.23.
Soit µ un σ −fini et $1 \leq p < \infty$. Alors pour tout $\phi \in (L^p)^*$, il existe $g \in L^q$ tel que $\phi = \phi_g$ et donc Lq est isomorphe isométriquement à $(L^p)^*$.

Remarque 11.24.
Si $1 < p < \infty$ alors le résultat est valable sans restriction sur µ (voir la preuve dans Folland).

Preuve.
Fixons $\phi \in (L^p)^*$ et supposons d'abord que µ est fini.

Alors $\chi_E \in L^p$ pour tous les ensembles mesurables E. Définissons

$$\nu(E) = \phi(\chi_E), \qquad E \in M.$$

Alors, est une mesure complexe absolument continue par rapport à µ. En réalité,

• ν est σ −additif: pour toute suite de sous-ensembles mesurables disjoints $\{E_j\}$ et

$E = \cup_1^\infty E_j$, nous avons $\chi_E = \sum_1^\infty \chi_{E_j}$, où la série converge dans la norme L^p:

$$\left\| \chi_E - \sum_1^N \chi_{E_i} \right\| = \left\| \sum_{N+1}^\infty \chi_{E_i} \right\| = \mu\left(\bigcup_{N+1}^\infty E_i\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 .$$

Puisque ϕ est continue,

$$\nu(E) = \phi(\chi_E) = \sum_1^\infty \phi(\chi_{E_i}) = \sum_1^\infty \nu(E_i).$$

• $\nu \ll \mu$: Si $\mu\,(A) = 0$ alors $\chi_A = 0$ p.p. et donc $\nu\,(A) = \phi\,(\chi_A) = 0$.

Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe $g \in L^1\,(\mu)$ tel que pour tout $E \in M$,

$$\phi\,(\chi_E) = \nu\,(E) = \int_E g d\mu = \int \chi_E g d\mu$$

et donc $\phi\,(f) = \phi_g\,(f) = \int fg$ pour toute fonction simple f de sorte que nous ayons la représentation souhaitée sur l'ensemble des fonctions simples.

Notez cependant que nous n'avons pas encore montré que $g \in L^q$, seulement qu'il est en L^1. Nous reportons la preuve de cette assertion à la fin de la preuve.

Une fois que nous savons cela, nous pouvons prouver l'égalité $\phi\,(f) = \phi_g\,(f)$ pour tout $f \in L^p$.

En fait, comme les fonctions simples sont denses dans L^p, étant donné $f \in L^p$, il existe une suite de fonctions simples f_n telles que $\| f_n - f \|_p \to 0$. Comme ϕ est continu, $\phi\,(f_n) \to \phi\,(f)$.

D'autre part, $\phi\,(f_n) = \int f_n g \to \int fg$: par l'inégalité de Holder,

$$\| \phi\,(f_n) - \int fg \| \leq | \int (f_n - f)\, g | \leq \| f_n - f \|_p \| g \|_q \to 0.$$

D'où $\phi\,(f) = \int fg, \;\; f \in L_p$.

Supposons maintenant que μ est σ −fini.

Alors il existe une suite croissante d'ensembles $\{E_n\}$ telle que

$$0 < \mu\,(E_n) < \infty \; et \; X = \cup_1^\infty E_n.$$

Dans ce qui suit, nous identifierons $L^p\,(E_n)$, $L^q\,(E_n)$ avec les sous-espaces correspondants de $L^p\,(X)$ et $L^q\,(X)$ respectivement.

Par les arguments précédents, il existe $g_n \in L^q\,(E_n)$ tel que

$$\phi\,(f) = \int fgn \text{ pour tout } f \in L^p\,(E_n) \text{ et } \| g_n \|_q = \| \phi\,|_{L^p\,(E_n)} \| \leq \| \phi \|,$$

où $\phi\,|_{L^p\,(E_n)}$ est la restriction de la fonctionnelle ϕ au sous-espace E_n.

Clairement,g_n est une alternance modulo unique sur un ensemble nul et donc

$$g_n = g_m \; p.p. \text{ sur } E_n \text{ pour tout } m \geq n.$$

On peut donc définir g sur tout l'espace X en faisant $g = g_n$ sur E_n.

Par le théorème de convergence monotone on obtient

$$\| g \|_q^q = \lim_{n\to\infty} \| g_n \|_q^q \leq \| \phi \|_q$$

et donc $g \in L^q$.

Soit maintenant $f \ \in L^p$ alors $f\chi_{E_n} \in L^p\ (E_n)$ et par le théorème de la convergence dominée $f\chi_{E_n}\ \rightarrow\ f$ dans L^p. Par conséquent

$$\phi\,(f)\ =\ \lim_{n\,\rightarrow\,\infty}\phi\,(f\chi_{E_n})\ =\ \lim_{n\,\rightarrow\,\infty}\int fg_n\ =\ \lim_{n\,\rightarrow\,\infty}\int_{E_n}fg\ =\ \int fg$$

comme désiré.

Maintenant, comblons le vide de la preuve et montrons que $g \in L^q$. On peut supposer que $g \neq\ 0\ p.p$. Observez que nous n'avons besoin de l'énoncé que dans le cas où µ est une mesure finie. Une assertion plus générale est prouvée dans Folland. Comme $\phi\,(f)\ =\ \int fg$ pour f simple et ϕ est bornée, on a

$$M_q\,(g)\ =\ sup\,\{|\int fg\,|\ :\ f\ est\ simple, \|\ f\ \|_p =\ 1\}$$

est fini: $M_q\,(g)\ \leq \|\ \phi\ \| < \infty$.

De plus, puisque pour toute fonction mesurable bornée f, $\|\ f\ \|_p =\ 1$, il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions simples telles que $|f_n\,|\ \leq\ |\ f\ |$ et $f_n\ \rightarrow\ f$ point par point, on a, par le théorème de convergence dominé,

$$|\int fg|\ = \lim_{n\to\infty}|\int f_n g|\ \leq\ M_q(g) \qquad (11.6)$$

Supposons $q\ < \infty$. Soit $\{g_n\}$ une suite de fonctions simples bornées telles que $g_n\ \rightarrow\ g$ point par point et $|\ g_n\ |\ \leq\ |\ g_{n+1}|\ \leq\ |\ g\ |$, il existe grâce au théorème 2.10 de Folland.

Soit

$$f_n = \frac{|g_n|^{q-1}\overline{\operatorname{sgn} g}}{\|g_n\|_q^{q-1}}.$$

Alors comme dans la démonstration du théorème précédent on a $\|\ f_n\ \|_p =\ 1$ et $\int\ |\ f_n g_n\ |\ = \|\ g_n\ \|_q$. Par le théorème de convergence monotone, nous avons

$$\begin{aligned}\|g\|_q &= \lim_{n\to\infty}\|g_n\|_q = \lim_{n\to\infty}\int|f_n g_n| \leq \liminf\int|f_n||g| = (\text{as } f_n g \geq 0)\\ &= \liminf\int f_n g \leq (\text{by } 11.6) \leq M_q(g).\end{aligned}$$

D'où $\in L^q$.

Supposons maintenant $q\ =\ \infty$ (et donc $p\ =\ 1$). Pour prouver que $g \in L^\infty$ il suffit de voir que

$$\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$$

Supposons au contraire que pour certains $\epsilon >\ 0$ l'ensemble

$$A = \{x : |g(x)| > M_\infty(g) + \epsilon\}$$

est de mesure non nulle. En posant

$$f = \chi_A \overline{\mathrm{sgn} g}/\mu(A)$$

on a $\|f\|_1 = 1$ et

$$\int fg = \int_A \frac{|g|}{\mu(A)} > M_\infty(g) + \epsilon$$

ce qui est impossible par (11.6). La preuve est complète.

Résumons:

• $1 < p < \infty$: $(L^p)^* = L^q$ et $(L^p)^{**} = L^p$.

Nous l'avons prouvé pour la mesure σ-finie, mais le résultat est valable pour le µ général.

• $p = 1$: $(L^1)^* = L^\infty$

si la mesure µ est σ-finie. L'inclusion $T: L^\infty \to (L^1)^*$ est isométrique si µ est semi-fini.

Si µ n'est pas semi-fini, l'injectivité de $T: L^\infty \to (L^1)^*$, $g \to \phi_g$ échoue (voir l'explication dans Folland).

• $p = \infty$: $L^1 \subset (L^\infty)^*$, l'application T: $L^1 \to (L^\infty)^*$, $g \to \phi_g$ est une isométrie injective mais presque jamais surjective. Nous en reparlerons plus tard.

12 Le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

Soit X un espace normé sur IR ou IC. Soit X^* l'espace dual de X.

Comment être sûr qu'il y a suffisamment d'éléments dans X^* pour que l'étude de l'espace dual devienne intéressante?

Peut-on étendre une fonctionnelle bornée linéaire donnée sur un sous-espace à une fonctionnelle bornée linéaire sur tout l'espace?

Les réponses à ces questions donnent l'un des résultats les plus importants de l'analyse fonctionnelle, le théorème de Hahn-Banach.

Supposons d'abord que X est un espace vectoriel réel.

Définition 12.1.

Une fonctionnelle sous-linéaire sur X est une application $p: X \to IR$ telle que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ et } p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x, y \in X, \lambda \geq 0.$$

Exemple 12.2.

1. $p(x) = |f(x)|$, où f est une réelle fonctionnelle linéaire;

2. $p(x) = \| x \|$, où $\| \cdot \|$ est une norme ou une semi-norme.

Théorème 12.3. (Le théorème de Hahn-Banach, version réelle)

Soit X un espace vectoriel réel et p une fonctionnelle sous-linéaire. Soit M un sous-espace linéaire de X et $f: M \to IR$ une fonctionnelle linéaire telle que

$$f(x) \leq p(x), x \in M.$$

Alors il existe une fonctionnelle linéaire $F: X \to IR$ telle que $F = f$ sur M et

$$F(x) \leq p(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Preuve 1.

Le résultat est trivial si $M = X$.

Supposons que $M \neq X$ et soit $x \in X \setminus M$.

Considérons l'ensemble $M' = M + IRx$, le sous-espace engendré par x et les vecteurs dans M. Il est facile de voir que chaque élément de M' peut être représenté de manière unique sous la forme

$$y + \lambda x, y \in M, \lambda \in R.$$

Si g est une extension linéaire de f à M' alors

$$g\ (y\ +\ \lambda x)\ =\ f\ (y)\ +\ \lambda g\ (x), y \in M.$$

Si $\alpha = g\ (x)$ alors

$$g(y + \lambda x) = f(y) + \lambda\alpha.$$

Le but est de trouver α tel que $g\ (z)\ \leq p\ (z)$ pour tout $z \in M\ '$, i.e.

$$f\ (y)\ +\ \lambda\alpha \leq p\ (\lambda x\ +\ y). \qquad (12{,}7)$$

Pour $\lambda >\ 0$, (12,7) équivaut à $f\ \left(\frac{y}{\lambda}\right)\ +\ \alpha \leq p\ \left(x\ + \frac{y}{\lambda}\right)$ ou

$$\alpha \leq p\ \left(x\ + \frac{y}{\lambda}\right) - f\ \left(\frac{y}{\lambda}\right) \qquad (12{,}8)$$

et pour $\lambda\ < 0$, à la condition $f\ \left(\frac{y}{\lambda}\right)\ +\ \alpha \geq\ -p\ \left(-x\ - \frac{y}{\lambda}\right)$ ou

$$\alpha \geq\ -p\ \left(-x\ - \frac{y}{\lambda}\right)\ - f\ \left(\frac{y}{\lambda}\right). \qquad (12{,}9)$$

Montrons qu'il existe α qui satisfait les deux conditions (12.8) et (12.9).

Soient $y_1, y_2 \in M$. Alors puisque

$$f\ (y_2) - f\ (y_1) \leq p\ (y_2 -\ y_1) =\ p\ \left((y_2\ +\ x) -\ (y_1\ +\ x)\right)$$
$$\leq p\ (y_2\ +\ x)\ +\ p\ (-y_1\ -\ x)$$

on a

$$-f\ (y_2)\ +\ p\ (y_2\ +\ x)\ \geq\ -f\ (y_1)\ - p\ (-y_1\ -\ x).$$

Puisque y_1, y_2 étaient arbitraires, nous obtenons

$$\inf_{y \in M}(-f\ (y)\ +\ p\ (y\ +\ x))\ \ \geq \sup_{y \in M}(-f\ (y)\ - p\ (-y\ -\ x))\ .$$

Choisir α entre ces deux quantités et laisser

$$g\ (\lambda x\ +\ y)\ =\ \lambda\alpha\ +\ f\ (y)$$

on obtient l'extension souhaitée de f au sous-espace $M\ +\ IRx$.

2. Si dans X on peut trouver un ensemble dénombrable d'éléments $x_1,\ x_2, \ldots$ qui, avec M, génèrent tout l'espace X, alors la fonctionnelle sur X peut être construite de manière inductive en considérant la chaîne de sous-espaces suivante:

$$M^{(1)}\ = Span\,\{M,\ x_1\},\ M^{(2)}\ =\ Span\,\{M^{(1)}\,,\ x_2\}, \ldots$$

Alors tout élément de M appartient à certains des sous-espaces $M^{(k)}$ et la fonctionnelle sera étendue à l'ensemble X.

Théorème 12.5 (Le théorème complexe de Hahn-Banach)

Soit X un espace vectoriel complexe, p une semi-norme sur X, M un sous-espace de X, et f une fonctionnelle linéaire complexe sur M telle que $|f(x)| \leq p(x)$ pour $x \in M$.

Alors il existe une fonctionnelle linéaire complexe F sur X telle que $|F(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$ et $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in M$.

Preuve.

Considérez X et M comme des espaces vectoriels sur les réels et notez-les respectivement par X_{IR} et M_{IR}. Notez que X_{IR} (M_{IR}) et X (M respectivement) sont différents en tant qu'espaces linéaires mais coïncident en tant qu'ensembles.

Clairement p est une fonctionnelle sous-linéaire sur X_{IR}.

Soit $u = Ref$. Alors u est une fonctionnelle linéaire réelle sur M_{IR} satisfaisant la condition $|u(x)| \leq p(x)$ et donc $u(x) \leq p(x)$.

Par le théorème réel de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle linéaire réelle U sur X_{IR} telle que $U(x) \leq p(x)$, pour tout $x \in X_{IR}$ et $U(x) = u(x)$ pour tout $x \in M_{IR}$.

Clairement $-U(x) = U(-x) \leq p\,(-x) = p(x)$ et donc

$$|U(x)| \leq p(x), x \in X_{IR}.$$

Définir une fonctionnel F sur X en considérant

$$F(x) = U(x) - iU(ix).$$

F est une fonctionnelle linéaire complexe: F est réelle linéaire puisque U et

$$F(ix) = U(ix) - iU\,(-x) = U(ix) + iU(x) = i\left(U(x) - iU(ix)\right) = iF(x), \qquad x \in X.$$

F est une extension de f à X, c'est-à-dire $F(x) = f(x), x \in M$: comme

$$Imf(x) = -Re\,(if(x)) = -Re(f(ix)) = -u(ix)$$

on a

$$F(x) = u(x) - iu(ix) = \text{Ré}f(x) + iImf(x) = f(x).$$

Il reste à prouver que $|F(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$.

Supposons au contraire que pour certains $x_0 \in X$, $|F(x_0)| > p(x_0)$.

Écrivez $F(x_0) = |F(x_0)|e^{i\varphi}$. Soit $y_0 = e^{-i\varphi}x_0$. Alors

$$U(y_0) = ReF(y_0) = Re[e - i\varphi F(x_0)] = |F(x_0)| > p(x_0) = p(y_0).$$

Une contradiction qui donne le résultat.

Corollaire 12.6.

Soit X un espace normé et soit M son sous-espace. Alors pour toute fonctionnelle continue linéaire f définie sur M il existe une fonctionnelle $F \in X^*$ telle que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in M$ et $\| F \| = \| f \|$.

Preuve.

Soit $p(x) = \| f \| \| x \|, x \in X$. On a $| f(x) | \leq p(x)$ pour tout $x \in M$. Par le théorème de Hahn-Banach complexe il existe une fonctionnelle linéaire F sur X telle que

$$| F(x) | \leq p(x) = \| f \| \| x \| \text{ pour tout } x \in X \; et \; F|_M = f.$$

Par conséquent, F est borné et $\| F \| \leq \| f \|$. Comme

$$\| F \| = sup \{| F(x) | : \| x \| \leq 1, x \in X\}$$

$$\geq sup \{| F(x) | : \| x \| \leq 1, x \in M\} = \| f \|,$$

on a $\| F \| = \| f \|$.

12.1 Corollaires du théorème de Hahn-Banach

Théorème 12.7.

Soit X un espace normé.

1. Si M est un sous-espace fermé de X alors pour tout vecteur $x \in X \setminus M$, il existe $f \in X^*$ tel que $f(x) \neq 0$ et $F|_M = 0$. En fait, f peut être considérée comme satisfaisant

$$\| f \| = 1 \text{ et } f(x) = \rho(x, M) := \inf_{y \in M} \| x - y \|.$$

2. Si $x \neq 0$ dans X, alors il existe $f \in X^*$ tel que $\| f \| = 1$ et $f(x) = \| x \|$.

3. Les fonctionnelles linéaires bornées sur X séparant les points: pour $x, y \in X, x \neq y$, il existe $f \in X^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

4. Un sous-ensemble $M \subset X$ est total dans X, c'est-à-dire que la span linéaire fermée est dense dans X si et seulement si $f \in X^*, f(x) = 0, x \in M \Rightarrow f = 0$.

5. Si $x \in X$ définir $\hat{x}: X^* \to C \; par \; \hat{x}(f) = f(x)$.

Alors l'application $x \to \hat{x}$ est une isométrie linéaire de X vers $X^{**} = (X^*)^*$.

Preuve.

1. On définit une fonctionnelle f sur l'espace $M + ICx$ par

$$f(y + \lambda x) = \lambda \rho(x, M).$$

Alors f est linéaire, $F|_M = 0 \; et \; f(x) = \rho(x, M)$.

Trouvons $\| f \|$. On a

$$\| f \| = sup \{\frac{| f(y + \lambda x)) |}{\| y + \lambda x \|} : y \in M, \lambda \in IC\}$$

$$= sup \{\frac{| \lambda | \rho(x, M) |}{\lambda | \; \| y + \lambda^{-1} x \|} : y \in M, \lambda \in IC, \lambda \neq 0\}$$

$$= \frac{\rho(x, M)}{inf \{\| x + \lambda^{-1} y \|} = \frac{\rho(x, M)}{\rho(x, M)} = 1.$$

En vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe une extension $F \in X^*$ de la fonctionnelle f avec la norme $\| F \| = \| f \| = 1$.

Ainsi la fonctionnelle F possède toutes les propriétés requises.

2. L'instruction est un cas particulier de la précédente: soit $M = \{0\}$.

3. Si $x \neq y$ par (2) il existe $f \in X^*$ tel que $f(x - y) = \| x - y \| \neq 0$ et donc $f(x) \neq f(y)$.

4. Supposons d'abord qu'un ensemble M est total et $f(x) = 0$ pour tout $x \in M$.

Par linéarité et continuité, nous avons que $f(x) = 0$ pour tout x dans l'étendue linéaire fermée de M, c'est-à-dire pour tout $x \in X$.

Supposons que toutes les fonctionnelles $f \in X^*$ disparaissant sur M sont identiquement égales à zéro. Supposons que M ne soit pas total et soit G la portée linéaire fermée de M.

Alors il existe $y \in X \setminus G$. Par (1) il existe $f \in X^*$ tel que $\| f \| = 1$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in G$, ce qui contredit l'hypothèse.

5. Pour chaque $x \in X$, $\hat{x}$ est une fonctionnelle linéaire surX^*:

$$\hat{x}(\lambda f_1 + \mu f_2) = (\lambda f_1 + \mu f_2)(x)$$

$$= \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \lambda \hat{x}(f_1) + \mu \hat{x}(f_2).$$

$\hat{x}$ est borné:

$$|\hat{x}(f)| = | f(x) | \leq \| f \| \| x \| \; et \; \| \hat{x} \|_{X^{**}} \leq \| x \|_X.$$

D'autre part, puisqu'il existe $f \in X^*, \| f \| = 1$,

$$f(x) = \hat{x}(f) = \| x \|, \text{on a } \| f \| \geq \| x \|_X.$$

Par suite, $\| \hat{x} \|_{X^{**}} = \| x \|_X$ et $X \ni x \to \hat{x} \in X^{**}$ est une isométrie linéaire.

Remarque 12.8.

Le troisième énoncé répond à une question importante sur la structure de l'espace dual d'un espace normé: il est suffisamment riche pour séparer les éléments de l'espace donné.

Si X est un espace normé, considérons $\hat{X} = \{\hat{x}: x \in X\} \subset X^{**}$ et $i: X \to X^{**}$, $x \to \hat{x}$ injection isométrique. Alors la fermeture $\overline{\hat{X}}$ est complète comme un sous-espace fermé de l'espace complet X^{**} et $i\ (X)$ est un ensemble dense dans $\overline{\hat{X}}$. Donc $\overline{\hat{X}}$ est la complétion de X.

Si $\hat{X} = X^{**}$ alors X est dit réflexif, c'est-à-dire si l'application canonique $i: x \to \hat{x}$ est un isomorphisme isométrique.

Supposons que X est un espace normé réel, $A \subset X$ un sous-ensemble et x_0 est un point de la frontière de A.

Γ_c est appelé hyperplan support de l'ensemble A contenant x_0 si $x_0 \in \Gamma_c$ (ie $f\ x_0) = c$) et soit $f\ (x) - c \geq 0$ pour tout $x \in A$ ou $f\ (x) - c \leq 0$ pour tout $x \in A$.

Considérons un cas particulier où $A = \overline{B\ (0, r)} = \{x \in X: \ \| x \| \leq r\}$.

La frontière de A est la sphère $S\ (0, r) = \{x \in X: \ \| x \| = r\}$.

Théorème 12.10.

Si $x_0 \in S\ (0, r)$ alors il existe un hyperplan support de $B\ (0, r)$ contenant x_0.

Preuve.

Pour $x_0 \in S\ (0, r)$ il existe $f \in X^*$ tel que $\| f \| = 1$ et $f\ (x_0) = \| x_0 \| = r$.

Alors $\Gamma_r = \{x: f\ (x) = r\}$ est l'hyperplan support souhaité puisque $x_0 \in \Gamma_r$ et pour tout $x \in B\ (0, r)$

$$f\ (x) \leq |f\ (x)| \leq \| x \| \leq r,$$

c'est-à-dire $f(x) - r \leq 0$.

13 Le théorème des catégories de Baire

C'est un théorème fondamental dans la théorie des espaces métriques complets.

Rappelons un peu de terminologie.

Soit X un espace métrique dont la métrique est notée ρ.

- Pour $a \in X$ et $r > 0$ on pose

  $$B(a,r) := \{x \in X : \rho(x,a) < r\},$$

  la boule ouverte de centre a et de rayon r dans X.
- Soit $M \subset X$. Rappelons que $x \in M$ est appelé point intérieur de M s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset M$.
- Un sous-ensemble M est dit ouvert si tout $x \in M$ est un point intérieur, et fermé si son complémentaire est ouvert. L'ensemble de tous les points intérieurs de $M \subset X$ est le plus grand ouvert contenu dans M ; il est appelé l'intérieur de M et est noté M^o.
- La fermeture $\overline{M}$, de M est le plus petit ensemble fermé contenant M qui est l'intersection de tous les ensembles fermés $F \supset M$.
- Un ensemble $E \subset X$ est dit dense dans X si $\bar{E} = X$.
  Notons que E est dense si, et seulement si, $W \cap E \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide W.
- Un ensemble $E \subset X$ n'est nulle part dense si la fermeture de E n'a pas de point intérieur (c'est-à-dire a un intérieur vide).
  Notez que $E \subset X$ n'est dense nulle part si et seulement s'il n'est dense dans aucun sous-ensemble ouvert de X (Exercice !).

Théorème 13.1.

Soit X un espace métrique complet.

1. Si $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de sous-ensembles ouverts denses de X alors $\bigcap_1^\infty U_n$ est dense dans X

2. X n'est pas une union dénombrable d'ensembles denses nulle part.

Preuve.

1. Il suffirait de montrer que si $W \subset X$ est un ouvert non vide, alors $W \cap \left(\bigcap_1^\infty U_n\right) \neq \emptyset$.

Notons d'abord que puisque U_1 est dense, $U_1 \cap W$ est non vide.

Comme $W \cap U_1$ est aussi ouvert, il existe une boule $B(x_1, r_1), 0 < r_1 < 1$, telle que

$$B(x_1, r_1) \subset W \cap U_1.$$

De même, on trouve $B(x_2,r_2), 0 < r_2 < \frac{1}{2}$ telle que

$$B(x_2,r_2) \subset B(x_1,r_1) \cap U_2.$$

En répétant les arguments, on obtient les boules $B(x_n,r_n), 0 < r_n < 2^{-n+1}$ telles que

$$B(x_n,r_n) \subset B(x_{n-1},r_{n-1}) \cap U_n.$$

Alors la suite $\{x_n\}$ est Cauchy, comme pour tout $n,m \geq N$ on a $x_n,x_m \in B(x_N,r_N)$ et donc

$$\rho(x_n,x_m) \leq \rho(x_n,x_N) + \rho(x_N,x_m) < 2r_N$$

qui tend vers zéro quand N tend vers l'infini. Comme X est complet, la suite converge vers un élément $x \in X$ et $\rho(x_N,x) \leq r_N$ pour tout N. Ainsi

$$x \in \overline{B(x_N,r_N)} \subset W \cap U_N$$

pour tout N. D'où $W \cap \left(\bigcap_1^\infty U_n\right) \neq \emptyset$.

2. Soit $E_n, n \geq 1$, des ensembles nulle part denses dans X.

Alors $(\overline{E_n})^c$ sont ouverts et denses dans X (si $(\overline{E_n})^c$ n'étaient pas denses dans X on pourrait trouver un ouvert W tel que $W \cap (\overline{E_n})^c = \emptyset$, mais alors $W \subset \overline{E_n}$ contredisant la condition de E_n n'étant nulle part dense). Donc par (1) $\bigcap_1^\infty(\overline{E_n})^c$ est dense dans X (donc non vide). Par conséquent,

$$\left(\bigcup_1^\infty E_n\right)^c = \bigcap_1^\infty E_n^c \supset \bigcap_1^\infty (\overline{E_n})^c \neq \emptyset$$

donnant $\bigcup_1^\infty E_n \neq X$.

Le théorème est valable pour tout espace topologique homéomorphe à un espace métrique complet.

Application à l'analyse fonctionnelle.

13.1. Théorème de l'application ouverte

Soient X, Y des espaces topologiques. Rappelons qu'une application $f : X \to Y$ est dite ouverte si $f(U)$ est ouvert chaque fois que $U \subset X$ est ouvert ; elle est dite continue si $f^{-1}(U)$ est ouvert chaque fois que $U \subset X$ l'est. Donc si f est bijective alors f est ouverte si et seulement si l'inverse f^{-1} est continue.

Si X, Y sont des espaces normés et f est linéaire alors cela se résume à la condition $f(B(0,1)) \supset B(0,r)$ pour un certain $r > 0$. En fait, étant donné un ouvert U et $y \in f(U)$, il existe $x \in U$ et $\delta > 0$ tels que

$$f(x) = y \text{ et } B(x,\delta) = x + B(0,\delta) \subset U.$$

Alors en utilisant la linéarité de f et la condition $f(B(0,1)) \supset B(0,r)$ on peut trouver $\tau > 0$ tel que

$$y + B(0,\tau) \subset f(x) + f(B(0,\delta)) = f(B(x,\delta)) \subset f(U).$$

Théorème 13.2.

> Soient X, Y des espaces de Banach. Si $T : X \to Y$ est une application bornée linéaire surjective, alors T est ouverte.

Preuve.

Par la remarque avant le théorème, il suffit de montrer que $T(B(0,1)) \supset B(0,r)$ pour un certain $r > 0$. Ecrivons B_r pour $B(0,r)$ pour la simplicité.

Puisque T est surjectif et $X = \cup_1^\infty B_n$,

$$Y = \cup_1^\infty T(B_n).$$

Par conséquent, d'après le théorème des catégories de Baire, l'un des $T(B_n)$ n'est nulle part dense, c'est-à-dire que $\overline{T(B_n)}$ a un intérieur non vide.

Puisque $\overline{T(B_n)} = n\overline{T(B_1)}, T(B_1)$ n'est nulle part dense. Il existe donc $y_0 \in \overline{T(B_1)}, r > 0$ tel que $B(y_0, r) \subset \overline{T(B_1)}$.

Montrons d'abord que l'on peut trouver une boule B_r (de centre en zéro mais r différent) telle que $B_r \subset \overline{T(B_1)}$. Choisir $y_1 = Tx_1 \in T(B_1)$ tel que $\| y_1 - y_0 \| < \frac{r}{2}$.

Alors pour tout $y \in Y, \| y \| < \frac{r}{2}$, on a $y + y_1 \in B(y_0, r) \subset \overline{T(B_1)}$:

$$y + y_1 - y_0 \| \leq \| y \| + \| y_1 - y_0 \| < r.$$

D'où

$$y = -Tx_1 + (y + y_1) \in -Tx_1 + \overline{T(B_1)} \subset \overline{T(-x_1 + B_1)} \subset \overline{T(B_2)},$$

c'est-à-dire $B_{\frac{r}{2}} \subset \overline{T(B_2)}$ et donc $B_{\frac{r}{4}} \subset \overline{T(B_1)}$.

Montrons maintenant que pour $r > 0$, $B_r \subset T(B_1)$ (en rétrécissant à nouveau le rayon r). Puisque pour un $r > 0$ et tout $y \in Y$ avec $\| y \| < r, y \in \overline{T(B1)}$, on a $y \in \overline{T(B_{2^{-n}})}$ lorsque $\| y \| < r2^{-n}$. Choisissons $y \in Y$ tel que $\| y \| < \frac{r}{2}$.

Alors, puisque $y \in \overline{T(B_{\frac{1}{2}})}$, on peut trouver $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}$ tel que $\| y - Tx_1 \| < \frac{r}{4}$. Cela implique que $y - Tx_1 \in \overline{T(B_{\frac{1}{4}})}$. On peut donc trouver $x_2 \in B_{\frac{1}{4}}$ avec

$$\| y - Tx_1 - Tx_2 \| < \frac{r}{8}.$$

Alors

$$y - Tx_1 - Tx_2 \in \overline{T(B_{\frac{1}{8}})}.$$

En procédant par induction, on trouve $x_n \in B_{2^{-n}}$ tel que

$$\left\| y - \sum_{i=1}^{n} Tx_i \right\| < r2^{-n-1}. \quad (13.10)$$

Puisque X est complet et que la série $\sum_n x_n$ est absolument convergente, elle converge dans X vers un $x \in X$. en outre

$$\| x \| \leq \sum_{1}^{\infty} \| x_n \| \leq \sum_{1}^{\infty} 2^{-n} = 1, i.e. x \in B_1.$$

Mais alors, comme T est continue, $\sum_{i=1}^{n} Tx_i \to Tx$.

D'autre part, par (13.10), $\sum_{i=1}^{n} Tx_i \to y$, quand $n \to \infty$. Donc

$$y = Tx \in T(B_1) et\, T(B_1) \supset B_{\frac{r}{2}}.$$

Corollaire 13.3.(Théorème de l'inverse borné de Banach)

Si X, Y sont des espaces de Banach et $T \in L(X, Y)$ est bijectif, alors $T^{-1} \in L(Y, X)$ et il existe $C > 0$ tel que

$$C^{-1} \| x \| \leq \| Tx \| \leq C \| x \| \text{ pour tout } x \in X.$$

Preuve.

Puisque T est bijectif, T^{-1} existe. Par le théorème de l'application ouverte, T est ouvert et donc T^{-1} est continu et donc borné. Soit $C = max\{\| T \|, \| T^{-1} \|\}$ alors pour tout $x \in X$,

$$C^{-1} \| x \| \leq \| T^{-1} \|^{-1} \| x \| = \| T^{-1} \|^{-1} \| T^{-1}Tx \|$$

$$\leq \| T^{-1} \|^{-1} \| T^{-1} \| \| Tx \|$$

$$\leq \| Tx \| \leq \| T \| \| x \| \leq C \| x \|.$$

13.2. Le théorème du graphes fermé.

Si X et Y sont des espaces vectoriels normés et que T est une application linéaire de X à Y on définit un graphe de T par

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\} = \{(x, Tx) : x \in X\}.$$

$X \times Y$ devient un espace normé lorsqu'il est équipé de la norme produit

$$\| (x, y) \| := max\{\| x \|, \| y \|\}.$$

Ici $\| x \|$ fait référence à la norme sur X tandis que $\| y \|$ fait référence à la norme sur Y.

Définition 13.4.

On dit que T est fermé si $\Gamma(T)$ est un sous-espace fermé dans $X \times Y$.

Clairement si T est continu alors $\Gamma(T)$ est fermé, puisque si $x_n \to x$ alors $Tx_n \to Tx$.

La fermeture signifie que si $x_n \to x$ et $Tx_n \to y$ alors $y = Tx$.

Le théorème suivant dit que si X *et* Y sont complets, la fermeture d'un opérateur linéaire donne la continuité.

Théorème 13.5.

Si X *et* Y sont des espaces de Banach et $T : X \to Y$ est une application linéaire fermée alors T est bornée.

Preuve.

Soient π_1 et π_2 des projections de $\Gamma(T)$ sur X et Y respectivement :

$$\pi_1\big((x, Tx)\big) = x, \qquad \pi_2((x, Tx)) \ = Tx.$$

Alors $\pi_1 \in L(\Gamma(T), X)$ et $\pi_2 \in L(\Gamma(T), Y)$ puisque

$$\| \pi_1((x, Tx)) \| = \| x \| \leq \| (x, Tx) \| \text{ et } \| \pi_2\big((x, Tx)\big) \| = \| Tx \| \leq \| (x, Tx) \|$$

$(\| \pi_1 \| \leq 1, \| \pi_2 \| \leq 1)$.

Puisque X *et* Y sont complets, $X \times Y$ et $\Gamma(T)$ le sont aussi (en tant que sous-espace fermé). L'application π_1 est bijective comme application de $\Gamma(T)$ dans X et par le Corollaire 13.3

π_1^{-1} est bornée. Mais alors $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est aussi bornée.

13.3. Le principe de la borne uniforme.

Le théorème suivant, également connu sous le nom de théorème de Banach-Steinhaus, permet de déduire des estimations uniformes à partir d'estimations ponctuelles.

Théorème 13.6. (Le principe de la borne uniforme.)

Supposons que X est un espace de Banach et Y est un espace normé. Soit $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille d'opérateurs dans $L(X, Y)$.

$$\text{Si } sup_{\alpha \in A} \| T_\alpha x \| \leq c_x < \infty \text{ pour tout } x \in X \text{, alors } sup_{\alpha \in A} \| T_\alpha \| < \infty.$$

Preuve.

Soit

$$E_n = \{x : sup_{\alpha \in A} T_\alpha x \| \leq n\} = \cap_{\alpha \in A} \{x : \| T_\alpha x \| \leq n\}.$$

Par hypothèse $X = \cup_n E_n$. De plus, chaque E_n est fermé comme intersection d'ensembles fermés. D'après le théorème des catégories de Baire, certains E_n doivent contenir une boule, $\overline{B(x_0, r)}$. Puisque pour tout $x \in X$ tel que $\| x \| \leq r$ on a $x + x_0 \in \overline{B(x_0, r)} \subset E_n$, on obtient

$$\| T_\alpha x \| \leq \| (T_\alpha(x + x_0) \| + \| T_\alpha x_0 \| \leq 2n.$$

Donc pour x, $\| x \| \leq 1$, cela donne

$$T_\alpha x \| = \| T_\alpha(rx) \| \frac{1}{r} \leq \frac{2n}{r},$$

et donc $\| T_\alpha \| \leq \frac{2n}{r}$ pour tout $\alpha \in A$.

14 Exercices corrigés

Exercice1

> Montrer que la fermeture $\overline{B(x_0;\ r)}$ d'une boule ouverte $B(x_0;\ r)$ dans un espace métrique peut différer de la boule fermée $\tilde{B}(x_0;\ r)$.

Solution Exercice 1

Nous devons d'abord définir les concepts:

Boule ouverte:

$$B(x_0;\ r)\ = \{x \in X: d\ (x;\ x_0)\ < r)\},$$

Fermeture de $B(x_0;\ r)$: $\overline{B(x_0;\ r)} = B(x_0;\ r) \cup \{\text{tous les point frontières de } B(x_0;\ r)\}$,

Boule fermée:

$$\tilde{B}(x_0;\ r)\ = \{x \in X: d\ (x;\ x_0)\ \le r)\}$$

Avec la métrique discrète

$$d\ (x;\ x_0) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \neq x_0 \\ 0 & si\ \ x = x_0 \end{cases}$$

et $r\ =\ 1$, on obtient

$$\overline{B(x_0;\ r)}\ = \underbrace{\{x \in X: d\ (x;\ x_0)\ < 1)\}}_{x_0} \cup \underbrace{\{\text{tous les point frontières de } B(x_0;\ 1)\}}_{x_0}$$

c.-à-d. uniquement le point x_0.

$$\tilde{B}(x_0; 1) = \{x \in X: d\ (x;\ x_0)\ \le 1)\} = X$$

c.-à-d. l'ensemble X tout entier.

Ainsi, $\overline{B(x_0;\ r)}$ et $\tilde{B}(x_0;\ r)$ ne sont pas identiques.

Ou d'une autre manière. Considérons la métrique discrète

$$d\ (x;\ x_0) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \neq x_0 \\ 0 & si\ \ x = x_0 \end{cases}$$

sur l'ensemble X. Nous avons

$$B(x_0;\ 1)\ = \{x_0\} \text{ et } \tilde{B}(x_0;\ 1)\ =\ X.$$

Soit x un point d'accumulation de $B(x_0;\ 1)$.

Puisque x est un point d'accumulation, et $B(x_0;\ 1)\ = \{x_0\}$, cela signifie que

$$d(x;\ x_0) < \varepsilon \text{ pour tout } \epsilon >\ 0.$$

Cependant, pour $\varepsilon < 1$, l'inégalité $d(x;\ x_0) < 1$ n'est satisfaite que pour $x = x_0$.

Ainsi $\overline{B(x_0;\ 1)} = B(x_0;\ 1)$, mais $\overline{B(x_0;\ 1)} \subset \tilde{B}(x_0;\ 1) = X$.

Exercice 2

> Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

Solution Exercice 2

Cas de la boule fermée .

Soit $B = \{u \in E/\|u\| \leq 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda + 1 - \lambda = 1.$$

Ainsi, $\forall(x, y) \in B^2, \forall\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in B$$

et donc B est convexe.

Cas de la boule ouverte.

Soit $B = \{u \in E/\|u\| < 1\}$. Soient $(x, y) \in B^2\ et\ \lambda \in [0, 1]$.Puisque

$$0 \leq \lambda \leq 1\ et\ 0 \leq \|x\| < 1$$

on en déduit que $\lambda\|x\| < \lambda$ et $(1-\lambda)\|x\| < 1 - \lambda$, alors

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$$

$$< \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Conclusion

La boule unité fermée (ou ouverte) de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est un convexe de l'espace vectoriel E.

Exercice 3

> *Soit X un espace normé, soit $x \in X\backslash\{0\}$ et Y un sous-espace linéaire de X.*
> ***(a)** S'il existe $\eta > 0$ tel que*
>
> $$\{y \in X \colon \|y\| < \eta\} \subseteq Y$$
>
> *Montrer que $\frac{\eta x}{2\|x\|} \in Y$*
> ***(b)** Si Y est ouvert, montrez que $Y = X$.*

Solution de l'exercice 3

(a) nous avons

$$\left\|\frac{\eta x}{2\|x\|}\right\| = \frac{\eta\|x\|}{2\|x\|} = \frac{\eta}{2} < \eta$$

donc par la condition donnée $\frac{\eta x}{2\|x\|} \in Y$.

(b) Soit $x \in X\backslash\{0\}$. Comme Y est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\{y \in X : \|y\| < \eta\} \subseteq Y.$$

D'où $\frac{\eta x}{2\|x\|} \in Y$ d'après la partie (a).

Comme un scalaire que multiplie un vecteur dans Y est aussi dans Y, nous avons

$$x = \frac{2\|x\|}{\eta}\left(\frac{\eta x}{2\|x\|}\right) \in Y$$

Donc $X \subseteq Y$. Comme Y est un sous-ensemble de X par définition, il en résulte que $Y = X$.

Exercice 4

> *Soit X un espace linéaire normé et, pour tout $x \in X$ et $r > 0$, considérons*
>
> $$A = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\} \text{ et } B = \{y \in X : \|y - x\| < r\}$$
>
> ***(a)*** *Montrer que A est fermé.*
>
> ***(b)*** *Si $z \in A$ et $z_n = (1 - n^{-1})z, pour\ n \in IN^*$;*
>
> *Montrez que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ et montrez donc que $\bar{B} = A$.*

Solution l'exercice 4

(a) Soit $\{z_n\}$ une suite dans A qui converge vers un point $z \in X$. Alors,

$$\|z_n - x\| \leq r, \qquad \forall n \in IN$$

et donc

$$\|z - x\| = \lim_{n\to\infty} \|z_n - x\| \leq r$$

Ainsi, $z \in A$ et donc A est fermé.
(b) Nous avons

$$\|z - z_n\| = \|z - (1 - n^{-1})z\| = n^{-1}\|z\| \leq n^{-1}r, \qquad \forall n \in IN^*$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Puisque $B \subseteq A$ et A est fermé, $\bar{B} \subseteq A$. Inversement, si $z \in A$ et z_n sont définis comme ci-dessus, alors

$$\|z_n\| = (1 - n^{-1})\|z\| \leq (1 - n^{-1})r < r$$

donc $z_n \in B$.

Ainsi z est la limite d'une suite d'éléments de B, donc $z \in \bar{B}$. D'où $A \subseteq \bar{B}$ et par suite $A = \bar{B}$.

Exercice 5

Démontrer que : Si la sphère unité d'un espace normé X contient un segment de droite $[x;\ y]$ où $x\ ;\ y \in X$ et $x \neq y$, alors x et y sont linéairement indépendants et

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Solution Exercice 5.

Supposons que la sphère unité contienne un segment de droite $[x;\ y]$ où $x\ ;\ y \in X\ et\ x \neq y$. Alors

$$\|ax + (1 - a)y\| = 1 \text{ pour tout } a \in [0; 1] :$$

Choisissons $a = \frac{1}{2}$ alors on obtient $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$, soit $\|x + y\| = 2$,

Puisque x et y appartiennent à la sphère unité, on a $\|x\| = \|y\| = 1$. D'où

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| :$$

Montrons que x et y sont linéairement indépendants.

Supposons que x et y sont linéairement dépendants c.-à-d. $y = \beta x$ pour $\beta \in IC$.

On a

$$1 = \|ax + (1 - a)\beta x\| = |a + (1 - a)\beta|.$$

Pour $a = 0$ on obtient $|\beta| = 1$ et pour $a = \frac{1}{2}$ on obtient $|1 + \beta| = 2$.

Cela implique que $\beta = 1$, et donc $x = y$, ce qui est une contradiction avec le fait que $x \neq y$.

Exercice 6

a) Considérons l'espace linéaire $C[0; 1]$ muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx .$$

Montrer qu'il n'y a pas de produit scalaire sur $C[0; 1]$ en accord avec cette norme.

b) Considérons l'espace linéaire $C[0; 1]$ muni de la norme

$$\|f\| = \max_{t \in [0;1]} |f(t)|.$$

Montrer qu'il n'y a pas de produit scalaire sur $C[0; 1]$ en accord avec cette norme.

Solution Exercice 6.

a) Nous montrons que la norme $\|.\|_1$ ne satisfait pas la loi du parallélogramme.

Soit $f(x) = 1$ et $g(x) = 2x$. Alors

$$\|f\|_1 = \int_0^1 1.dx \; = \; 1\,; \; \|g\|_1 = \int_0^1 |2x|dx \; = \; 1\,;$$

tandis que

$$\|f-g\|_1 = \int_0^1 |1-2x|dx = \frac{1}{2}\;;\; \|f+g\|_1 = \int_0^1 |1 \; + \; 2x|dx \; = \; 2\;:$$

Ainsi,

$$\|f-g\|_1^2 + \|f+g\|_1^2 = \frac{17}{4} \neq \; 2(\|f\|_1^2 + \|g\|_1^2) \; = \; 4.$$

b) Nous montrons que la loi du parallélogramme par rapport à la norme donnée n'est pas vraie pour deux éléments dans $C[0;1]$.

Soit $f(t) = t\,;\; g(t) = \; 1-t;\; t \in [0;1]$. Alors $f;\; g \in C[0;1]$ et

$$\|f\| = \max_{t\in[0;1]} t \; = \; 1;\; \|g\| = \max_{t\in[0;1]} (1-t) \; = \; 1\,;$$

et

$$\|f+g\| = \max_{t\in[0;1]} 1 \; = \; 1\,;\; \text{et}\; \|f-g\| = \max_{\in[0;1]} |1 \; + \; 2t| \; = \; 1\;:$$

Ainsi,

$$\|f-g\|^2 + \|f+g\|^2 = \; 2 \neq \; 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) \; = \; 4.$$

<u>Exercice 7</u>

> *Montrer que la norme*
>
> $$\|x\|_1 = \textstyle\sum_{n=1}^{k} |x_k|$$
>
> *sur l'espace IR^k n'est pas induite par un produit scalaire.*

<u>Solution de l'exercice 7</u>

De la définition de la norme $\|x\|_1$ sur IR^k nous avons

$$\|\hat{e}_1 + \hat{e}_2\|_1^2 + \|\hat{e}_1 - \hat{e}_2\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$2(\|\hat{e}_1\|_1^2 + \|\hat{e}_2\|_1^2) = 2(1+1) = 4$$

Ainsi, la règle du parallélogramme n'est pas vérifiée et la norme ne peut donc pas être induite par un produit scalaire.

<u>Exercice 8</u>

> *Pour chaque $n \in IN$, définissons f_n: $[0,1] \to IR$, par $f_n(x) = x^n$.*
>
> *Trouvez la norme de f_n dans les cas suivants:*
> *(a) Dans l'espace normé $C_{IR}([0,1])$;*

(b) Dans l'espace normé $L^1([0,1])$;

Solution de l'exercice 8

Nous utilisons les normes standard sur ces espaces.

(a)

$$\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0,1]\} = 1.$$

(b) Comme f_n est continu, les intégrales de f de Riemann et de Lebesgue sont identiques, de sorte que

$$\|f_n\| = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice 9 (Important)

1) Inégalités de Hölder et de Minkowski. Soit $(p,q) \in (]0,+\infty[)^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

a) Montrer que pour $(x,y) \in (]0,+\infty[)^2,\ xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$.

b) En déduire que

$$\forall((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) \in (IR^n)^2,$$

$$|\textstyle\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p}\ (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}.$$

c) En déduire que

$$\forall((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)) \in (IR^n)^2,$$

$$(\textstyle\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}.$$

2) Soit α un réel strictement positif. Pour $x = (x_1,\ldots,x_n) \in IR^n$, on définit

$$N_\alpha(x) = (\textstyle\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha)^{1/\alpha}.$$

a) Montrer que $\forall \alpha > 1$, N_α est une norme sur IR^n.

b) Dessiner les « boules unités » de IR^2 dans le cas où $\alpha \in \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, +\infty\right\}$.

c) Montrer que, pour $x = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ fixé,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = Max\{|x_k|, 1 \leq k \leq n\} = N_\infty(x).$$

d) Montrer que si $0 < \alpha < 1$, N_α n'est pas une norme sur IR^n (si $n > 2$).

Solution Exercice 9

1) Puisque $p > 0$ et $q > 0$, $1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} > \frac{1}{p}$ et donc $p > 1$. De même, $q > 1$.

D'autre part, $q = \frac{p}{p-1}$.

a) L'inégalité est immédiate quand $y = 0$. Soit $y > 0$ fixé.

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$.

Puisque $p > 1$, la fonction f est dérivable sur$[0, +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = x^{p-1} - y$.

f admet donc un minimum en $x_0 = y^{\frac{1}{p-1}}$ égal à

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{(p-1)}}}{p} + \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y$$

$$= y^{\frac{p}{p-1}}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1\right) = 0.$$

Finalement, f est positive sur $[0, +\infty[$ et donc

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

b) Posons $A = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p$ et $B = \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$.

Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.

On suppose dorénavant que $A > 0$ et $B > 0$. D'après la question a),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{A^{\frac{1}{p}}} \times \frac{|b_k|}{B^{\frac{1}{q}}} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{|a_k|^p}{pA} + \frac{|b_k|^q}{qB}\right)$$

$$= \frac{1}{pA} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p + \frac{1}{qB} \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q$$

$$= \frac{1}{pA} \times A + \frac{1}{qB} \times B = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k| \leq A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q}.$$

Comme

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k||b_k|$$

on a montré que

$$\forall((a_k)_{1\leq k\leq n},(b_k)_{1\leq k\leq n}) \in (IR^n)^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(Inégalité de Hölder)}$$

Remarque.

Quand $p = q = 2$, on a bien $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ et l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(inégalité de Cauchy − Schwarz)}$$

c) D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\forall((a_k)_{1\leq k\leq n},(b_k)_{1\leq k\leq n}) \in (IR^n)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Si $\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p = 0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.

Sinon $\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p > 0$ et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p$, on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\forall((a_k)_{1\leq k\leq n},(b_k)_{1\leq k\leq n}) \in (IR^n)^2,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(Inégalité de Minkovski)}$$

2) a) On sait déjà que N_1 est une norme sur IR^n. Soit $\alpha > 1$.

(1) N_α est bien une application de IR^n dans IR_+.

(2) Soit $x = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in IR^n$.

$$N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in [1,n], |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

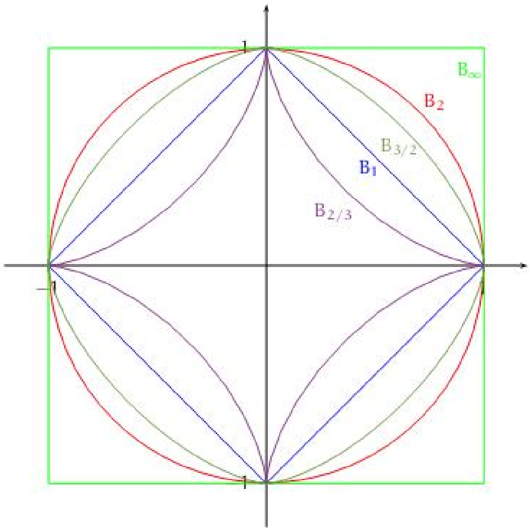
(3) Soient $\lambda \in IR$ et $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$.

$$N_\alpha(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (|\lambda|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} N_\alpha(x) = |\lambda| N_\alpha(x).$$

(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de Minkowski.

Ainsi $\forall \alpha \in IR^n$, N_α est une norme sur IR^n.

b) Quelques « boules unités » dans IR^2.



Remarque.

Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E, N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall\, x \in E, N(x) \leq 1 \Leftrightarrow N(-x) \leq 1.$$

c) Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leq N_\alpha(x) \leq n^{\frac{1}{\alpha}} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit

$$\lim_{\alpha \to +\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).$$

d) Soient $\alpha \in]0,1[$ puis $B = \{x \in IR^n / N_\alpha(x) \leq 1\}$.

Les vecteurs $x = (1,0,0,\ldots,0)$ et $y = (0,1,0,\ldots,0)$ sont des éléments de B.

Le milieu du segment $[x\ y]$ est $z = \frac{1}{2}(1,1,0,\ldots,0)$.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice 3.

On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Exercice 10

Soit $E = C1([0\,;1])$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions $f : [0\,;1] \to IR$ une fois continument dérivables.

1. Montrer que l'application $f \to \|f\|$ suivante est une norme sur E

$$\|f\| = |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Montrer que $\|.\|$ est plus fine que la norme $\|.\|_\infty$ de la convergence uniforme sur $[0; 1]$.

3. Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles Equivalentes ? Justifier votre réponse.

Indication.

On pourra utiliser la suite de fonctions f_n définie par $f_n(x) = \frac{sin(\pi n x)}{n}$.

Solution Exercice 10

Soit $E = C^1([0; 1])$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions $f : [0; 1] \to IR$ une fois continument dérivables.

1. $\|f\| = |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Comme $f \in C^1([0; 1])$, alors f' et par conséquent $(f')^2$ est continue sur $[0; 1]$, et donc $(f')^2$ est intégrable sur $[0; 1]$.

Ceci montre que l'applications $f \to \|f\|$ est une application bien définie sur $E = C^1([0; 1])$.

(a) Séparation. Soit $f \in C^1([0; 1])$: On a :

$$\|f\| = 0 \Rightarrow |f(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ et} \\ \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ et} \\ \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ et} \\ f'(x) = 0, \forall x \in [0; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f(0)| = 0 \text{ et} \\ f = const\,, \quad \forall x \in [0; 1] \end{cases} \Rightarrow f = 0.$$

(b) L'homogénéité.

Soient $\alpha \in IR$, et $f \in C^1([0; 1])$, nous avons

$$\|\alpha f\| = |(\alpha f)(0)| + \left(\int_0^1 \left((\alpha f)'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha||f(0)| + \left(\alpha^2 \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha| \left\{ |f(0)| + \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$= |\alpha|\|f\|$$

(c) Inégalité triangulaire. Soit $f, g \in C^1([0;1])$. On a :

$$\|f+g\| = |(f+g)(0)| + \left(\int_0^1 \left((f+g)'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |f(0) + g(0)| + \left(\int_0^1 (f'(x) + g'(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + \left(\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 \left(g'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|f\| + \|g\|$$

Conclusion. $\|.\|$ est une norme sur E:

2. Montrons que :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall f \in E : \|f\|_\infty \leq \alpha \|f\|.$$

Soit $f \in C^1([0;1])$, on a :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt, \forall x \in [0;1];$$

d'où

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)dt\right|$$

appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left(\int_0^x dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |f(0)| + \sqrt{x} \left(\int_0^x \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |f(0)| + \left(\int_0^x \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \forall x \in [0;1];$$

Ainsi $\forall x \in [0;1]$, $|f(x)| \leq \|f\|$, d'où $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \leq \|f\|$

Ce qui montre que $\|f\|$ est plus fine que $\|f\|_\infty$.

3. Considérons la suite de fonctions f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{sin(\pi n x)}{n}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = +\infty.$$

Pour tout $n \geq 1, f_n \in E$; et

$$\|f_n\| = |f_n(0)| + \left(\int_0^1 \left(f_n'(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0 + \pi \left(\int_0^1 \cos^2 nx \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \pi \left(\int_0^1 \frac{1+\cos(2nx)}{2} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Et,

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} \left|\frac{sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$$

D'où

$$\frac{1}{\|f_n\|_\infty} \geq n, \forall n \geq 1$$

Par conséquent

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} \geq n\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \forall n \geq 1$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|}{\|f_n\|_\infty} = +\infty.$$

Ceci montre que $\|f\|_\infty$ n'est pas plus fine que $\|f\|$. Donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

<u>Exercice 11</u>

Soit $E = C^2([0,1], IR)$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)| \, dt$,

$$N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt$$

et

$$N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\, dt.$$

Montrer que N, N'et N'' sont des normes et les comparer.

Solution de l'exercice 11

• Il est connu que N est une norme sur E.

• Montrons que N' est une norme sur E.

(1) N' est une application de E dans IR_+ car pour f dans E, f' est continue sur le segment $[0,1]$ et donc f' est intégrable sur le segment $[0,1]$.

(2) Soit $f \in E$. Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite, f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que $f(0) = 0$ et on en déduit que $f = 0$.

(3) $\forall f \in E, \forall \lambda \in IR$,

$$N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \right) = |\lambda| N'(f).$$

(4) Soit $(f,g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc N' est une norme sur E.

• Montrons que N'' est une norme sur E. On note que

$$\forall f \in E, N''(f) = |f(0)| + N'(f')$$

et tout est immédiat. Ainsi

N, N' et N'' sont des normes sur E.

• Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$. Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$

$$|f(t)| = \left| f(0) + \int_0^t f'(u)\, du \right| \leq |f(0)| + \int_0^t |f'(u)|\, du \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\, du = N'(f)$$

et donc

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 N'(f)\, dt = N'(f).$$

Ensuite en appliquant le résultat précédent à f', on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leq |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$$\forall f \in E, N(f) \leq N'(f) \leq N''(f).$$

Pour $n \in IN$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.

$$N(f_n) = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

et donc la suite $(f_n)_{n\in IN}$ tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N).

Par contre, pour $n > 1$,

$$N'(f_n) = n\int_0^1 t^{n-1} \, dt = 1$$

et la suite $(f_n)_{n\in IN}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E, N'). On en déduit que les normes N et N' ne sont pas des normes équivalentes.

De même en utilisant $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, on montre que les normes N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Exercice 12

Soit M un espace métrique compact et $C_{IK}(M)$ l'espace vectoriel de fonctions continues à valeurs dans IK définies sur IR . Alors l'application $\|.\|: C_{IK}(M) \to IR$ définie par

$$\|f\| = sup\{|f(x)|: x \in M\}, \ \forall f \in C_{IK}(M)$$

est une norme sur $C_{IK}(M)$ appelée norme usuelle sur $C_{IK}(M)$.

Solution de l'exercice 12

Soient $f, g \in C_{IK}(M)$ et soit $\alpha \in IK$.

$(\boldsymbol{i})$ $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in M\} \geq 0$

$(\boldsymbol{ii})$ Si f est la fonction nulle alors $f(x) = 0, \ \forall x \in M$ et donc $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in M\} = 0$.

Inversement, si $\|f\| = 0$ alors $\sup\{|f(x)|: x \in M\} = 0$ donc $f(x) = 0, \ \forall x \in M$ et par suite f est la fonction nulle.

$(\boldsymbol{iii})$ Nous avons

$$\|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)|: x \in M\} = |\alpha|\sup\{|f(x)|: x \in M\} = |\alpha|\|f\|.$$

$(\boldsymbol{iv})$ Si $y \in M$ alors

$$|(f+g)(y)| \leq |f(y)| + |f(y)| \leq \|f\| + \|g\|$$

et par suite

$$\|f+g\| = \sup\{|(f+g)(x)| : x \in M\} \leq \|f\| + \|g\|$$

Exercice 13

(a) Démontrer que le produit scalaire dans un espace normé X peut être récupéré à partir de l'identité de polarisation :

$$\langle x;\ y\rangle = \tfrac{1}{4}[(\|x+y\|^2 - \ \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \ \|x-iy\|^2)].$$

(b) Démontrer qu'un espace normé est un espace préhilbertien si et seulement si la norme satisfait la loi du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \ 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Solution Exercice 13.

(a) Pour le cas réel, l'identité de polarisation est

$$\langle x;\ y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \ : \ (*)$$

Nous utilisons la symétrie du produit scalaire et calculons le membre de droite de (*) :

$$\frac{1}{4}\ (\|x+y\|^2 - \ \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}[\langle x+y;\ x+y\rangle - \langle x-y;\ x-y\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}[\langle x\ ;\ y\rangle + \langle y;\ x\rangle] = \ \langle x;\ y\rangle\ .$$

Pour le cas du corps complexe, nous développons à nouveau le membre de droite, en utilisant la relation que nous venons d'établir :

$$\frac{1}{4}[(\|x+y\|^2 - \ \|x-y\|^2) - i(\|x+iy\|^2 - \ \|x-iy\|^2)]$$

$$= \frac{1}{2}[\langle x\ ;\ y\rangle + \langle y;\ x\rangle] - \frac{i}{2}[\langle x\ ;\ iy\rangle + \langle iy; x\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}\langle x\ ;\ y\rangle + \frac{1}{2}\langle x\ ;\ y\rangle - \frac{i^2}{2}\langle y;\ x\rangle + \frac{i^2}{2}\langle y;\ x\rangle$$

$$= \langle x;\ y\rangle.$$

(b) i) Si la norme provient d'un produit scalaire, alors on a

$$\|x+y\|^2 - \ \|x-y\|^2 = \ \langle x+y;\ x+y\rangle + \langle x-y;\ x-y\rangle$$

$$= \ 2\langle x\ ;\ x\rangle + \ 2\langle y\ ;\ y\rangle + \langle x;\ y\rangle + \langle y;\ x\rangle - \langle x;\ y\rangle - \langle y;\ x\rangle$$

$$= \ 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

ii) Supposons maintenant que la norme satisfasse la loi du parallélogramme.

Supposons que le champ est C et définissez le produit interne via l'identité de polarisation de la partie (a). Si x ; y: $z \in X$, nous écrivons

$$x+y=x+\frac{y+z}{2}+\frac{y-z}{2};\ x\ +z=x+\frac{y+z}{2}-\frac{y-z}{2};$$

et nous avons

$$\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2-\|x-y\|^2-\|x-z\|^2)$$

$$+\frac{i}{4}(\|x+iy\|^2+\|x+iz\|^2-\|x-iy\|^2-\|x-iz\|^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|x+\frac{y+z}{2}\right\|^2+\left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2-\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|^2-\left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2\right)$$

$$-\frac{i}{2}\left(\left\|x+i\frac{y+z}{2}\right\|^2+\left\|i\frac{y+z}{2}\right\|^2-\left\|x-i\frac{y+z}{2}\right\|^2-\left\|i\frac{y-z}{2}\right\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|x+\frac{y+z}{2}\right\|^2+\left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2-\left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2-\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|^2\right)$$

$$-\frac{i}{2}\left(\left\|x+i\frac{y+z}{2}\right\|^2+\left\|i\frac{y+z}{2}\right\|^2-\left\|i\frac{y-z}{2}\right\|^2-\left\|x-i\frac{y+z}{2}\right\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2+\|x\|^2-\|x-(y+z)\|^2-\|x\|^2)$$

$$-\frac{i}{4}(\|x+i(y+z)\|^2+\|x\|^2-\|x-i(y+z)\|^2-\|x\|^2)$$

$$=\langle x,y+z\rangle.$$

Ceci est valable pour tout x ; y ; $z \in X$, donc, en particulier,

$$\langle x;\ ny\rangle=n\langle x;\ y\rangle \text{ pour } n\in IN :$$

Et il satisfait aussi

$$\langle x;\ ry\rangle=r\langle x;\ y\rangle \text{ pour } r\in IQ :$$

De plus, toujours par l'identité de polarisation, on a

$$\langle x;\ iy\rangle\ =\frac{1}{4}(\|x+iy\|^2-\ \|x-iy\|^2)-\frac{i}{4}(\|x-y\|^2-\ \|x+y\|^2)$$

$$=\ i\langle x;\ y\rangle :$$

En combinant ces résultats, nous avons

$$\langle x;\ \alpha y\rangle=\alpha\langle x;\ y\rangle\ \text{ pour } \alpha\in IQ+iIQ :$$

Or, si $\alpha \in C$, par la densité de $IQ+iIQ$ dans IC, il existe une suite (α_n) dans $IQ+iIQ$ convergeant vers α. Il s'ensuit que

$$\langle x;\ \alpha y\rangle=\alpha\langle x;\ y\rangle \text{ pour } \alpha\in IC :$$

Ainsi l'application $\langle .\,;. \rangle$ est linéaire.

Puisque $\|i(x-iy)\| = \|x-iy\|$, on a

$$\overline{\langle y;\ x\rangle} = \langle x;\ y\rangle;$$

Et

$$\langle x\ ;\ x\rangle = \frac{1}{4}(\|2x\|^2) - \frac{i}{4}(|1\ +i|\|x\|^2 - |1-i|^2\|x\|^2) = \|x\|^2\ :$$

Cela montre donc que la norme est induite par $\langle .\,;. \rangle$ et qu'il est également défini positif, et donc c'est un produit scalaire.

Exercice 14

1) Prouver les inégalités suivantes, pour tout $a, b \in \mathbb{C}$

(a) $2|a||b| \le |a|^2 + |b|^2$

(b) $|a+b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$

2) a) Montrer que l^2est un espace vectoriel et que

$$si\ a = \{a_n\}, b = \{b_n\} \in l^2\ ,\ alors\ \{a_n\bar{b}_n\} \in l^1$$

b) Montrer que l'application $\langle .,. \rangle : l^2 \times l^2 \to IK$ définie par

$$\forall \{a_n\}, \{b_n\} \in l^2,\ \langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n$$

est un produit scalaire sur l^2 .

Solution de l'exercice 14

1) (a) L'inégalité se déduit de

$$0 \le (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2$$

D'où

$$2|a||b| \le |a|^2 + |b|^2$$

(b) $|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a}+\bar{b}) = |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$

$$\le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$$

d'après l'inégalité (a)

2) a) Nous montrons maintenant que l^2 est un espace vectoriel. Soient

$$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in l^2, \qquad et\ \alpha \in IK$$

Alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^2 = |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

d'où $\alpha x \in l^2$.

De même, pour tout $n \in IN$

$$|x_n + y_n|^2 \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2) \text{ , (d'après l'inégalité(b))}$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2) < \infty$$

Et par suite $(x + y) \in l^2$. Ainsi, l^2 est un espace vectoriel.

De plus, par l'inégalité (a),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \bar{y}_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2) < \infty$$

donc $x_n \bar{y}_n \in l^1$

Comme $x_n \bar{y}_n \in l^1$ il en résulte que la formule $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ est bien définie.

Nous vérifions maintenant que cette formule définit un produit scalaire sur l^2.

(a) $\langle x, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \geq 0$

(b) Si $\langle x, x \rangle = 0$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 0$ et donc $x_n = 0, \ \forall n \in IN$. Ainsi $x = 0$

Inversement, si $x = 0$ alors $x_n = 0, \ \forall n \in IN$ et donc $\langle x, x \rangle = 0$.

(c) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) \bar{z}_n$

$$= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{z}_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n \bar{z}_n = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

(d) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n} = \overline{\langle y, x \rangle}$

Exercice 15

Supposons que X soit un espace linéaire avec un produit scalaire $\langle . ; . \rangle$.

Si $x_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x \ et \ y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y$, montrer que $\langle x_n, y_n \rangle \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle$

Solution Exercice 15.

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire, on a

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle|$$

$$\le \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|$$

$$\le \|x_n - x\|(\|y_n - y\| + \|y\|) + \|x\|\|y_n - y\|$$

$$\le \|x_n - x\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| + \|x\|\|y_n - y\|$$

Puisque $\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|y_n - y\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on voit que

$$\langle x_n, y_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$$

Exercice 16

> ***1)*** *Soient X et Y des espaces vectoriels sur IK et soit $Z = X \times Y$ le produit cartésien de X et Y.*
>
> *Si $\|.\|_1$ est une norme sur X et $\|.\|_2$ est une norme sur Y, alors*
>
> $$\|(x, y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$$
>
> *définit une norme sur Z.*
>
> ***2)*** *Soit X un espace vectoriel de norme $\|.\|_1$ et Y un espace vectoriel de norme $\|.\|_2$.*
>
> *Soit $Z = X \times Y$ muni de la norme indiquée le 1). Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite dans Z.*
>
> ***(a)*** *Montrer que $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers (x, y) dans Z si et seulement si $\{x_n\}$ converge vers x dans X et $\{y_n\}$ converge vers y dans Y.*
>
> ***(b)*** *Montrer que $\{(x_n, y_n)\}$ est de Cauchy dans Z si et seulement si $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X et $\{y_n\}$ est de Cauchy dans Y.*
>
> ***3)*** *Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|_1$ et Y est un espace de Banach de norme $\|.\|_2$.*
>
> *Considérons $Z = X \times Y$, muni de la norme définie dans le 1).*
>
> *Montrez que Z est un espace de Banach.*

Solution de l'exercice 16

1) Soit $(x, y), (u, v) \in Z$ et soit $\alpha \in IK$.

(a) $\|(x, y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2 \ge 0$.

(b) Si $(x, y) = 0$ alors $x = 0$ et $y = 0$. D'où $\|x\|_1 = \|y\|_2 = 0$ et ainsi $\|(x, y)\|_Z = 0$.

Inversement, si $\|(x, y)\|_Z = 0$ alors $\|x\|_1 = \|y\|_2 = 0$. Donc $x = 0$ et $y = 0$ et donc $(x, y) = 0$.

(c) $\|\alpha(x, y)\|_Z = \|(\alpha x, \alpha y)\|_Z = \|\alpha x\|_1 + \|\alpha y\|_2$

$$= |\alpha|\|x\|_1 + |\alpha|\|y\|_2 = |\alpha|\|(x, y)\|_Z.$$

(d) $\|(x, y) + (u, v)\|_Z = \|(x + u, y + v)\|_Z = \|x + u\|_1 + \|y + v\|_2$

$$\leq \|x\|_1 + \|u\|_1 + \|y\|_2 + \|v\|_2 = \|(x,y)\|_Z + \|(u,v)\|_Z$$

2) Soit $\epsilon > 0$.

(a) Supposons que $\{(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})\}$ converge vers (x,y) dans Z. Alors il existe $N \in IN$ tel que

$$\|(\mathrm{x_n} - x, \mathrm{y_n} - y)\|_Z = \|(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}) - (x,y)\|_Z \leq \epsilon, \text{quand } n \geq N$$

Alors

$$\|\mathrm{x_n} - x\|_1 \leq \|(\mathrm{x_n} - x, \mathrm{y_n} - y)\|_Z \leq \epsilon$$

et

$$\|\mathrm{y_n} - y\|_2 \leq \|(\mathrm{x_n} - x, \mathrm{y_n} - y)\|_Z \leq \epsilon,$$

quand $n \geq N$. Donc $\{\mathrm{x_n}\}$ converge vers x dans X et $\{\mathrm{y_n}\}$ converge vers y dans Y.

Inversement supposons que $\{\mathrm{x_n}\}$ converge vers x dans X et $\{\mathrm{y_n}\}$ converge vers y dans Y, alors ils existent $N_1, N_2 \in IN$ tels que

$$\|\mathrm{x_n} - x\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ quand } n \geq N_1$$

et

$$\|\mathrm{y_n} - y\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ quand } n \geq N_2$$

Soit $N_0 = max\{N_1, N_2\}$, alors

$$\|(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}) - (x,y)\|_Z = \|(\mathrm{x_n} - x, \mathrm{y_n} - y)\|_Z$$
$$= \|\mathrm{x_n} - x\|_1 + \|\mathrm{y_n} - y\|_2 \leq \epsilon,$$

quand $n \geq N_0$. Donc $\{(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})\}$ converge vers (x, y) dans Z

(b) Supposons que $\{(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n})\}$ est de Cauchy dans Z. Alors il existe $N \in IN$ tel que

$$\|(\mathrm{x_n} - \mathrm{x}_m, \mathrm{y_n} - \mathrm{y}_m)\|_Z = \|(\mathrm{x_n}, \mathrm{y_n}) - (\mathrm{x}_m, \mathrm{y}_m)\|_Z \leq \epsilon, \text{quand } m, n \geq N$$

Alors

$$\|\mathrm{x_n} - \mathrm{x}_m\|_1 \leq \|(\mathrm{x_n} - \mathrm{x}_m, \mathrm{y_n} - \mathrm{y}_m)\|_Z \leq \epsilon$$

et

$$\|\mathrm{y_n} - \mathrm{y}_m\|_2 \leq \|(\mathrm{x_n} - \mathrm{x}_m, \mathrm{y_n} - \mathrm{y}_m)\|_Z \leq \epsilon,$$

quand $m, n \geq N$. Donc $\{\mathrm{x_n}\}$ est de Cauchy dans X et $\{\mathrm{y_n}\}$ est de Cauchy dans Y.

Inversement supposons que $\{\mathrm{x_n}\}$ est de Cauchy dans X et $\{\mathrm{y_n}\}$ est de Cauchy dans Y, alors ils existent $N_1, N_2 \in IN$ tels que

$$\|\mathrm{x_n} - \mathrm{x}_m\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ quand } m, n \geq N_1$$

et

$$\|y_n - y_m\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ quand } m, n \geq N_2$$

Soit $N_0 = max\{N_1, N_2\}$, alors

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|_Z = \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|_Z$$

$$= \|x_n - x_m\|_1 + \|y_n - y_m\|_2 \leq \epsilon,$$

quand $m, n \geq N_0$. Donc $\{(x_n, y_n)\}$ est de Cauchy dans Z

3) Soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite de Cauchy dans Z.

Alors $\{x_n\}$ est de Cauchy dans X et $\{y_n\}$ est Cauchy dans Y d'après la question 2) b).

Comme X et Y sont des espaces de Banach, $\{x_n\}$ converge vers $x \in X$ et $\{y_n\}$ converge vers $y \in Y$.

Donc $\{(x_n, y_n)\}$ converge vers (x, y) d'après la question 2) a). Donc Z est un espace de Banach

Exercice 17

> *1) Soit X et Y des espaces préhilbertiens avec des produits scalaires $\langle .,. \rangle_1$ et $\langle .,. \rangle_2$ respectivement, et soit $Z = X \times Y$ l'espace de produit cartésien . Alors l'application*
>
> $$\langle .,. \rangle : Z \times Z \rightarrow IK \text{ définie par } \langle (u, v), (x, y) \rangle = \langle u, x \rangle_1 + \langle v, y \rangle_2$$
>
> *est un produit scalaire sur Z.*
>
> *2) Supposons que X et Y soient des espaces de Hilbert avec des produits scalaires $\langle .,. \rangle_1$ et $\langle .,. \rangle_2$, respectivement, et $Z = X \times Y$ est l'espace produit cartésien, le produit scalaire étant celui défini ci-dessus . Montrer que Z est un espace de Hilbert.*

Solution de l'exercice 17

1) i) Pour tout $(u, v) \in Z$

$$\langle (u, v), (u, v) \rangle = \langle u, u \rangle_1 + \langle v, v \rangle_2 \geq 0$$

Car $\langle u, u \rangle_1 \geq 0$ et $\langle v, v \rangle_2 \geq 0$

ii) *) Pour tout $(u, v) \in Z$, nous avons

$$\langle (u, v), (u, v) \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle_1 + \langle v, v \rangle_2 = 0$$

Et comme $\langle u, u \rangle_1 \geq 0$ et $\langle v, v \rangle_2 \geq 0$ alors $\langle u, u \rangle_1 = 0$ et $\langle v, v \rangle_2 = 0$

Donc $u = 0$ et $v = 0$ c'est-à-dire $(u, v) = (0,0)$.

***)** Inversement si $(u, v) = (0,0)$ alors $u = 0$ et $v = 0$ donc $\langle u, u \rangle_1 = 0$ et $\langle v, v \rangle_2 = 0$

D'où

$$\langle (u,v),(u,v)\rangle = \langle u,u\rangle_1 + \langle v,v\rangle_2 = 0$$

iii) Pour tout $(u,v),(x,y),\ (l,k) \in Z$ et $\alpha,\beta \in IC$

$$\langle \alpha(u,v) + \beta(x,y),(l,k)\rangle = \langle (\alpha u + \beta x, \alpha v + \beta y),(l,k)\rangle$$

$$\langle \alpha u + \beta x, l\rangle_1 + \langle \alpha v + \beta y, k\rangle_2 = \alpha\langle u,l\rangle_1 + \beta\langle x,l\rangle_1 + \alpha\langle v,k\rangle_2 + \beta\langle y,k\rangle_2$$

$$= \alpha(\langle u,l\rangle_1 + \langle v,k\rangle_2) + \beta(\langle x,l\rangle_1 + \langle y,k\rangle_2)$$

$$= \alpha\langle (u,v),(l,k)\rangle + \beta\langle (x,y),(l,k)\rangle$$

iv) Pour tout $(u,v),(x,y) \in Z$

$$\langle (u,v),(x,y)\rangle = \langle u,x\rangle_1 + \langle v,y\rangle_2 = \overline{\langle x,u\rangle_1} + \overline{\langle y,v\rangle_2}$$

$$= \overline{\langle x,u\rangle_1 + \langle y,v\rangle_2} = \overline{\langle (x,y),(u,v)\rangle}$$

Remarque

Il convient de noter que, bien que les définitions ci-dessus et celle de l'exercice précédent (exo16) soient naturelles, la norme induite sur Z par le produit scalaire ci-dessus a la forme $\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2}$ (où $\|.\|_1, \|.\|_2$ sont les normes induites par les produits scalaires $\langle .,.\rangle_1$ et $\langle .,.\rangle_2$), alors que la norme définie sur Z dans l'exercice précédent (exo16) a la forme $\|x\|_1 + \|y\|_1$.

Ces deux normes ne sont pas égales, mais elles sont équivalentes

[En effet,

$$\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2 \leq (\|x\|_1 + \|y\|_2)^2 \quad \overset{\text{exercice 14 1) b)}}{\leq} \quad 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2)$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2} \leq \|x\|_1 + \|y\|_2 \leq \sqrt{2}\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2} \ ]$$

2) D'après l'exercice précèdent (exo16) Z est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|(x,y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2.$$

Et comme la norme induite par le produit scalaire

$$\langle (u,v),(x,y)\rangle_Z = \langle u,x\rangle_1 + \langle v,y\rangle_2$$

qui est définie par $\sqrt{\|x\|_1^2 + \|y\|_2^2}$ est équivalente à la norme

$$\|(x,y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

Alors Z doit également être complet par rapport à la norme induite.

Et par suite Z est un espace de Hilbert.

Exercice 18

Considérons l'espace

$$l^p = \{(x_1,\ldots, x_n,\ldots): x_i \in IC, \forall i \in IN \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty\}$$

Montrer que si $0 < p < 1$ alors l^p est un espace vectoriel linéaire mais l'application

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

n'est pas une norme pour l^p.

Solution Exercice 18.

Rappelez-vous que si $x = (x_1; x_2; \ldots)$; $y = (y_1; y_2; \ldots) \in l^p$ et $\alpha \in IC$ alors

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \text{ et } \alpha x = (\alpha x_1; \alpha x_2; \ldots):$$

Il est clair que $\alpha x \in l^p$. Nous montrons que $x + y \in l^p$. Pour $t \geq 0$ il n'est pas difficile de voir que

$$(1 + t)^p \leq 1 + t^p, 0 < p < 1.$$

Cela implique que

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p, \ 0 < p < 1 \text{ et } a, b \geq 0.$$

Par suite,

$$\|x + y\|_P^P \leq \|x\|_P^P + \|y\|_P^P.$$

Puisque $\|x\|_P^P$ et $\|y\|_P^P$ sont bornés, $\|x + y\|_P^P$ est borné. D'où $x + y \in l^p$.

Pour montrer que $\|.\|_p$ n'est pas une norme pour l^p, prenons un exemple :

Si $x = (1; 0; \ldots)$ et $y = (0; 1; 0; \ldots)$ alors

$\|x\|_p = \|y\|_p = 1$ mais $\|x + y\|_p = 2^{1/p} > 2$ puisque $\frac{1}{p} > 1$.

ar suite,

$$\|x + y\|_p > \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Exercice 19

Montrez que l^p; $1 \leq p < \infty$ muni de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est un espace de Banach.

Solution Exercice 19.

Soit $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}, \dots)$ pour $i = 1,2, \dots$ une suite de Cauchy dans l^p. Alors

$$\| x^{(i)} - x^{(j)} \|_p \to 0 \text{ quand } i, j \to \infty.$$

Puisque $\| x^{(i)} - x^{(j)} \|_p \geq \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|$ pour tout k, il s'ensuit que

$$\left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right| \to 0 \text{ pour chaque } k \text{ quand } i\,, j \to \infty.$$

Ceci nous dit que la suite $\left(x_k^{(i)}\right)$ est une suite de Cauchy dans IK, qui est complet, de sorte que $\left(x_k^{(i)}\right)$ converge vers $x_k \in IK$ quand $i \to \infty$ pour chaque k.

Soit $x = (x_1, \dots, x_k, \dots)$. Nous allons montrer que

$$(*) \qquad \| x^{(i)} - x \|_p \to 0 \text{ quand } i \to \infty \text{ et } x \in l^p.$$

Étant donné $\epsilon > 0$, pour tout $M \in IN$, il existe $N \in IN$ tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(i)} - x_k^{(j)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon\,, \qquad si \;\; i;\, j > N$$

Faisant $j \to \infty$, pour $i > N$ on obtient

$$(**) \quad \left(\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(i)} - x_k \right|^p \right)^{1/p} < \epsilon\,.$$

Par l'inégalité de Minkowski,

$$\left(\sum_{k=1}^{M} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(N)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(N)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{M} \left| x_k^{(N)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(N)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$< \epsilon + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(N)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Faisant $M \to \infty$, puisque la dernière somme est finie, on voit que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Cela montre que $x \in l^p$. Enfin faisant $M \to \infty$ dans $(**)$, pour $i > N$ on obtient

$$\| x^{(i)} - x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

Cela montre que $x^{(i)} \rightarrow x$ dans l^p comme requis.

Exercice 20

> *Soit S un ensemble non vide et X un espace de Banach sur IK. Soit $F_b(S,X)$ le sous-espace linéaire de $F(S,X)$ de toutes les fonctions $f: S \rightarrow X$ telles que l'ensemble $\{\|f(s)\|: s \in S\}$ soit borné.*
>
> *1) Montrer que $F_b(S,X)$ a une norme définie par*
>
> $$\|f\|_b = sup\{\|f(s)\|: s \in S\}.$$
>
> *2) Montrer que $F_b(S,X)$ est un espace de Banach.*

Solution de l'exercice 20

1) Soit $f, g \in F_b(S,X)$ et soit $\alpha \in F$.

(a) $\|f\|_b = \sup\{\|f(s)\|: s \in S\} \geq 0$.

(b) Si $f = 0$ alors $(s) = 0$, $\forall s \in S$, de sorte que $\|f(s)\| = 0$, $\forall s \in S$ et donc $\|f\|_b = 0$.

Inversement, si $\|f\|_b = 0$, alors $\|f(s)\| = 0, \forall s \in S$. Alors $(s) = 0$, $\forall s \in S$ et donc $f = 0$.

(c) $\|\alpha f\|_b = \sup\{\|\alpha f(s)\| : s \in S\} = \sup\{|\alpha|\|f(s)\| : s \in S\}$

$$= |\alpha| \sup\{\|f(s)\| : s \in S\} = |\alpha|\|f\|_b.$$

(d) Nous avons

$$\|(f+g)(s)\| \leq \|f(s)\| + \|g(s)\| \leq \|f\|_b + \|g\|_b, \qquad \forall s \in S$$

$$\|f+g\|_b = \sup\{\|(f+g)(s)\| : s \in S\} \leq \|f\|_b + \|g\|_b$$

2) Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $F_b(S,X)$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in IN$ tel que

$$\|f_n - f_m\|_b < \epsilon, \qquad \text{quand } n,m > N$$

Pour tout $s \in S$

$$\|f_n(s) - f_m(s)\| \leq \|f_n - f_m\|_b < \epsilon, \qquad \text{quand } n,m > N$$

Il s'ensuit que $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans X.

Comme X est complet, alors $\{f_n(s)\}$ converge, nous définissons donc une fonction

$$f: S \rightarrow X \text{ par } f(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$$

Comme $\|f_n(s) - f_m(s)\| < \epsilon$ pour tout $s \in S$ quand $n,m > N$.

En prenant la limite quand m tend vers l'infini, nous avons $\|f_n(s) - f(s)\| < \epsilon$ quand $n > N$.

Donc

$$\|f(s)\| \leq \epsilon + \|f_n(s))\| < \epsilon + \|f_n\|_b$$

quand $n > N$ pour tout $s \in S$.

Par conséquent, f est une fonction bornée, donc $f \in F_b(S, X)$ et

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ car $\|f_n - f\|_b < \epsilon$ quand $n > N$.

Donc $F_b(S, X)$ est un espace de Banach.

Exercice 21

Soit X un ensemble. On note $B(X, IR)$ le $IR -$ espace vectoriel des fonctions bornées de X dans IR. On norme $B(X, IR)$ en posant

$$\forall f \in B(X, IR),\ \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Montrer que $B(X, IR)$, muni de cette norme, est un espace de Banach.

Solution de l'exercice 21

Rappelons qu'un espace de Banach est un $e.v.n$ complet.

La preuve de la complétude d'un espace métrique est hyper classique. On procède comme suit :

(i) On considère une suite de Cauchy, et on construit sa limite éventuelle,

(ii) On vérifie qu'elle appartient à l'ensemble de départ,

(iii) On montre que la suite de Cauchy converge bien vers cette limite éventuelle.

(i) Soit (f_n) une suite de Cauchy de $B(X, IR)$. Fixons $x \in X$. Pour $p, q \in IN$, l'inégalité

$$\left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \sup_{x\in X}\left|f_p(x) - f_q(x)\right| = \left\|f_p - f_q\right\|$$

Implique que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans IR . Comme IR est complet, la suite $(f_n(x))$ converge.

Notons $f(x)$ sa limite.

(ii) L'application $f: X \to IR$ ainsi construite vérifie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$.

Montrons que f est bornée.

La suite (f_n) étant de Cauchy, elle est bornée. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\| \leq M, \forall n \in IN$.

Si $x \in X$, on a $|f_n(x)| \leq M, \forall n \in IN$, donc en passant à la limite, on obtient $|f(x)| \leq M$.

Ceci étant vrai pour tout x, f est bien bornée, i.e. $f \in B(X, IR)$.

(iii) Montrons maintenant que (f_n) tend vers f dans $B(X, IR)$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $p, q \geq N, on$ a $\|f_p - f_q\| \leq \epsilon$.

Ainsi, si on fixe un élément x quelconque de X, on a

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \ \ |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\| < \epsilon$$

En fixant p dans l'assertion précédente et en faisant tendre q vers l'infini, on en déduit linégalite $|f_p(x) - f(x)| < \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, on a $\|f_p - f\| < \epsilon$.

Ceci est vrai $\forall p \geq N$, donc (f_p) converge vers f.

Finalement, toute suite de Cauchy (f_n) de $B(X, IR)$ converge, donc $B(X, IR)$est complet.

<u>Exercice 22</u>

> *Soit*
>
> $$S = \{\{x_n\} \in l^2 : \exists N \in IN \ tel \ que \ x_n = 0, \forall n \geq N\}$$
>
> *de sorte que S est un sous-espace linéaire de l^2 constitué des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.*
>
> *Montrer que S n'est pas fermé.*

<u>Solution de l'exercice 22</u>

Si $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ alors $x \in l^2 \setminus S$. Pour chaque $n \in IN$, prenons $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right)$.

Alors $x_n \in S$ et

$$\|x - x_n\|^2 = \left\|\left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots\right)\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2$$

D'où $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ et ainsi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Donc $x \in \bar{S} \setminus S$ et donc S n'est pas fermé.

<u>Exercice 23</u>

> *Trouver la norme de chacun des opérateurs linéaires suivants*
>
> *(a) L'opérateur d'identité sur un espace linéaire normé.*
>
> *(b) L'opérateur nulle de $B\ (V;\ W)$.*
>
> *(c) L'opérateur projection de coordonnées*
>
> $$\pi_k : V_1 \times V_2 \to V_k, (k = 1,2)$$
>
> $$(u_1, u_2) \to \pi_k(u_1, u_2) = u_k \ (k = 1,2)$$

> *où V_1 et V_2 sont des espaces linéaires normés non triviaux (c'est-à-dire des espaces linéaires normés contenant des vecteurs autres que le vecteur nul).*

Solution de l'exercice 23

(a) soit

$$\begin{array}{ccc} I: V & \to & V \\ x & \to & I(x) = x \end{array}$$

Alors

$$\|I\| = sup\{\|Ix\| : \|x\| = 1\} = sup\{\|x\| : \|x\| = 1\} = 1$$

(b) Soit

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0}: V & \to & W \\ x & \to & \mathbf{0}(x) = 0 \end{array}$$

Alors

$$\|\mathbf{0}\| = sup\{\|\mathbf{0}x\| : \|x\| = 1\} = sup\{0\} = 0$$

(c) On suppose $k = 1$, (le cas $k = 2$ est semblable).

Soit $x \in V_1$, $x \neq 0$ et $u = \frac{x}{\|x\|}$.

Puisque $\|(u, 0)\|_1 = \|u\| + \|0\| = \|u\| = 1$, on voit que

$$\|\pi_1\| = sup\{\|\pi_1(x_1, x_2)\| : \|(x_1, x_2)\| = 1\}$$
$$\geq \|\pi_1(u, 0)\| = \|u\| = 1.$$

D'une autre part, puisque

$\|\pi_1(x_1, x_2)\| = \|x_1\| \leq \|(x_1, x_2)\|_1$ pour tout $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$

il découle de la définition de la norme d'un opérateur que $\|\pi_1\| \leq 1$. Ainsi $\|\pi_1\| = 1$.

Exercice 24

> *Soit $T: IR^2 \to IR^3$ défini par*
>
> $$T(x, y) = (3x + y, x - 3y, 4y).$$
>
> *(a) Montrer que T est une transformation linéaire bornée c'est-à-dire $T \in B(IR^2, IR^3)$.*
>
> *(b) Trouver la norme de T.*

Solution de l'exercice 24

(a) Il est facile de voir que T est linéaire. Montrons que T est bornée, en effet

Pour tout $(x, y) \in IR^2$

$$\|T(x,y)\| = \|3x + y, x - 3y, 4y\|$$

$$= ((3x + y)^2 + (x - 3y)^2 + (4y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (10x^2 + 26y^2)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{26}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{26}\|(x,y)\|$$

Ainsi la transformation linéaire T est bornée.

(b) Nous avons déjà

$$\|T(x,y)\| \leq \sqrt{26}\|(x,y)\|, \qquad \forall (x,y) \in IR^2.$$

Puisque $\|T\|$ est défini comme étant le minimum de l'ensemble de tous les nombres M tel que

$$\|T(x,y)\| \leq \sqrt{26}\|(x,y)\|, \qquad \forall (x,y) \in IR^2,$$

et puisque $\sqrt{26}$ est l'un de ces nombres, nous avons que $\|T\| \leq \sqrt{26}$ (1)

D'autre part, nous savons que $\|T\|$ est le supremum de l'ensemble de tous les nombres $\|Ty\|$ où y est un vecteur unitaire. Puisque $(0,1)$ est un vecteur unitaire et que

$$\|T(0,1)\| = \|(1,-3,4)\| = \sqrt{26}$$

nous concluons que

$$\|T\| \geq \sqrt{26} \qquad (2)$$

Les conditions (1) et (2) impliquent que $\|T\| = \sqrt{26}$.

Exercice 25

> *Soit $X = (C[a,b], IR)$. Définissons $T: X \to IR$ par*
>
> $$Tf = \int_a^b f(x)dx$$
>
> *Montrer que $T \in B(X, IR)$ et trouver $\|T\|$.*

Solution de l'exercice 25

Soient $f, g \in X$ et $\alpha \in IR$, alors

$$T(f+g) = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = Tf + Tg$$

Et

$$T(\alpha f) = \int_a^b \big(\alpha f(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx = \alpha Tf$$

Ainsi T est linéaire. Si $f \in X$, alors

$$|Tf| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a)\|f\|_\infty$$

Ceci montre que T est bornée et que $\|T\| \leq b-a$.

Soit maintenant $g(x) = 1$ pour tout $x \in [a,b]$ alors g est un vecteur unitaire dans X, $(\|g\|_\infty = 1)$ et $Tg = \int_a^b g(x)dx = b-a$. On conclut que $\|T\| \geq b-a$.

Et par suite $\|T\| = b-a$.

Exercice 26

> Soit $(c_j)_{j=1}^\infty$ une suite de nombres complexes. Définir un opérateur D sur l^2 par
>
> $$Dx = (c_1x_1;\ c_2x_2;\ \dots) \text{ pour } x = (x_1;\ x_2;\ \dots) \in l^2.$$
>
> Montrer que D est borné si et seulement si $(c_j)_{j=1}^\infty$ est bornée, et dans ce cas
>
> $$\|D\| = \sup_j |c_j|.$$

Solution Exercice 26.

- Supposons que $(c_j)_{j=1}^\infty$ est bornée. Soit $M = \sup_j |c_j| < 1$. Alors

$$\|Dx\| = \left(\sum_{j=1}^\infty |c_jx_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^\infty |c_j|^2|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^\infty M^2|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = M\left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = M\|x\|.$$

Par suite, D est borné et $\|D\| \leq M$.

- Supposons que D soit borné. On veut montrer que $(c_j)_{j=1}^\infty$ est bornée.

Considérons le vecteur $e_j = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$ où le nombre 1 apparaît à la $j-ième$ coordonnée.

Clairement $\|e_j\| = 1$ et $\|De_j\| = |c_j|$ pour tout $j = 1,2,\dots$

Puisque D est borné,

$$|c_j| = \|De_j\| \leq \|D\| \text{ pour tout } j = 1,2,\dots$$

Donc $(c_j)_{j=1}^\infty$ est bornée et $M = \sup_j |c_j| \leq \|D\|$. Enfin $\|D\| = M$.

Exercice 27

Soient $(X; \|.\|)$ un espace de Banach et $T: X \to X$ un opérateur linéaire. On définit l'application

$$\|.\|_T: X \to IR^+; \qquad x \to \|x\|_T = \|x\| + \|T(x)\|$$

***1.** Montrer que $\|.\|_T$ est aussi une norme sur X.*

***2.** Montrer que :*

$$(T \text{ borné}) \Leftrightarrow (\|.\| \text{ et } \|.\|_T \text{ équivalentes}).$$

***3.** On suppose maintenant que T est borné.*

Montrer que l'espace $(X; \|.\|_T)$ est aussi un espace de Banach.

<u>Solution Exercice 27</u>

1) Soient x, y et z des éléments quelconques de X et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors

$$\|x\|_T = 0 \Leftrightarrow \|x\| + \|T(x)\| = 0$$

$$\Leftrightarrow (\|x\| = 0 \text{ et } \|T(x)\| = 0) \Leftrightarrow x = 0.$$

D'autre part, pour tout $x \in X$,

$$\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\| + \|T(\lambda x)\| = \|\lambda x\| + \|\lambda T(x)\|$$

$$= \lambda \|x\| + \lambda \|T(x)\| = \lambda(\|x\| + \|T(x)\|) = \lambda \|x\|_T$$

De plus

$$\|x + y\|_T = \|x + y\| + \|T(x + y)\| = \|x + y\| + \|T(x) + T(y)\|$$

$$\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x)\| + \|T(y)\|$$

$$= (\|x\| + \|T(x)\|) + (\|y\| + \|T(y)\|) = \|x\|_T + \|y\|_T$$

2) $(\Rightarrow)$ Supposons que T est borné, alors, $\exists M > 0$ tel que, pour tout $x \in X$,

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

donc

$$\|x\| \leq \|x\|_T = \|x\| + \|T(x)\|$$

$$\leq \|x\| + M\|x\| = (1 + M)\|x\|$$

C'est-à-dire

$$\|x\| \leq \|x\|_T \leq (1 + M)\|x\|$$

D'où $\|.\|$ et $\|.\|_T$ sont équivalentes.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $\|.\|$ et $\|.\|_T$ sont équivalentes, donc $\exists \alpha, \beta > 0$, telles que

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_T = \|x\| + \|T(x)\| \leq \beta\|x\|, \qquad \forall x \in X$$

Il est clair que

$$\|T(x)\| \leq \|x\|_T \leq \beta\|x\|, \qquad \forall x \in X$$

Et donc l'opérateur T est borné.

Comme T est borné, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_T$ sont équivalentes, alors

(x_n) de Cauchy pour $\|.\|_T \Rightarrow (x_n)$ de Cauchy pour $\|.\|$

$\Rightarrow$ (x_n) converge pour $\|.\|$ - car $(X, \|.\|)$ est de Banach -

$\Rightarrow$ (x_n) converge pour $\|.\|_T$ - car $\|.\|$ et $\|.\|_T$ sont équivalentes –

Ainsi $(X, \|.\|_T)$ est de Banach.

Exercice 28

Soit $(C[a,b], IR)$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans , $a, b \in IR$.

Définissons $T: (C[a,b], IR) \to IR$ par

$$Tf = \int_a^b f(x)dx, \quad \forall f \in (C[a,b], IR)$$

***a)** Montrer que $T \in B\big((C[a,b], IR), IR\big)$ c'est-à-dire T est un opérateur linéaire borné.*

***b)** Trouver $\|T\|$.*

Solution Exercice 28

Soient $f, g \in (C[a,b], IR)$ et $\alpha \in IR$, alors

$$T(f+g) = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = Tf + Tg$$

Et

$$T(\alpha f) = \int_a^b \big(\alpha f(x)\big)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx = \alpha Tf$$

Ainsi T est linéaire.

Si $f \in (C[a,b], IR)$, alors

$$|Tf| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a)\|f\|_\infty$$

Ceci montre que T est bornée et que $\|T\| \leq b - a$.

Soit maintenant $g(x) = 1$ pour tout $x \in [a,b]$ alors g est un vecteur unitaire dans $(C[a,b], IR)$, ($\|g\|_\infty = 1$) et $Tg = \int_a^b g(x)dx = b - a$. On conclut que $\|T\| \geq b - a$.

Et par suite $\|T\| = b - a$.

Exercice 29

$(\boldsymbol{a})$ *Si* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \in l^2$*, montrer que*

$$y = (0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots) \in l^2$$

$(\boldsymbol{b})$ *Soit* $T: l^2 \to l^2$ *un opérateur linéaire défini par*

$$\forall x \in l^2,\ T(x) = T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = y = (0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$$

Montrer que T *est continu.*

(c) *Trouver la norme de* T.

(d) *Trouver* T^2.

(e) *Calculer* $\|T^2\|$ *et comparer la avec* $\|T\|^2$.

Solution Exercice 29

(a) Nous devrons montrer que

$$\|(0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|_2^2 < \infty.$$

Nous avons

$$\|(0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|_2^2 = 16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + |x_4|^2 + \cdots$$

$$\leq 16 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

car $\{x_n\} \in l^2$. Et donc $(0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots) \in l^2$.

(b) T est continu car

$$\|T\{x_n\}\|_2^2 = \|(0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)\|_2^2 \leq 16\|\{x_n\}\|_2^2$$

(c) Dans la solution de (b) nous avons montrer que

$$\|T\{x_n\}\|_2^2 \leq 16\|\{x_n\}\|_2^2$$

Donc $\|T\{x_n\}\|_2 \leq 4\|\{x_n\}\|_2$ et par suite $\|T\| \leq 4$.

De plus $\|(1,0,0, \dots)\|_2 = 1$ et

$$\|T(1,0,0, \dots)\|_2 = \|(0,4,0, \dots)\|_2 = 4$$

Ainsi $\|T\| \geq 4$ et par suite $\|T\| = 4$.

(d) $T^2(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = T\big(T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)\big)$

$$= T(0{,}4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \dots)$$

$$= (0{,}0{,}4x_1, 4x_2, 4x_3, 4x_4, \dots)$$

(e) Du résultat de (d), nous avons

$$\|T^2\{x_n\}\|_2^2 = \|(0,0,4x_1,4x_2,4x_3,4x_4,\dots)\|_2^2 = 16\|\{x_n\}\|_2^2$$

Et donc $\|T^2\| \leq 4$. De plus

$$\|(1,0,0,0,\dots)\|_2 = \|(0,0,4,0,\dots)\|_2 = 4$$

Donc $\|T^2\| \geq 4$ et par suite $\|T^2\| = 4$.

Et comme $\|T\| = 4$ d'après (c), il découle que

$$\|T\|^2 = 16 \neq 4 = \|T^2\|.$$

Exercice 30

On considère l'opérateur linéaire

$$T: C([\ 1;\ 1];\ IR) \to \ L^2([\ 1;\ 1];\ IR);$$

$$x \ \to \ Tf(t) \ = t\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

***1.** Montrer que T est bien défini.*

***2.** Calculer $\|T(g)\|_2$ où $g(x) = 1$, $\forall x \in [-1,1]$*

***3.** Calculer la norme de l'opérateur T.*

Solution Exercice 30

2. Pour toute fonction $f \in C\big([\ 1\ ;\ 1]\ ;\ IR\big)$, on a

$$\|Tf\|_2^2 = \int_{-1}^{1}\left|t\int_{-1}^{1} f(s)ds\right|^2 dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt\left|\int_{-1}^{1} f(s)ds\right|^2$$

$$= \frac{2}{3}\left|\int_{-1}^{1} f(s)ds\right|^2 \leq \frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{1}|f(s)|ds\right)^2$$

$$\leq \frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{1}\|f\|_\infty ds\right)^2 = \frac{2}{3}\times 4\|f\|_\infty^2$$

$$= \frac{8}{3}\|f\|_\infty^2 < \infty$$

L'opérateur T est bien défini.

3. On a d'après les calculs précédents

$$\|T(g)\|_2^2 = \frac{2}{3}\left|\int_{-1}^{1} 1ds\right|^2 = \frac{2}{3}\times 2^2 = \frac{8}{3}$$

Par conséquent $\|T(g)\|_2 = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

4. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} \|T\| \leq \sqrt{\frac{8}{3}} \qquad (\,1ière\ question\,) \\ \qquad\qquad et \\ \|T(g)\|_2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \qquad (\,2ième\ question) \end{array}\right. \Rightarrow \qquad \|T\| = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Exercice 31.

Soit P l'espace de tous les polynômes (d'une variable réelle et à coefficients réels) avec la norme

$$\|p\| = sup\{|p(t)| : -1 \leq t \leq 1\}$$

a) Définir

$$f : P \to IR \ \text{ par } \ f(p) = p\,(2).$$

Démontrez que f est une fonctionnelle linéaire non bornée.

b) Définir également

$$T : P \to P \text{ par } T(p) = p' \text{ (la dérivée de } p)$$

et prouver que T est un opérateur linéaire non borné.

Solution Exercice 31

1) Si $a;\ b\ \in IR\ et\ p;\ q \in P$ alors

$$f(ap + bq) = [ap + bq]\,(2) = ap(2) + bq(2) = af(p) + bf(q),$$

et

$$T(ap + bq) = (ap + bq)' = a\,(p') + b\,(q') = aT(p) + bT(q).$$

Cela prouve que f et T sont linéaires.

2) Etant donné un entier $n \geq 1$, nous considérons le polynôme $p\,(t) = t^n$.

Notez que $\|p\| = 1$. De plus, nous avons $f\,(p) = p(2) = 2^n$.

Donc f n'est pas bornée, car il n'y a pas de constante C telle que $|2^n| \leq C$ soit valable pour tout $n \geq 1$.

Car si f était bornée, il existe $C > 0$ telle que $\forall n \geq 1$, on a $2^n \leq C$ c'est-à-dire $n \leq \frac{\ln C}{\ln 2}$ en particulier pour $n = \left[\frac{\ln C}{\ln 2}\right] + 2 > 1$ on aura $n = \left[\frac{\ln C}{\ln 2}\right] + 2 \leq \frac{C}{\ln 2}$ ce qui est impossible ($[x]$ désigne la partie entière de x, $[x] \leq x < [x] + 1$).

3) On note également $T(p)\,(t) = nt^{n-1}$ et donc $\|T\,(p)\| = n$.

Donc T est non borné, car il n'y a pas de constante C telle que $n \leq C$ soit valable pour tout $n \geq 1$.

Exercice 32

Définissons $T: l^\infty \to l^1$ par

$$T\left((x_1, x_2, x_3, \ldots)\right) = (2^{-1}\, x_1;\ 2^{-2}\ (x_1 + x_2);\ 2^{-3}\ (x_1 + x_2 + x_3); \ldots).$$

Montrer que T est un opérateur linéaire borné $T: l^\infty \to l^1$ et calculer la norme $\|T\|$.

Solution Exercice 32

T est évidemment un opérateur linéaire. Nous avons, pour tous $(x_k) \in l^\infty, si\ (y_k) = T\,((x_k))$,

$$\|(y_j)\|_{l^1} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| 2^{-j} \sum_{k=1}^{j} x_k \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{k=1}^{j} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| 2^{1-k} \leq \|(x_k)\|_{l^\infty} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2.\, \|(x_k)\|_{l^\infty}.$$

Donc T est un opérateur borné, et $\|T\| \leq 2$.

D'autre part, en prenant $(x_k) = (1, 1, 1, \ldots)$ on obtient clairement l'égalité à chaque étape du calcul ci-dessus

$$\|(y_j)\|_{l^1} = \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \left| 2^{-j} \sum_{k=1}^{j} x_k \right| = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{k=1}^{j} |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| 2^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2.$$

d'où $\|T\,((1, 1, 1, \ldots))\| = 2$, et cela montre que $\|T\| = 2$.

Réponse : $\|T\| = 2$.

Exercice 33

Soit $Y = \{\,(x_n) \in l^1 |\text{au plus un nombre fini de } x_n \neq 0\,\}$:

1) Montrez que Y n'est pas complet.

2) Montrer que $\overline{Y} = l^1$.

Solution Exercice 33

Soit

$$x_n = \left(2^{-1} ; 2^{-2} ; 2^{-3} ; \dots ; 2^{-n} ; 0 ; 0 ; 0 ; \dots\right).$$

Alors x_1; x_2; … $\in Y$. Nous définissons également

$$x = (2^{-1} ; 2^{-2} ; 2^{-3} ; \dots) \in l^1$$

(Le fait que $x \in l^1$ découle de $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < +\infty$.)

Noter que

$$v = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in l^1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |v_n| < +\infty \text{ et } \|v\|_{l^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |v_n|$$

Nous affirmons maintenant que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$; cela découle de

$$\|x_n - x\| = \left\|\left(0 ; 0 ; \dots ; 0 ; 2^{-n-1} ; 2^{-n-2} ; \dots\right)\right\|$$
$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Notez que $x \notin Y$, par la définition de Y.

Donc par le Théorème(*) (b), Y n'est pas fermé (en tant que sous-espace de l^1).

Par conséquent, d'après le théorème (**) ci-après, Y n'est pas complet.

Montrons que la fermeture de Y c'est l^1 i.e. $\overline{Y} = l^1$.

Pour le prouver, soit $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^1$.

Puis formons la suite $y_1, y_2, \dots$ où

$$y_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

Alors $y_1, y_2, \dots \in Y$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ Car

$$\|x - y_n\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Preuve détaillée de la dernière affirmation: Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} |x_n|$.

Alors $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n|$ existe en tant que nombre réel, puisque $x = (x_n) \in l^1$.

Donc (S_n) est une suite de Cauchy, et donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que $|S_m - S_n| < \epsilon$ chaque fois que $m \geq n \geq N$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \epsilon \text{ chaque fois que } m \geq n \geq N.$$

Pour n fixé, nous faisons $m \to \infty$ dans la dernière instruction pour obtenir

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \epsilon \text{ chaque fois que } n \geq N$$

Mais un tel $\epsilon > 0$ était arbitraire; d'où nous avons prouvé $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| = 0.)$

D'où par le Théorème(*) (a), $x \in \bar{Y}$. Ceci est vrai pour chaque $x \in l^1$. D'où $\bar{Y} = l^1$.

Théorème(*) (Fermeture et ensemble fermé)

Soit M un sous ensemble non vide d'un espace métrique (X, d) et $\bar{M}$ sa fermeture. Alors on a

c) $(x \in \bar{M})$ si, et seulement si $(\exists (x_n) \in M$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x)$

d) $(M$ est fermé) si, et seulement si (si $(x_n) \in M$ telle que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ alors $x \in M)$

Théorème(**) (Sous espace complet):

Un sous espace M d'un espace métrique complet X est lui-même complet si, et seulement si l'ensemble M est fermé dans X.

Exercice 34

1) Montrer que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx,$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que ce produit scalaire fait de $\mathbb{R}_N[X]$ un espace de Hilbert.

3) a. Soit

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}.$$

Montrer que (P_n) converge uniformément vers l'exponentielle sur $[0,1]$.

b. En déduire que (P_n) converge vers l'exponentielle pour la norme associée à $\langle ., . \rangle$.

c. La fonction exponentielle est-elle un polynôme. Conclure.

Solution Exercice 34

1) L'application $\langle ., . \rangle$ est bilinéaire, symétrique car le produit de réels est une opération bilinéaire symétrique et par linéarité de l'intégrale. De plus, pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\langle P,P\rangle = \int_0^1 P(x)^2\,dx \geq 0$$

Et cette expression est nulle si et seulement si $P = 0$. En effet,

$\langle 0,0\rangle = 0$ et si $\langle P,P\rangle = \int_0^1 P(x)^2\,dx = 0$, alors la fonction polynômiale $x \longmapsto P(x)^2$ est continue positive d'intégrale nulle sur $[0,1]$, donc elle est identiquement nulle sur $[0,1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui implique que $P = 0$.

L'application $\langle .,.\rangle$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et par restriction sur $\mathbb{R}_N[X]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

2) $\mathbb{R}_N[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie, il est donc complet pour la norme associée au produit scalaire considéré : c'est un espace de Hilbert. Ceci est faux pour $\mathbb{R}[X]$:

3) a) D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \geq 0$:

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right|$$

$$\leq e \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = e\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

Ce dernier terme ne dépend pas de x et converge vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, donc $P_n \longrightarrow exp$ uniformément sur $[0,1]$.

b) Pour tout n,

$$\|e^x - P_n\| = \left(\int_0^1 [e^x - P_n]^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \|e^x - P_n\|_\infty^2 dx \right)^{1/2} = \|e^x - P_n\|_\infty \longrightarrow 0$$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$, d'après la question précédente.

Donc P_n converge vers exp pour la norme associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

c) Supposons que la fonction exponentielle est un polynôme P de degré n. La dérivée d'ordre $n+1$ de exp est donc nulle.

Or la dérivée de la fonction e^x à tout ordre est elle-même : on a donc $e^x = 0$ ce qui est absurde.

La fonction exp n'set donc pas un polynôme.

Ceci montre que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet pour $\|.\|$: $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle .,.\rangle$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 35

Soit l'opérateur suivant :

$$A: C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow L^2[0,1]$$

$$f(x) \longmapsto Af(x) = x^2 f(x)$$

Et soit $d \in C[a,b]$ et définissons l'opérateur B par :

$$B: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$x \longmapsto Bx = d(t)x(t)$$

1. Montrer que les deux opérateurs sont bien définis et bornés.
2. Calculer les normes des opérateurs A et B.

Solution Exercice 35

1) Montrer que l'opérateur A est bien défini signifie qu'il faut montrer l'implication suivante :

$$f \in C([0,1],\mathbb{R}) \Longrightarrow Af \in L^2[0,1]$$

On a :

$$\|Af\|_2^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 |x^2 f(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 x^4 (\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|)^2 \, dx = \|f\|_\infty^2 \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}\|f\|_\infty^2$$

Par conséquent $Af \in L^2[0,1]$ et l'opérateur A est donc bien défini.

De plus : $\|Af\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\|f\|_\infty$, donc A est borné.

D'autre part, pour $x \in C[a,b]$ vérifions que $Bx \in C[a,b]$.

En effet,

$$\|Bx\|_{C[a,b]} = \max_{a\leq t\leq b} |Bx(t)| = \max_{a\leq t\leq b} |d(t)x(t)|$$

$$= \max_{a\leq t\leq b} (|d(t)||x(t)|) \leq \max_{a\leq t\leq b} |d(t)| \max_{a\leq t\leq b} |x(t)|$$

Donc ;

$$\|Bx\|_{C[a,b]} \leq \max_{a\leq t\leq b} |d(t)| \, \|x\|_{C[a,b]} = c\, \|x\|_{C[a,b]}$$

Avec $c = \max_{a\leq t\leq b} |d(t)|$, d'où B est bien défini borné.

2) Calcule de $\|A\|$

D'après la réponse précédente, l'opérateur A est borné et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Montrons qu'en fait $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Pour cela, considérons la fonction constante $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$. On a :

$$f \in C([0,1], \mathbb{R}) \; et \; \|f\|_\infty = 1$$

De plus,

$$\|Af\|_2^2 = \int_0^1 |Af(x)|^2 dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \Longrightarrow \|Af\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

D'où l'égalité

$$\|A\| = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

<u>Calcule de $\|B\|$</u>

On choisit $x(t) = 1, \forall t \in [a, b]$. On a

$$\|x\| = 1 \text{ et } \|Bx\| = \|d(t)x(t)\| = \|d(t)\|$$

D'où

$$\|B\| = \|d(t)\| = \max_{t \in [a,b]} |d(t)|$$

<u>Exercice 36</u>

> *Soient $E = C([0,1])$ et : $C([0,1]) \to \mathbb{C}$, l'opérateur linéaire défini par*
>
> $$Tf = f(1), \;\; \forall f \in C([0,1])$$
>
> *(a) Montrer que T est borné, si $C([0,1])$ est muni de la norme $\|.\|_\infty$.*
>
> *(b) Montrer que T n'est pas borné si $C([0,1])$ est muni de la norme $\|.\|_p$.*

<u>Solution de l'exercice 36</u>

(a) Nous avons

$$|Tf| = |f(1)| \leq \|f\|_\infty$$

D'où T est borné et $\|T\| \leq 1$, (mieux encore on a $\|T\| = 1$).

(b) Supposons T borné, alors il existe $M > 0$, tel que

$$|Tf| \leq M\|f\|_p, \qquad \forall f \in C([0,1])$$

Donc pour $f_n(t) = t^n, t \in [0,1]$, il est clair que $f_n \in C([0,1]$, on a

$$\|f_n\|_p = \left(\int_0^1 |f_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_0^1 |t^n|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(np+1)^{\frac{1}{p}}}$$

on obtient alors

$$|Tf_n| = |f_n(1)| = 1 \leq M\|f_n\|_p$$

$$= \frac{M}{(np+1)^{\frac{1}{p}}} \to 0, \text{quand } n \to \infty$$

Ce qui est absurde, donc T n'est pas borné.

Exercice 37

> ***1)*** *Soient $T: X \to Y$ un opérateur linéaire borné et $M \geq 0$. On suppose que $\|T\| \leq M$. Montrer alors, pour avoir $\|T\| = M$, il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*
>
> *(a) Il existe $x \in X$ vérifiant*
>
> $$\|x\|_X = 1\,,\ \ et\ \|Tx\|_Y = M$$
>
> *(b) Il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X, vérifiant :*
>
> $$\|x_n\|_X = 1\,, \forall n \in IN\ \ et\ \ \lim_{n\to+\infty} \|Tx_n\|_Y = M$$
>
> *2) Montrer que chacun des opérateurs suivants est bien défini et trouver sa norme.*
>
> *i)*
>
> $$T: (C([0,1], IR), \|.\|_\infty) \to (L^2([0,1]), \|.\|_2)$$
>
> $$f \in C([0,1], IR) \to Tf(x) = xf(x), \forall x \in [0,1]$$
>
> *Montrer que l'opérateur suivant est bien défini et trouver sa norme.*
>
> *ii)*
>
> $$T: l^2(IR) \to l^2(IR)$$
>
> $$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \to T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \left(0, \frac{x_2}{2}, \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n, \dots\right)$$

Solution de l'exercice 37

1) a) La première assertion est une conséquence directe de la définition de la norme et du sup :

Puisque $\|x\|_X = 1$, et $\|Tx\|_Y = M$ donc $\sup_{\|x\|=1} \|Tx_n\|_Y = M$ c'est-à-dire $\|T\| = M$.

b) Montrons la deuxième. Sous les hypothèses énoncées, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in IN: \forall n > N_\epsilon, \qquad M - \epsilon < \|Tx_n\|_Y$$

Il s'ensuit que

$$\forall \epsilon > 0, \|T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx_n\|_Y \geq \ M - \epsilon$$

En faisant tendre ϵ vers 0 dans cette dernière inégalité on obtient $\|T\| \geq M$, d'où le résultat.

2) i) *) Montrer que l'opérateur T est bien défini, signifie qu'il faut montrer l'implication suivante :

$$f \in C([0,1], IR) \Rightarrow Tf \in L^2([0,1])$$

Nous avons

$$\int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 |xf(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 x^2 \left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \right)^2 dx$$

$$= \|f\|_\infty^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \|f\|_\infty^2 < +\infty$$

Par conséquent, $Tf \in L^2([0,1])$ et l'opérateur T est bien défini.

****)** D'après la formule précédente, l'opérateur T est borné et donc $\|T\| \leq \frac{1}{3}$.

Montrons qu'en fait, $\|T\| = \frac{1}{3}$.

Pour cela considérons la fonction constante $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$. Nous avons alors :

$$f \in C([0,1], IR), \qquad \text{et} \quad \|f\|_\infty = 1$$

De plus

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

D'après **le point 1) a)** nous avons $\|T\| = \frac{1}{3}$.

ii) *) Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2(IR)$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} |T(x)_k|^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{k}\right) x_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2 |x_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

Donc $T(x) \in l^2(IR)$ et l'opérateur T est bien défini

****)** D'après la formule précédente, l'opérateur T est borné et donc $\|T\| \leq 1$. Montrons qu'en fait, $\|T\| = 1$.

Pour cela considérons la suite:

$$\left(x^{(n)} = \left(\underbrace{0,\dots,0,1}_{n},0,\dots\right)\right)_n$$

Il est clair que $\left\|x^{(n)}\right\|_2 = 1,\ \forall n \geq 1$ de plus

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|T\left(x^{(n)}\right)\right\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\left\|T\left(\underbrace{0,\dots,0,1}_{n},0,\dots\right)\right\|_2$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left\|\left(\underbrace{0,\dots,0,\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{n},0,\dots\right)\right\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$$

Donc d'après **le point 1) b)** nous avons $\|T\| = 1$.

<u>Exercice 38</u>

> *1) Soient (T_n) une suite d'éléments de (X) , où $(X, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.*
>
> *Montrer que si (T_n) converge vers T et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers x. Alors la suite $(T_n x_n)$ converge vers .*
>
> *2) Montrer que si (T_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $B(X)$, alors $(\|T_n\|)$ est elle aussi une suite de Cauchy.*

<u>Solution de l'exercice 38</u>

1) L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\|Tx - T_n x_n\| = \|Tx - Tx_n + Tx_n - T_n x_n\|$$

$$\leq \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - T_n x_n\| = \|T(x - x_n)\| + \|x_n(T - T_n)\|$$

$$\leq \|T\|\|x - x_n\| + \|x_n\|\|T - T_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Lorsque n tend vers l'infini, le premier terme du second membre tend vers 0 et le second terme fait de même car la suite (x_n), étant convergente, est bornée.

2) L'inégalité triangulaire montre que, pour deux suites (T_n) et (T_m) d'éléments de (X) , on a

$\|T_n\| = \|T_n - T_m + T_m\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_m\|$

Et

$\|T_m\| = \|T_m - T_n + T_n\| \leq \|T_n - T_m\| + \|T_n\|$

On en déduit alors l'inégalité

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|$$

Par conséquent, si (T_n)est une suite de Cauchy, il en sera de même de la suite $(\|T_n\|)$.

Exercice 39

Soit X un espace linéaire normé et W un sous-espace dense de X. Soit Y un espace de Banach et soit $S \in B(W,Y)$.

(a) Si $x \in X$ et $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont deux suites dans W telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$, alors

$\{S(x_n)\}$ et $\{S(y_n)\}$ convergent et $\lim_{n\to+\infty} S(x_n) = \lim_{n\to+\infty} S(y_n)$

(b) Montrer qu'Il existe $T \in B(X,Y)$ tel que

$$\|T\| = \|S\| \text{ et } Tx = Sx,\ \forall x \in W$$

Solution de l'exercice 39

(a) Puisque $\{x_n\}$ converge, c'est donc une suite de Cauchy. De plus, comme

$$\|S(x_n) - S(x_m)\| = \|S(x_n - x_m)\| \leq \|S\|\|x_n - x_m\|$$

La suite $\{S(x_n)\}$ est aussi de Cauchy dans Y qui est un espace de Banach donc convergente.

Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x$ alors $\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Puisque

$$\|S(x_n) - S(y_n)\| = \|S(x_n - y_n)\| \leq \|S\|\|x_n - y_n\|$$

Alors $\lim_{n\to+\infty}(S(x_n) - S(y_n)) = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} S(x_n) = \lim_{n\to+\infty} S(y_n)$

(b) Définissons maintenant T comme suit :

$\forall x \in X$, $\exists\{x_n\} \in W$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ (car W est dense dans X)

Et nous définissons $T: X \to Y$ par $T(x) = \lim_{n\to+\infty} S(x_n)$

(T est bien définie car la valeur de la limite est indépendante du choix de la suite $\{x_n\}$ qui converge vers x d'après la partie (a)).

Dans ce cas, il n'est peut-être pas évident que T soit un opérateur linéaire. La première étape de cette partie consiste à montrer que T est linéaire.

Soient $x, y \in X$ et soit $\lambda \in IK$. Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites dans W telles $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Alors $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ sont des suites dans W telles que $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = x + y$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda x_n = \lambda x$. Donc

$$T(x+y) = \lim_{n\to+\infty} S(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty}\big(S(x_n) + S(y_n)\big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} S(x_n) + \lim_{n\to+\infty} S(y_n) = T(x) + T(y)$$

Et

$$T(\lambda x) = \lim_{n\to+\infty} S(\lambda x_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda S(x_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} S(x_n) = \lambda T(x)$$

Et par suite T est un opérateur linéaire.

Maintenant supposons que $x \in X$ avec $\|x\| = 1$ et soit $\{x_n\}$ une suite dans W telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\| = 1$, si on suppose que $w_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, alors $\{w_n\}$ est une suite dans W telle que

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\|x_n\|} = x \text{ et } \|w_n\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} = 1, \forall n \in IN$$

Comme

$$\|Tx\| = \lim_{n\to+\infty} \|Sw_n\| \leq \sup\{\|Sw_n\| : n \in IN\}$$

$$\leq \sup\{\|S\|\|w_n\| : n \in IN\} = \|S\|$$

Donc T est bornée et $\|S\| \leq \|T\|$.

De plus, si $w \in W$, alors la suite constante $\{w\}$ est une suite dans W qui converge vers w et donc

$$Tw = \lim_{n\to+\infty} Sw = Sw.$$

Ainsi

$$\|Sw\| = \|Tw\| \leq \|T\|\|w\|$$

D'où $\|S\| \leq \|T\|$ donc $\|S\| = \|T\|$ et nous avons déjà montré que $\forall x \in W, Tx = Sx$.

Remarque

L'opérateur T de cet exercice peut être considéré comme une extension de l'opérateur S au plus grand espace.

Exercice 40

Soit $T : X \to Y$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Alors

(1) T est continu

(2) Il existe $x \in X$ tel que T est continu en x

(3) T est continu en 0

(4) Pour toute suite $(x_n)_{n\in IN}$ dans X qui tend vers 0_X, la suite $(Tx_n)_{n\in IN}$ tend vers 0_Y.

(5) Pour toute suite $(x_n)_{n\in IN}$ dans X qui tend vers 0_X, la suite $(Tx_n)_{n\in IN}$ est bornée.

(6) Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

Solution de l'exercice 40

$\mathbf{1}) \Rightarrow \mathbf{2})$. Si T est continu il est continu en tout point de X et en particulier, il existe $x \in X$ tel que T est continu en x.

$\mathbf{2}) \Rightarrow \mathbf{3})$ Supposons T continu en x. Soit $\epsilon > 0$.

Comme T est continu en x, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in X$,

$$si \; \|y - x\| < \delta \;\text{ alors } \|Ty - Tx\| < \epsilon.$$

Soit $h \in X$, si $\|h\| < \delta$, alors $\|(x + h) - x\| < \delta$ et la propriété ci-dessus montre que

$$\|T(x + h) - Tx\| < \epsilon.$$

Comme T est linéaire $T(x + h) - Tx = Th$ et on a $\|Th\| < \epsilon$

Puisque $T0 = 0$, ceci signifie précisément que T est continu en 0.

$\mathbf{3}) \Rightarrow \mathbf{4})$ C'est la caractérisation séquentielle de la continuité en 0.

Montrons tout de même la propriété voulue.

Soit $(x_n)_{n \in IN}$ une suite de X convergeant vers 0. Soit $\epsilon > 0$.

Comme T est continu en 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $h \in X$,

$$\|h\| < \delta \;\Rightarrow\; \|Th\| < \epsilon.$$

Comme la suite $(x_n)_{n \in IN}$ tend vers 0, il existe $n_0 \in IN$ tel que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \|x_n\| < \delta .$$

On a donc, pour tout $n \in IN$, si $n \geq n_0$, alors $\|Tx_n\| < \epsilon$.

Ceci montre bien que la suite $(Tx_n)_{n \in IN}$ tend vers 0.

$\mathbf{4}) \Rightarrow \mathbf{5})$ est vraie, du fait que toute suite convergente est bornée.

$\mathbf{5}) \Rightarrow \mathbf{6})$. Montrons cette implication par contraposée : on suppose que,

$$\forall M > 0, \exists x \in X \text{ tel que } \|Tx\| > M\|x\|.$$

Sous cette hypothèse, montrons qu'il existe une suite $(y_n)_{n \in IN^*}$ de X qui tend vers 0 et telle que la suite $(Ty_n)_{n \in IN^*}$ n'est pas bornée.

Appliquons l'hypothèse à $M = n^2, n \in IN^*$. Il existe alors $x_n \in X$ tel que $\|Tx_n\| > n^2\|x_n\|$.

Notons que ceci impose que $Tx_n \neq 0$ et donc que $x_n \neq 0$. Pour $n \in IN^*$, définissons $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$.

La suite $(y_n)_{n \in IN^*}$ tend alors vers 0 puisque, pour tout $n \geq 1$, $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

La suite $(Ty_n)_{n \in IN^*}$ n'est quant à elle pas bornée puisque, pour tout $n \geq 1$,

$$\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > n.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

$\mathbf{6}) \Rightarrow \mathbf{1})$. Comme T est linéaire, on a alors, pour tout $x, y \in X$,

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x - y)\| \leq M\|x - y\|$$

et donc T est M-lipschitzien. Toute opérateur lipchitzien étant continue, on en déduit que T est continu.

Exercice 41

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $B(X,Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y.

1) Montrer que pour tout $T \in B(X,Y)$, on a

$$\|T\| \overset{(a)}{\triangleq} \underset{\substack{x\in X \\ x\neq 0}}{Sup} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \overset{(b)}{\triangleq} \underset{\substack{x\in X, \\ \|x\|=1}}{Sup} \|Tx\| \overset{(c)}{\triangleq} \underset{\substack{x\in X, \\ \|x\|\leq 1}}{Sup} \|Tx\|$$

2) Montrer que $(B(X,Y), \ \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

3) Si Z est un troisième espace vectoriel normé.

Montrer alors que pour tout $T \in B(X,Y)$ et tout $S \in B(Y,Z)$ on a

$$\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|.$$

Solution l'exercice 41

1) (a) Soit $T \in B(X,Y)$. D'après l'exercice précédent, il existe un réel M tel que $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Ainsi l'ensemble $\left\{t \in IR: \exists x \in X\backslash\{0\}, \ t = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\}$ est majoré par M, donc on peut définir $\|T\|$ comme la borne supérieur cet ensemble :

$$\|T\| = \underset{\substack{x\in X \\ x\neq 0}}{\text{Sup}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

(b) Remarquons aussi que si $x \in X\backslash\{0\}$ alors $y = \frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 et

$$\frac{Tx}{\|x\|} = T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = Ty.$$

D'où, pour $t \in IR$, l'équivalence

$$\left\{\exists x \in X\backslash\{0\}, t = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\} \Leftrightarrow \{\exists y \in X, \|y\| = 1 \ \text{ et } t = \|Ty\|\}$$

En particulier l'ensemble

$$A = \{t \in IR : \exists y \in X, \|y\| = 1 \ \text{ et } t = \|Ty\|\}$$

Est égal à

$$\left\{t \in IR : \exists x \in X \backslash \{0\}, t = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\}$$

Ce qui prouve que

$$\sup A = \operatorname*{Sup}_{\substack{y \in X, \\ \|y\|=1}} \|Ty\| = \|T\|$$

(c) Soit maintenant

$$B = \{t \in IR : \exists z \in X, \|z\| \leq 1 \ \text{ et } t = \|Tz\|\}$$

Comme $A \subset B$ on a $\sup A \leq \sup B$.

Montrons l'autre inégalité, c'est-à-dire que, pour tout $t \in B, t \leq \sup A$.

Soit $z \in X$ tel que $\|z\| \leq 1$ et $t = \|Tz\|$. Si $z = 0$ alors $t = \|T0\| = 0 \leq \sup A$.

Si $z \neq 0$, posons $y = \frac{z}{\|z\|}$ de sorte que $\|y\| = 1$ et donc $\|Ty\| \leq \sup A$.

Comme $z = y\|z\|$, on a

$$\|Tz\| = \big\|Ty\|z\|\big\| = \|z\|\|Ty\| \leq \|z\| \sup A \leq \sup A$$

Ceci conclut que $\sup B \leq \sup A$.

Finalement on a démontré toutes les égalités demandées :

$$\|T\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in X, \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in X, \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\|$$

2) Montrons maintenant que $(B(X,Y), \ \|.\|\ )$ est un espace vectoriel normé.

i) *Positivité*. Pour tout $T \in B(X,Y)$, l'ensemble

$$A = \{t \in IR : \exists y \in X, \|y\| = 1 \ \text{ et } t = \|Ty\|\}$$

est contenu dans IR_+ et donc $\|T\| = \sup A \geq 0$. (Remarque : il suffit aussi de noter que A contient un seul réel positif).

ii) *Séparation*. Si T est l'opérateur nul, alors $\|T\| = \sup\{0\} = 0$.

Inversement, soit $T \in B(X,Y)$ tel que $\|T\| = 0$, on a alors, pour tout $x \in X \backslash \{0\}$, $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq 0$, donc $\|T(x)\| = 0$ et par suite Tx , $\forall x \in X \backslash \{0\}$ et comme $T(0) = 0$, T est bien l'opérateur nul.

iii) *Homogénéité*. Soient $T \in B(X,Y)$ et $\lambda \in IR$. Pour tout $t \in IR$ remarquons que

$$\exists x \in X\backslash\{0\}, t = \frac{\|(\lambda T)x\|}{\|x\|} \Leftrightarrow \exists x \in X\backslash\{0\}, t = \frac{\|\lambda(Tx)\|}{\|x\|}$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in X\backslash\{0\}, t = |\lambda| \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

De sorte que

$$\|\lambda T\| = \sup\left\{|\lambda| t \colon \exists x \in X\backslash\{0\}, t = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\}$$

$$= |\lambda| \sup\left\{t \colon \exists x \in X\backslash\{0\}, t = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\} = |\lambda| \|T\|$$

(car la borne supérieur de l'image d'un ensemble par une homothétie de rapport positif est l'homothétique de la borne supérieure.)

iv) *Inégalité triangulaire*. Soient $T, S \in B(X, Y)$. Pour tout $x \in X$,

$$\|(T+S)x\| = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|\|x\| + \|S\|\|x\|.$$

Ainsi

$$\|T+S\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(T+S)x\|}{\|x\|} \leq \|T\| + \|S\|.$$

3) Soient $T \in B(X, Y)$ et S$\in B(Y, Z)$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\|(S \circ T)x\| = \|S(Tx)\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$$

En divisant, pour $x \neq 0$, par $\|x\|$ et en passant à la borne supérieure, on trouve

$$\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|.$$

Exercice 42.

> Soit X , Y des espaces normés et $T \in B(X; Y)$. Considérez l'énoncé suivant :
>
> $$T \text{ est une isométrie } \Leftrightarrow \|T\| = 1 .$$
>
> Êtes-vous d'accord avec ça ? Pourquoi?

Solution Exercice 42.

- La première implication (⇒) est correcte. En effet, supposons que T soit une isométrie ; Alors

$$\|T\|_{B(X;Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|x\|_X \quad (\text{puisque } \|Tx\|_Y = \|x\|_X)$$

$$= 1$$

- L'inverse (⇐) est fausse. Le décalage vers la gauche sur l^2 est un contre-exemple (voir Problème 11).

Exercice 43.

Soit $H = l^2$ l'espace de Hilbert bien connu. Considérons le décalage vers la gauche défini par

$$T : l^2 \to l^2 ;\ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \to Tx = (x_2, x_3, \dots).$$

(a) Montrer que T est un opérateur linéaire borné. Trouver $\|T\|$:

(b) Définissez le décalage de droite et répondez à la même question qu'en (a).

Solution Exercice 43.

Nous ne répondons qu'à la première partie.

- Il est facile de vérifier la linéarité de T.
- Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2$, on a

$$\|Tx\|_2 = \|(x_2, x_3, \dots)\|_2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2 .$$

D'où

$$\|Tx\|_2 \leq \|x\|_2;\ \forall x \in l^2 :$$

Ceci implique que T est borné, et $\|T\| \leq 1 .\ (*)$

- D'autre part, considérons la suite $e = (0,1,0,0, \dots) \in l^2$. On a

$$\|e\| = 1 \text{ et } \|Te\| = \|(1,0,0, \dots)\| = 1 .$$

Donc

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq 1 .\ (**)$$

En combinant $(*)$ et $(**)$ on obtient $\|T\| = 1$.

Exercice 44.

Partie I

Soit X un IK-espace vectoriel de dimension finie de base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Tout $x \in X$ peut être écrit sous la forme $x = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ pour l'unique $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in IK^n$.
Montrer que l'application $\|.\|: X \to IR$ définie par

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur X.

Partie II

Montrer que deux normes quelconques dans un espace de dimension finie X sont équivalentes.

Partie III

Montrer que tout espace normé de dimension finie :

(a) est complet (un espace de Banach),

(b) est réflexif.

Solution Exercice 44 Partie I

Soient $x = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^{n} d_j e_j$ et soit $\alpha \in IK$. Alors $\alpha x = \sum_{j=1}^{n} \alpha c_j e_j$ et les résultats suivants montrent que $\|.\|$ est une norme.

(i) $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

(ii) Si $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$.

Inversement, si $\|x\| = 0$ alors $\left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ et par suite $c_j = 0, \forall j = 1, .., n$, donc

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j = 0$$

(iii) $\|\alpha x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\alpha| \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|$

(iv) D'après l'inégalité de $Holder$ (avec $p = q = 2$).

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j||y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\|x + y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j + d_j|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j d_j + \sum_{j=1}^{n} \bar{d}_j c_j + \sum_{j=1}^{n} |d_j|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} \Re\mathrm{e}(\bar{c}_j d_j) + \sum_{j=1}^{n} |d_j|^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 + 2\sum_{j=1}^{n} |c_j|\,|d_j| + \sum_{j=1}^{n} |d_j|^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 + 2\left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |d_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n} |d_j|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

D'où $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Solution Exercice 44 Partie II.

Puisque l'équivalence des normes est une relation d'équivalence, il suffit de montrer qu'une norme arbitraire $\|.\|$ sur X est équivalente à la norme euclidienne $\|.\|_2$.

Soit $\{ e_1, \dots , e_n\}$ une base pour X. Pour $x \in X$ il existe des nombres $c_1, \dots , c_n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

Par conséquent,

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k||e_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} |e_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq A\|x\|_2$$

où $A = (\sum_{k=1}^{n} |e_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ est une constante non nulle. Cela montre que l'application $x \to \ \|x\|$ est continue w.r.t. la norme euclidienne. Considérons maintenant $S = \{x : \|x\|_2 = 1\}$.

C'est juste la sphère unité dans $(X; \|x\|_2)$, qui est compacte. L'application

$S \to IR$ définie par $x \to \ \|x\|$ est continue,

elle atteint donc un minimum m et un maximum M sur S.

Notons que $m > 0 \ car\ S \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $x \in S$, on a

$$m \leq \|x\| \ \leq M\,.$$

Maintenant, pour $x \in X$; $x \neq 0$; $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$, donc

$$m \leq \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \leq M\,.$$

C'est-à-dire

$$m\|x\|_2 \leq \ \|x\| \ \leq M\|x\|_2$$

Les deux normes sont donc équivalentes.

Solution Exercice 44 Partie III.

Soit X un espace normé de dimension finie. Supposons $dimX = d$.

(a) D'après le problème 5, il suffit de considérer la norme euclidienne dans X. Soit $\{ e_1, \dots, e_n\}$ une base pour X. Pour $x \in X$ il existe des nombres $c_1, \dots, c_n$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \text{ et } \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $(x^{(n)})$ une suite de Cauchy dans X. Si pour chaque n ;

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{d} a_k^{(n)} e_k$$

alors

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\| = \left(\sum_{k=1}^{d} \left|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quand } n\,, m \to \infty.$$

Donc, pour tout $k = 1,2, \dots, d$,

$$\left|a_k^{(n)} - a_k^{(m)}\right| \to 0 \text{ quand } n\,, m \to \infty.$$

Par conséquent, chaque suite de nombres $(a_k^{(n)})$ est une suite de Cauchy, donc

$$a_k^{(n)} \to a_k^{(0)} \text{ quand } n \to \infty \text{ pour chaque } k = 1,2, \dots, d.$$

Soit $a = \sum_{k=1}^{d} a_k^{(0)} e_k$ alors $x^{(n)} \to a \in X$.

(b) Soit $f \in X'$ où X' est l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires sur X. On a

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k \,;$$

où $\alpha_k = f(e_k)$. Définissons $f_k \in X'$ par la relation

$$f_k(x) = c_k; k = 1,2, \dots, d.$$

Pour tout $x \in X$ et $f \in X'$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \alpha_k \;;\; \text{c. à d.}; \; f = \sum_{k=1}^{n} f_k \alpha_k \,:$$

Par conséquent, $dimX' \leq d$.

Soit $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k = 0$. Alors, pour chaque $\in X$, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) = 0$, et en prenant

$x = \sum_{k=1}^{d} \overline{\alpha_k} e_k$, on obtient $f_k(x) = \overline{\alpha_k}$, et

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = 0 .$$

Donc , $\alpha_k = 0$ pour tout $k = 1,2, \dots , d$ et donc, $dimX' = d$.

Pour l'espace X^* on a $X^* \subset X'$, donc $dimX^* = n \leq d$ et $\dim(X^*)' = n$. De la relation

$$X \subset (X^*)^* \subset (X^*)'$$

nous concluons que $d \leq n$. Ainsi, $n = d$, et donc $X = (X^*)^*$.

Références

1 A Course in Functional Analysis and Measure Theory (2018) Vladimir Kadets

2 A First Course in Mathematical Analysis - J. C. Burkill

3 A Problem text in advanced calculus - John M. Erdman

4 A Second Course in Analysis (1970) J. C. Burkill

5 A Short Course on Spectral Theory (2002) William Arveson

6 An Introduction to Hilbert Space (1988) Young N.

7 An Introduction to Partial Differential Equations (2004) M Renardy, R C. Rogers

8 Analyse fonctionnelle, Edition Mir (Moscou),(1985) Trénoguine V. A.:

9 Applications of Functional Analysis and Operator Theory (1980) V. Hutson and J.S. Pym

10 Basic Linear Algebra (2002) T. S. Blyth, E. F. Robertson

11 Elementary functional analysis (2018) Markin, Marat V

12 Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Editions Ellipses, Collection Mir, 3ième édition (1994) Kolmogorov A. N., Fomin S. V.,

13 Elements of Functional Analysis (1970) I. J. Maddox

14 Essential Results of Functional Analysis (1990) Robert J. Zimmer

15 Exercises in Functional Analysis (2003)C. Costara, D. Popa

16 Functional analysis (1991) Walter Rudin

17 Functional analysis (1972) N. Ya. Vilenkin, R. E. Flaherty

18 Functional analysis (2018) Bühler, Theo_ Salamon, Dietmar A.

19 Functional analysis (2002) L.P. Lebedev, I.I. Vorovich, G.M. Gladwell

20 Functional Analysis (2018) ergei Ovchinnikov

21 Functional Analysis and Applications (2018) Abul Hasan Siddiqi

22 Functional analysis _ An introductory course (2018) Ovchinnikov, SergeĭMeasure, Integral and Probability (2007) E Kopp, M Capiński

23 Functional Analysis _ in Applied Mathematics and Engineering (2018) Pedersen, Michael

24 Fundamentals of the theory of operator algebras Vol 1 (1983) R V. Kadison, J R. Ringrose

25 Foundations of Modern Analysis (2010) Avner Friedman

26 Introduction to functional analysis (1980) Angus E Taylor_ David C Lay

27 Introductory Functional Analysis (1998) B. Daya Reddy

28 Introductory Functional Analysis with Applications – Kreyszig

29 Integral Operators in Spaces of Summable Functions (1975) M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreyko, E.I. Pustylnik, P.E. Sobolevski

30 Lectures and Exercises on Functional Analysis (2006) A. Ya. Helemskii

31 Linear Algebra_ An Introductory Approach (1984) Charles W. Curtis

32 Linear Functional Analysis (2008) Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson

33 Linear Integral Equations (1999) Rainer Kress

34 Naive set theory (1998) Halmos P.R.

35 Principles of functional analysis (2001) Martin Schechter

36 Principles of real analysis_ measure, integration, functional analysis, and applications (2018) Junghenn, Hugo Dietrich

37 Real and Functional Analysis_ Part B_ Functional Analysis (1986) A. Mukherjea, K. Pothoven

38 Sequences and Series in Banach Spaces (1984) J. Diestel

39 Theorems and Problems in Functional Analysis (1982) A. A. Kirillov, A. D. Gvishiani, H. H. McFaden